УДК 517.958, 544.6

ОБОБЩЕНИЕ 2D ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕРНСТА–ПЛАНКА–ПУАССОНА И ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МОДЕЛЕЙ НА СЛУЧАЙ 3D

Казаковцева Е. В.

GENERALIZATION OF 2D CONVERSION SYSTEM OF EQUATIONS NERNST–PLANCK–POISSON AND HIERARCHICAL SYSTEM OF MODELS ON THE 3D CASE

Kazakovceva E. V.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: vivkaterina@mail.ru

Abstract. The purpose of this article is to summarize the conversion Kovalenko A. V. and Urtenova M. H. of two-dimensional system of equations Nernst–Planck–Poisson hierarchical system of mathematical transport models on the 3D case in a dimensionless form. This article discusses two cases: the transport of a binary electrolyte channel electrodialysis desalting device and membrane system with a rotating membrane disk. To achieve this goal was held dimensionless system of equations Nernst–Planck–Poisson in the case of 3D. Thus, in the case of a system with a rotating membrane disc as a characteristic width acted diffusion layer thickness calculated by Levich formula, and as the characteristic velocity – the speed of the feed solution to its depth the surface of the membrane disc. Further assessment was made of the dimensionless variables: Pecle number and the parameter on the basis of this assessment was made to simplify the decomposition equations Nernst–Planck–Poisson derived a mathematical model of transport in the approximation of a generalization of Ohm's law (LOM) in a cartesian coordinate system in the case of 3D. Then, the resulting model was transferred to LOM cylindrical coordinate system, taking into account the axial symmetry, thereby transferring model was obtained with a rotating disc membrane approximation generalizations Ohm's law.

Keywords: desalting, rotating membrane disk, electrodialysis apparatus, Nernst–Planck–Poisson, cylindrical coordinate system.

Введение

Для математического моделирования процессов переноса в мембранных системах используется система уравнений Нернста–Планка–Пуассона (НПП). Однако данная система достаточно сложна для аналитического и численного исследования и неудобна для вывода модельных задач. Для решения этих проблем в работе [1] был представлен метод декомпозиции одномерных систем уравнений НПП, что приводило к расщеплению этой системы на уравнение для напряженности электрического поля и систему уравнений Нернста–Планка. Метод декомпозиции в сочетании с факторизацией системы НПП позволил классифицировать задачи переноса и фактически создать теорию переноса бинарного и тернарного электролитов в диффузионном слое, в том числе с учетом реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды, разработать модели, альтернативные использованию как условия электронейтральности, так и уравнения Пуассона [2].

В последующем метод декомпозиции получил дальнейшее развитие в [3] для двумерных уравнений Нернста–Планка с условием электронейтральности.

В [4] преобразование, лежащее в основе метода декомпозиции, на случай двумерных уравнений Нернста–Планка–Пуассона для симметричного 1:1 электролита. Однако для рассмотренного случая это преобразование уже не приводит к полному расщеплению системы уравнений, хотя преобразованная си-

Казаковцева Екатерина Васильевна, аспирантка, преподаватель кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: vivkaterina@mail.ru

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 16-08-00128_а «Теоретическое и экспериментальное исследование гравитационной конвекции в мембранных системах с учетом реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды».

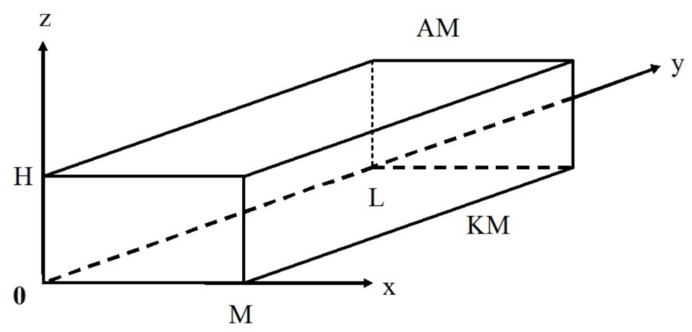

Рис. 1. 3D канал обессоливания ЭДА

стема уравнений и становится значительно удобнее для численного и асимптотического анализа и формирования модельных задач. В работах Коваленко А. В. и Уртенова М. Х. [5 и др.] это преобразование было обобщено для общего бинарного электролита в двумерном случае, а также выведены уравнения для плотности тока и разработана иерархическая система математических моделей переноса. Данная статья посвящена обобщению предложенного в [5] преобразования системы уравнений Нернста–Планка–Пуассона и иерархической системы математических моделей переноса на случай 3D уравнений в безразмерном виде.

Переход к безразмерному виду зависит от характерных величин, определяющих рассматриваемый процесс переноса. Ниже рассматриваются две частные задачи переноса бинарного электролита: в канале обессоливания электродиализного аппарата (ЭДА) (рис. 1) и в мембранной системе с вращающимся мембранным диском (ВМД) (рис. 2).

1. Постановка задачи переноса в канале обессоливания ЭДА и в мембранной системе с ВМД

1) Рассмотрим канал обессоливания ЭДА, состоящего из катионо- (КМ) и анионообменной мембран (АМ) с шириной канала M, высотой H и длиной L в трехмерном (3D) случае, изображенный на рис. 1. Будем использовать следующие формулы перехода к безразмерному виду

$$x^{(u)} = x/H; \quad y^{(u)} = y/H; \quad z^{(u)} = z/H;$$

$$L^{(u)} = \frac{L}{H}; \quad t^{(u)} = \frac{tV_0}{H}; \quad \mathbf{V}^{(u)} = \frac{\mathbf{V}}{V_0};$$

$$P^{(u)} = \frac{P}{\rho_0 V_0}; \quad d_\phi^{(u)} = \frac{F}{RT_0} d_\phi;$$

$$\mathbf{E}^{(u)} = \frac{HF}{RT_0}\mathbf{E}; \quad \phi^{(u)} = \frac{F}{RT_0}\phi;$$

$$\varepsilon^{(u)} = \frac{RT_0\varepsilon_r}{F^2H^2C_0}; \quad C_i^{(u)} = \frac{C_i}{C_0};$$

$$\mathbf{j}_i^{(u)} = \frac{H}{D_0C_0}\mathbf{j}_i; \quad D_i^{(u)} = \frac{D_i}{D_0};$$

$$\mathbf{I}^{(u)} = \frac{H}{D_0C_0F}\mathbf{I}; \quad i_{av}^{(u)} = \frac{i_{av}H}{D_0C_0F};$$

$$\nu^{(u)} = \frac{\nu}{D_0C_0F}; \quad Pe = \frac{V_0H}{D_0}; \quad f_0 = \frac{\rho_0 V_0^2}{H},$$

где $D_0 = 1{,}33 \cdot 10^{-9}$ м^2/с; индекс (u) соответствует безразмерной величине; p — давление, ρ_0 — плотность раствора, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{V}$ — скорость течения раствора, $\mathbf{j}_i$ — поток ионов i-го сорта; C_i — концентрация ионов i-го сорта в растворе; D_i — коэффициенты диффузии ионов i-го сорта в растворе, ϕ — потенциал; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, F — постоянная Фарадея, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, t — время, ε_r — диэлектрическая проницаемость раствора, d_ϕ — скачок потенциала, $\mathbf{I}$ — плотность тока.

Опустив индекс (u), безразмерную систему уравнений НПП можно записать в виде

$$\mathbf{J}_i = z_iD_iC_i\mathbf{E} - D_i\nabla\, C_i + PeC_i\mathbf{V}, \quad i = 1,2; \tag{1.1}$$

$$Pe\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{j}_i, \quad i = 1,2; \tag{1.2}$$

$$\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{E} = z_1C_1 + z_2C_2, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{I} = z_1\mathbf{j}_1 + z_2\mathbf{j}_2. \tag{1.4}$$

2) Рассмотрим мембранную систему с ВМД. В качестве характерной величины H выбрана толщина диффузионного слоя, поскольку именно в области диффузионного слоя происходят процессы переноса. Толщина диффузионного слоя для мембранной системы с ВМД, вычисляемая по формуле Левича [6], равна $H = \delta_{\text{dif}} = k/\sqrt{\omega}_0$, где δ_{dif} — толщина диффузионного слоя, k — коэффициент, зависящий от кинематической вязкости и коэффициента диффузии, $k = 1{,}61 D_0^{1/3}\nu^{1/6}$, а ω_0 — угловая скорость вращения мембранного диска (рад/с).

В качестве характерной скорости V_0 будем использовать скорость подвода раствора из глубины к поверхности мембранного диска. Согласно [6], $V_0 = \alpha\sqrt{\nu\omega_0}$, где $\alpha = 0{,}89$. Остальные характерные величины выберем такими же, как и для канала обессоливания ЭДА и воспользуемся теми же формулами перехода к безразмерному виду. Тогда безразмерная система уравнений НПП в декартовой системе координат для мембранной системы с ВМД будет иметь вид (1.1)–(1.4). Однако безразмерные параметры имеют уже другой вид

$$Pe = \frac{HV_0}{D_0}; \quad \varepsilon^{(u)} = \frac{\varepsilon RT}{H^2 C_0 F^2}.$$

Вывод безразмерной системы уравнений НПП в цилиндрической системе координат не представляет большой сложности. Ниже он представлен на примере модели переноса в приближении закона Ома (модели ЗОМ) для мембранных систем с ВМД в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии.

2. Обобщение преобразования системы уравнений Нернста–Планка–Пуассона на 3D случай

При обобщении 2D преобразования [5] на 3D, потребовалось доказать, что для любой дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой открытой области $U \subset R^3$ потенциальной вектор-функции $\mathbf{E}$: $U \to R^3$ в U справедливы равенства

1) $\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}$.

2) Так как

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E}) = (\operatorname{div} \mathbf{E})^2 + (\Delta \mathbf{E}, \mathbf{E}),$$

то

$$(\Delta \mathbf{E}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\Delta \|\mathbf{E}\|^2 - \|\nabla E_1\|^2 - \\ - \|\nabla E_2\|^2 - \|\nabla E_3\|^2.$$

Кроме того, для общей плотности тока $\mathbf{\Phi}$ получена следующая система уравнений

$$\operatorname{div}(\mathbf{\Phi}) = 0,$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{\Phi}) = -d_3 z_1 z_2 (\nabla(\tilde{S} - \varepsilon b \|\mathbf{E}\|^2), \mathbf{E})_1 + \\ + \varepsilon d_4 (\Delta \mathbf{E}, \mathbf{E})_1 + \varepsilon Pe (\Delta \mathbf{E}, \mathbf{V})_1 + \\ + \varepsilon Pe \operatorname{rot}(\mathbf{V}) \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Добавляя к этим уравнениям уравнения для $\tilde{S}$ и $\mathbf{E}$, полностью аналогичные уравнениям, представленным в [5],

$$Pe\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S}\mathbf{E}) - \\ - \varepsilon d_2 b z_1 z_2 \operatorname{div}(\|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{E}) - d_1 \Delta \tilde{S} - Pe \operatorname{div}(\tilde{S}\mathbf{V}),$$

$$d_3 z_1 z_2 (\tilde{S} - \varepsilon b \|\mathbf{E}\|^2)\mathbf{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} + \mathbf{\Phi} = 0,$$

получаем замкнутую систему уравнений относительно $\tilde{S}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{\Phi}$.

3. Оценка безразмерных параметров и вывод иерархической системы моделей

В [5] предложен алгоритм вывода иерархической системы 2D математических моделей переноса с использованием асимптотического упрощения, полученной после преобразований уравнений, путем оценки их членов. Эти оценки основаны на предположении малости параметров ε и $\sqrt{\varepsilon} Pe$.

Оценим указанные параметры для канала обессоливания ЭДА и мембранной системы с ВМД отдельно.

3.1. Оценка параметров Pe и ε для канала обессоливания ЭДА

В качестве характерной ширины канала можно принять величину порядка 1 мм.

а) Число Пекле $Pe = V_0 H/D_0$ при $H = 1$ мм имеет вид

$$Pe = \frac{V_0 H}{D_0} = \frac{V_0 \cdot 10^{-3}}{1{,}33 \cdot 10^{-9}} \approx 10^6 \cdot V_0.$$

б) Оценка параметра ε при $H = 1$ мм может быть представлена

$$\varepsilon = \frac{RT\varepsilon_r}{H^2 C_0 F^2} = 2{,}32 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1}{C_0}.$$

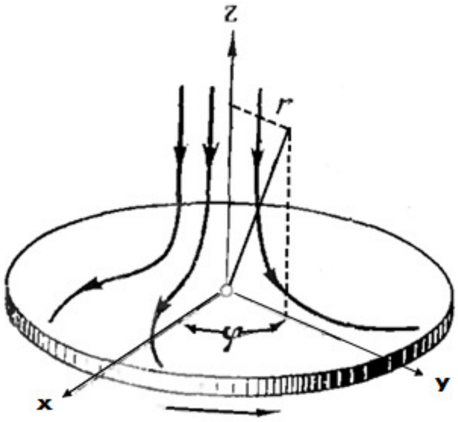

Рис. 2. Мембранная система с ВМД

Таким образом, при характерных для процессов обессоливания в электродиализных аппаратах значениях V_0 и C_0, например, $V_0 = 0.01$ м/с и $C_0 = 1$ моль/м^3 получаем $\varepsilon \approx 10^{-12}$, $Pe \approx 10^4$, т.е. число ε для канала обессоливания нужно считать малым параметром, а Pe большим параметром, но в то же время $\sqrt{\varepsilon}Pe \approx 10^{-2}$ можно считать малым. Эти предположения будут тем более справедливы, чем меньше средняя скорость прокачки раствора и чем больше его средняя концентрация.

3.2. Оценка параметров Pe и ε для мембранной системы с ВМД

С учетом того, что для мембранной системы с ВМД в качестве характерного линейного размера и средней скорости, как указывалось выше, рассматривается толщина диффузионного слоя Левича и скорость раствора на бесконечности, оценим параметры Pe и ε.

а) Число Пекле $Pe = HV_0/D_0$ имеет вид

$$Pe = \frac{HV_0}{D_0} = 1{,}43 \cdot D_0^{-2/3}\nu^{2/3} \approx 10^2,$$

поэтому число Пекле может считаться большим параметром.

б) Параметр ε можно представить

$$\varepsilon = \frac{8{,}314 \cdot 293 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-8} \cdot 96485^2} \cdot \frac{\omega_0}{C_0} \approx \approx 0{,}58 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\omega_0}{C_0},$$

поэтому уже при $\omega_0 = 10^5$ рад/с (и меньше) и $C_0 = 10^{-3}$моль/м^3 (и больше) этот параметр может считаться малым.

в) Параметр $\sqrt{\varepsilon}Pe$ примет вид

$$\sqrt{\varepsilon}Pe \approx 10^2\sqrt{0{,}58 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\omega_0}{C_0}} = = 0{,}76 \cdot 10^{-3}\sqrt{\frac{\omega_0}{C_0}}.$$

Поэтому уже, например, при $\sqrt{\omega_0/C_0} < 10$ ($\omega_0 < 100 \cdot C_0$) параметр $\sqrt{\varepsilon}Pe$ может считаться малым. В таблице приведена оценка этого параметра в зависимости от ω_0 и C_0.

Из формул для ε и Pe и таблицы видно, что при характерных для процессов обессоливания в электромембранных системах с ВМД значениях ω_0 и C_0 (например, $\omega_0 = 105$ рад/с и $C_0 = 100$ моль/м^3) получаем $\varepsilon \approx 10^{-10}$, $Pe \approx 10^2$, т.е. число ε для канала обессоливания нужно считать малым параметром, Pe — большим параметром, но $\sqrt{\varepsilon}Pe \approx 10^{-4}$ можно считать малым. При меньшей угловой скорости вращения мембранного диска и увеличении средней концентрации данные предположения будут тем более справедливы.

3.3. Вывод иерархической системы моделей

Используя малость параметров ε и $\sqrt{\varepsilon}Pe$ и применяя алгоритм вывода иерархической системы математических моделей переноса, предложенный в [5], можно вывести соответствующую систему моделей для 3D в прямоугольной системе координат. Иерархическая система математических моделей переноса для канала обессоливания в случае 3D полностью аналогична 2D моделям Коваленко А.В. и Уртенова М.Х., за исключением уравнений для общей плотности тока $\mathbf{\Phi}$, поскольку в 3D невозможно в общем случае ввести функцию

Таблица 1. Оценка $\sqrt{\varepsilon}Pe$

C_0, моль/м^3 ω_0, рад/с	0,1	1	10	100
1	$2{,}4 \cdot 10^{-3}$	$7{,}6 \cdot 10^{-4}$	$2{,}4 \cdot 10^{-4}$	$7{,}6 \cdot 10^{-5}$
5	$5{,}37 \cdot 10^{-3}$	$1{,}7 \cdot 10^{-3}$	$5{,}37 \cdot 10^{-4}$	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$
10	$7{,}6 \cdot 10^{-3}$	$2{,}4 \cdot 10^{-3}$	$7{,}6 \cdot 10^{-4}$	$2{,}4 \cdot 10^{-4}$
21	$11{,}02 \cdot 10^{-3}$	$3{,}48 \cdot 10^{-3}$	$1{,}102 \cdot 10^{-3}$	$3{,}48 \cdot 10^{-4}$
31	$13{,}38 \cdot 10^{-3}$	$4{,}23 \cdot 10^{-3}$	$1{,}338 \cdot 10^{-3}$	$4{,}23 \cdot 10^{-4}$
42	$15{,}58 \cdot 10^{-3}$	$4{,}92 \cdot 10^{-3}$	$1{,}558 \cdot 10^{-3}$	$4{,}92 \cdot 10^{-4}$
52	$17{,}33 \cdot 10^{-3}$	$5{,}48 \cdot 10^{-3}$	$1{,}733 \cdot 10^{-3}$	$5{,}48 \cdot 10^{-4}$
63	$19{,}08 \cdot 10^{-3}$	$6{,}03 \cdot 10^{-3}$	$1{,}908 \cdot 10^{-3}$	$6{,}03 \cdot 10^{-4}$
105	$24{,}62 \cdot 10^{-3}$	$7{,}79 \cdot 10^{-3}$	$2{,}462 \cdot 10^{-3}$	$7{,}79 \cdot 10^{-4}$

для плотности тока, как это можно сделать в двумерном случае, воспользовавшись соленоидальностью общей плотности тока $\mathbf{\Phi}$. Однако в случае мембранных систем с ВМД, как показано ниже на примере модельной задачи с обобщенным законом Ома (модель ЗОМ), это можно сделать за счет осевой симметрии процесса переноса после перехода к цилиндрической системе координат.

4. Модель переноса ЗОМ для мембранных систем с ВМД

4.1. Модель переноса ЗОМ в декартовой системе координат в случае 3D

Несложно показать, что модель переноса ЗОМ в декартовой системе координат в случае 3D имеет следующий вид:

$$Pe\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \operatorname{div}(\tilde{S}\mathbf{E}) - \varepsilon d_2 b z_1 z_2 \operatorname{div}(\|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{E}) - d_1 \Delta \tilde{S} - Pe \operatorname{div}(\tilde{S}\mathbf{V}), \quad (4.1)$$

$$d_3 z_1 z_2 (\tilde{S} - \varepsilon b \|\mathbf{E}\|^2)\mathbf{E} - d_2 z_1 z_2 \nabla \tilde{S} + \mathbf{\Phi} = 0, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{\Phi}) = -d_3 z_1 z_2 (\nabla(\tilde{S} - \varepsilon b \|\mathbf{E}\|^2), \mathbf{E})_1, \quad \operatorname{div}(\mathbf{\Phi}) = 0. \quad (4.3)$$

4.2. Переход к цилиндрической системе координат

Запишем уравнения (4.1)–(4.3) в цилиндрической системе координат $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$ и воспользуемся свойством осевой симметрии вращающегося мембранного диска.

Уравнения (4.1) и (4.2) в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии запишутся в виде

$$Pe\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = d_2 z_1 z_2 \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}E_r + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z}E_z + \tilde{S}\frac{\partial E_r}{\partial r} + \tilde{S}\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\tilde{S}}{r}E_r\right) - \varepsilon d_2 b z_1 z_2 \left(3E_r^2\frac{\partial E_r}{\partial r} + 2E_z E_r \frac{\partial E_z}{\partial r} + 2E_r E_z \frac{\partial E_r}{\partial z} + 3E_z^2 \frac{\partial E_z}{\partial z} + E_r^2\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{E_r^3}{r} + E_z^2\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_z^2 E_r}{r}\right) - d_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial z^2}\right) - Pe \cdot \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}u + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z}w + \tilde{S}\frac{\partial u}{\partial r} + \tilde{S}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\tilde{S}u}{r}\right); \quad (4.4)$$

$$d_3 z_1 z_2 (\tilde{S} - \varepsilon b(E_r^2 + E_z^2))(E_r \mathbf{r}_e + E_z \mathbf{k}) - d_2 z_1 z_2 \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}\mathbf{r}_e + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \mathbf{\Phi}(r, \phi, z) = 0. \quad (4.5)$$

Преобразуем систему уравнений (4.3). В цилиндрических координатах с осевой симметрией вектор $\mathbf{\Phi}$ не зависит от угла θ, т.е. $\mathbf{\Phi}$ лежит в плоскости (z, r). Поэтому в качестве $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}$ будем рассматривать азимутальную составляющую завихренности по формуле

$$\xi(\mathbf{\Phi}) = \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial r}.$$

Из (4.3) следует, что в цилиндрической системе координат уравнение примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Phi_r) + \frac{\partial}{\partial z}\Phi_z = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\Phi_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r\Phi_z) = 0.$$

Из этого равенства следует существование такой функции η, что

$$r\Phi_r = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad r\Phi_z = -\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

или

$$\Phi_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \Phi_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}.$$

Выражение $\xi(\mathbf{\Phi}) = \frac{\partial \Phi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial r}$ через функцию η запишется

$$\xi(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) = \\ = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{r}\Delta\eta,$$

где справа оператор Лапласа записан в цилиндрических координатах. Таким образом, уравнение (4.3) можно представить

$$\Delta\eta = -rd_3z_1z_2\Bigg(\bigg(\frac{\partial}{\partial r}(\tilde{S} - \varepsilon b(E_r^2 + E_z^2))\mathbf{r}_e + \\ + \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{S} - \varepsilon b(E_r^2 + E_z^2))\mathbf{k}\bigg), \\ (E_r\mathbf{r}_e + E_z\mathbf{k})\Bigg)_1. \quad (4.6)$$

В итоге модель переноса ЗОМ для мембранных систем с ВМД в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии описывается системой уравнений (4.4), (4.5) и (4.6).

Замечание. Аналогично п.4, можно вывести общую упрощенную модель без начального погранслоя и модель ЗОМ для 1:1 электролита.

Заключение

В данной статье было обобщено преобразование двумерной системы уравнений НПП и иерархической системы математических моделей переноса на случай 3D. Сформулирована модель переноса с вращающимся мембранным диском в приближении обобщения закона Ома.

Литература

1. *Уртенов М.Х.* Краевые задачи для систем уравнений Нернста–Планка–Пуассона (факторизация, декомпозиция, модели, численный анализ). Краснодар: КубГУ, 1998. 125 с.
2. *Никоненко В.В., Уртенов М.Х.* Анализ электродиффузионных уравнений в декомпозиционной форме // Электрохимия, 1996. Т. 32. № 2. С. 207.
3. *Письменский А.В., Уртенов М.Х.* Моделирование гравитационной конвекции в электромембранных системах очистки воды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004, №3, С. 64–69.
4. *Узденова А.М., Коваленко А.В., Уртенов М.Х.* Математические модели электроконвекции в электромембранных системах. Карачевск: КЧГУ, 2011, 155 с.
5. *Коваленко А.В., Уртенов М.Х., Герюгова А.А.* Электроосмос в микро- и наноканалах. Часть 1. Вывод иерархической системы математических моделей с использованием метода декомпозиции // Научный журнал КубГАУ. 2015. Т. 117. № 12. С. 846–865.
6. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.

References

1. Urtenov M.H. *Kraevye zadachi dlja sistem uravnenij Nernsta-Planka-Puassona (faktorizacija, dekompozicija, modeli, chislennyj analiz)* [Boundary value problems for systems of equations Nernst–Planck–Poisson (factorization, decomposition, model, numerical analysis)]. Krasnodar, KubGU Publ., 1998, 125 p. (In Russian)
2. Nikonenko V.V., Urtenov M.H. Analiz jelektrodiffuzionnyh uravnenij v dekompozicionnoj forme [Analysis of electrical diffusion equations in the form of the decomposition]. *Jelektrohimija* [Electrochemistry], 1996, vol. 32, no. 2, p. 207. (In Russian)
3. Pis'menskij A.V., Urtenov M.H. Modelirovanie gravitacionnoj konvekcii v jelektromembrannyh sistemah ochistki vody [Modeling of Gravitational Convection in electro-membrane water treatment systems]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of research centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2004, no. 3, pp. 64–69. (In Russian)
4. Uzdenova A.M., Kovalenko A.V., Urtenov M.H. *Matematicheskie modeli jelektrokonvekcii v jelektromembrannyh sistemah* [Mathematical models of electroconvection in electro-membrane systems]. Karachevsk, KChGU Publ., 2011, 155 p. (In Russian)

5. Kovalenko A.V., Urtenov M.H., Gerjugova A.A. Jelektroosmos v mikro- i nanokanalah. Chast' 1. Vyvod ierarhicheskoj sistemy matematicheskih modelej s ispol'zovaniem metoda dekompozicii [Electroosmosis in the micro- and nanochannels. Part 1: Conclusion of a hierarchical system of mathematical models using the decomposition method]. *Nauchnyj zhurnal KubGAU* [Science journal of KubSAU]. 2015, vol. 117, no. 12, pp. 846–865. (In Russian)
6. Levich V.G. *Fiziko-himicheskaja gidrodinamika* [Physico-chemical hydrodynamics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 700 p. (In Russian)

Статья поступила 2 сентября 2016 г.