

УДК 539.3

## К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕАКЦИИ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ НА ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО И ВНУТРЕННИХ ВИБРАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Капустин М. С., Павлова А. В., Рубцов С. Е., Телятников И. С.

TO STUDY OF DEFORMABLE SOIL MEDIUM RESPONSE TO EFFECTS OF SURFACE AND INTERNAL SOURCES

Kapustin M. S. \*, Pavlova A. V. \*, Rubtsov S. E. \*, Telyatnikov I. S. \*\*

\* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

\*\* Southern Center of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia  
e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

*Abstract.* In this paper the problem of steady oscillations of elastic layer under the influence of surface and aggregate internal loads describes base–foundation system. The quantitative characteristics of the stress-strain state of elastic foundation resulting from the surface effects and internal sources are obtained in the work with the help of semi-analytic methods, in particular stresses occurring in the area of contact between the radiating plate and the base surface are calculated.

Fore unknown stress in the contact area integral equation of the first kind is obtained, the solution of this equation is constructed by method of fictitious absorption. Expression for calculating the stresses created by recessed inclusions under the stamp is obtained. The numerical results showed that at low frequencies of vibration the presence of inclusions does not significantly affect the nature of the stress, the load distribution on the vertical inclusions also has no significant effect on the nature of the stresses under the stamp and their value.

The presented approach allows us to investigate the effects of vibration loads of different foundation types. Obtained characteristics of the stress-strain state of elastic foundation can be useful in the study of soil deformation during load transfer transmission, etc. The results also can be used in studies of the features of dynamic modes of operation of facilities, taking into account the geological structure of their location, to prevent and minimize the possible negative effects of technic and natural disasters caused by different technological and natural vibration sources.

*Keywords:* elastic layer, surface load, horizontal rigid inclusions, steady-state oscillations, integral equation, method of fictitious absorption.

В настоящее время проблемы исследования различных материалов, в том числе геологических, потенциально содержащих неоднородности, при воздействиях различной природы имеют большое значение для разнообразных направлений хозяйственной деятельности. Такого рода исследования востребованы при разработке композиционных материалов, использовании невзрывных способов поиска полезных ископаемых, в сейсмостойком

строительстве и т.д. Актуальность исследований динамического взаимодействия сооружений с основаниями, содержащими неоднородности, определяется повышенными требованиями к надежности их эксплуатации и к степени достоверности прогноза последствий вибровсейсмо воздействий. Многочисленные публикации явились следствием значительных успехов, достигнутых в исследовании динамических задач для сред, имеющих внут-

Капустин Михаил Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: rub\_serg@mail.ru

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник лаборатории прикладной математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux\_t@list.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края р\_юг\_а 16-41-230184.

ренные источники и концентраторы напряжений, эффективные методики представлены, например, в работах [1–4].

В данной работе система основание–фундамент описывается задачей об установившихся колебаниях упругого слоя под действием поверхностной и совокупности внутренних нагрузок. С помощью полуаналитических методов рассчитаны количественные характеристики напряженно-деформированного состояния упругого основания в результате воздействия поверхностного и внутренних источников, в частности определены возникающие в области контакта поверхности основания и излучающей плиты напряжения. Полученные результаты могут быть использованы при исследованиях особенностей динамических режимов функционирования сооружений, направленных на предупреждение и минимизацию возможных последствий техногенных и естественных катастроф, вызванных различными технологическими и природными виброисточниками.

В осесимметричной постановке рассматривается задача о совместных установившихся (с частотой  $\omega$ ) колебаниях невесомого круглого штампа на упругом слое, содержащем совокупность горизонтально ориентированных внутренних нагрузок и жестко сцепленном с недеформируемым основанием.

Амплитуды перемещений точек упругого слоя  $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$  удовлетворяют уравнениям Ляме. Штмп радиуса  $a$  ( $r \leq a, z = 0$ ) контактирует со средой без трения, в центре его приложена гармоническая вертикальная нагрузка  $\mathbf{P} = \{0, p(r) e^{-i\omega t}\}$ . В слое толщины  $h$  на глубине  $h_0$  расположена горизонтально ориентированная система включений длины  $r_0$ . Заданная нагрузка на включениях считается распределенной по их длине и моделируется локализованной объемной силой, компоненты которой имеют вид

$$X_l = \operatorname{Re} [f_l(r) \delta(z + h_0) e^{-i\omega t}],$$

$$l = r, z,$$

где  $\delta(z + h_0)$  — функция Дирака. При этом распределение контактных напряжений под штампом неизвестно.

Для рассматриваемого установившегося процесса параметры задачи можно представить в виде  $\psi_1(r, z, t) = \psi(r, z) e^{-i\omega t}$ . Далее временной множитель опущен.

Постановка задачи

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} \right] + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \omega^2 \rho u_r = \\ & = f_r(r) \delta(z + h_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right] + \omega^2 \rho u_z = \\ & = f_z(r) \delta(z + h_0); \end{aligned}$$

$$\mu \left[ \frac{\partial u_z(r, 0)}{\partial r} + \frac{\partial u_r(r, 0)}{\partial z} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z(r, 0)}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r(r, 0)) = \\ & = \begin{cases} p(r), & r \leq a, \\ 0, & r > a; \end{cases} \end{aligned}$$

$$u_r(r, -h) = u_z(r, -h) = 0,$$

позволяет использовать подход работ [5, 6]. Здесь  $\lambda, \mu$  — характеристики Ляме упругого основания,  $\rho$  — его плотность. На бесконечности при  $z \rightarrow -\infty$  принято  $u_r(r, z), u_z(r, z) \rightarrow 0$ , в качестве условий излучения использован принцип предельного поглощения [7].

Задача с помощью преобразования Бесселя сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в соответствии [5, 6]. Изображения для компонент вектора объемных сил на включениях при этом примут вид

$$\eta_r(\alpha, z) = \delta(z + h_0) \int_0^{r_0} f_r(r) r J_1(\alpha r) dr,$$

$$\eta_z(\alpha, z) = \delta(z + h_0) \int_0^{r_0} f_z(r) r J_0(\alpha r) dr,$$

где  $J_0, J_1$  — функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно,  $\alpha$  — параметр преобразования.

В результате решения системы амплитуда вертикальной составляющей смещения примет вид

$$u_z(r,0) = \int_{\sigma_0} K(\alpha) J_0(\alpha r) \times \alpha \int_0^a \bar{q}(\tau) J_0(\alpha \tau) \tau d\tau d\alpha + \int_{\sigma_0} U(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \quad (1)$$

где

$$K(\alpha) = \frac{\kappa_2^2}{4\rho c_2^2 \bar{\Delta}(\alpha)} \times \left[ \sigma_1(\alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h)) \right],$$

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \sigma_1 \sigma_2 (s^2 + \alpha^4) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \alpha^2 (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2,$$

функция  $\bar{q}(\tau)$  имеет смысл возникающих под штампом нормальных напряжений,  $U(\alpha)$  — преобразование Бесселя амплитудных характеристик вызванных вибрацией внутренних включений вертикальных смещений. В обозначениях работ [5, 6]  $U(\alpha)$  можно представить

$$U(\alpha) = \frac{-h_0 J_0(\alpha r_0)}{4\rho c_2^2 \bar{\Delta}(\alpha)} \times \left( \sigma_1 \left( \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 e^{\sigma_1 h} - s \chi_2^+ \right) e^{-\sigma_1(h-h_0)} + \alpha^2 \sigma_1 \left( s e^{\sigma_2 h} - \varphi_1^+ \right) e^{-\sigma_2(h-h_0)} - \sigma_1 \left( \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - s e^{\sigma_1 h} \chi_2^- \right) e^{-\sigma_1 h_0} - \alpha^2 \sigma_1 \left( s + e^{\sigma_2 h} \varphi_1^- \right) e^{-\sigma_2 h_0} \right) \phi_z(r_0),$$

где

$$\phi_z(\beta) = \int_0^\beta f_z(r) r J_0(\alpha r) dr,$$

$$\chi_2^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(\sigma_2 h) \pm \alpha^2 \operatorname{sh}(\sigma_2 h),$$

$$\varphi_1^\pm = \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \pm \alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h).$$

Здесь

$$s = \alpha^2 - 0,5\kappa_2^2, \quad \sigma_j = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2},$$

$$\kappa_j^2 = (\omega/c_j)^2, \quad \kappa_j \quad (j = 1,2)$$

— соответственно волновые числа продольной и поперечной волн,

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$$

— их скорости. Контур интегрирования  $\sigma_0$  выбирается согласно принципу предельного поглощения [7].

В силу абсолютной и равномерной сходимости интегралов по  $\alpha$  и  $\tau$ , поменяв порядок интегрирования в соотношении (1), придем к интегральному уравнению относительно неизвестного напряжения в области контакта, аналогичному построенному в [5]

$$\int_0^a k(r, \tau) \bar{q}(\tau) \tau d\tau = u_z(r,0) - A(r), \quad (2)$$

$$0 \leq r \leq a,$$

$$k(r, \tau) = \int_{\sigma_0} K(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha \tau) \alpha d\alpha,$$

$$A(r) = \int_{\sigma_0} U(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha.$$

В силу линейности постановки задачи решение уравнения (2) представляется в виде суммы  $\bar{q}(r) = q_1(r) + q_2(r)$ , где  $q_{1,2}(r)$  соответственно описывают распределения вертикальных составляющих контактных напряжений, возникающих в слое под действием поверхностного штампа и создаваемых заглубленными источниками.

Используя метод, описанный в [5], можно получить аналитическое представление для вычисления создаваемых горизонтально ориентированными включениями контактных напряжений под штампом.

Для построения решения (2) используется вспомогательное уравнение

$$\int_0^a k(r, \tau) q_\eta(\tau) \tau d\tau = J_0(\eta r), \quad (3)$$

$$0 \leq r \leq a,$$

где  $\operatorname{Im} \eta = 0, \operatorname{Re} \eta \geq 0$ .

Решение уравнения (3) строится методом фиктивного поглощения [7,8], при реализации которого выбрана функция

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^N G_k(L) C_k \delta(r-a),$$

$$L = - \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right),$$

где  $G_k(\alpha^2)$  имеют вид

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2) \dots$$

$$\dots (\alpha^2 - p_{k-1}^2) (\alpha^2 - p_{k+1}^2) \dots (\alpha^2 - p_N^2),$$

$C_k$  — неизвестные константы, нуждающиеся в определении,  $\pm p_k$  — вещественные полюса функции  $K(\alpha)$ . Аналитическое представление решения (3) приведено в [5].

Воспользовавшись решением вспомогательного уравнения (3)  $q_0(r)$  при единичной правой части ( $\eta = 0$ ), для контактных напряжений под штампом, создаваемых заглубленными горизонтальными включениями, получим

$$q_2(r) = -\frac{1}{2} \int_{\sigma_0} U(\alpha) q_0(r) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha. \quad (4)$$

Продолжим в верхнюю полуплоскость подынтегральную функцию и, учитывая экспоненциальное убывание функции Ханкеля  $H_0^1(\alpha r)$  при  $|\text{Im } \alpha| \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq r \leq r_0$ , осуществим замыкание контура интегрирования  $\sigma_0$ . В результате вычисления (4) по вычетам получим при  $0 \leq r \leq a$

$$q_2(r) = -\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}_{\alpha=\zeta_k} (U(\alpha) q_0(r) J_0(\alpha r) \alpha) =$$

$$= -\pi i \sum_{k=1}^m \frac{U(\zeta_k) q_0(r) J_0(\zeta_k r) \zeta_k \bar{\Delta}(\zeta_k)}{\Delta_1(\zeta_k)},$$

где

$$\Delta_1(\alpha) = \alpha \left( ((\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (s^2 + \alpha^4) + \right.$$

$$+ 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2)) \text{ch}(\sigma_1 h) \text{ch}(\sigma_2 h) +$$

$$+ h (\sigma_1 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_1^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \times$$

$$\times \text{ch}(\sigma_1 h) \text{sh}(\sigma_2 h) +$$

$$+ h (\sigma_2 (s^2 + \alpha^4) - \alpha^2 \sigma_2^{-1} (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2)) \times$$

$$\times \text{sh}(\sigma_1 h) \text{ch}(\sigma_2 h) - 4\sigma_1 \sigma_2 (s + \alpha^2) -$$

$$- 2 (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 2s\alpha^2 + \alpha^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)) \times$$

$$\left. \times \text{sh}(\sigma_1 h) \text{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right).$$

Здесь  $\alpha = \zeta_k$  — полюса подынтегральной функции (4), которые находятся из решения уравнения  $\bar{\Delta}(\alpha) = 0$ .

Таким образом, получено выражение для расчета создаваемых горизонтально ориентированными внутренними включениями контактных напряжений под штампом.

Вычислительные эксперименты проводились для распределения напряжений на горизонтально ориентированных включениях, описываемых функцией  $f(r) = kr + b$ , где

$$k = b(1 - \varepsilon_1) r_0^{-1}, \quad b = 2r_0^{-1} (1 + \varepsilon_1)^{-1},$$

$$r \in [0, r_0]$$

для  $\varepsilon_1 = 0; 0,5; 1$ . При этом в формулах  $\omega$  — безразмерная частота определяется соотношением  $\omega = 2\pi\nu l_0/c_0$ , где  $\nu$  — частота (Гц),  $l_0 = 1$  м,  $c_0 = 10^3$  м/с.

На рис. 1–3 приведены графики зависимости вещественной части амплитуды вертикальной компоненты контактных напряжений  $q_2(r)$  от пространственной координаты, принимающей значения из интервала  $[0, a]$ , занимаемого штампом. Рис. 1а–1г демонстрирует изменение ее величины с ростом частоты колебаний.

Рис. 2–3 отражают изменение вещественной части амплитуды вертикальной компоненты контактных напряжений под штампом в зависимости от линейного размера внутренних источников и глубины их расположения при фиксированных остальных параметрах задачи. Как видно из рис. 3, изменение знака вещественной части амплитуды вертикальной компоненты создаваемых включениями напряжений зависит от их размера.

Анализ показывает, что для низких частот вибрации наличие горизонтальных включений незначительно влияет на характер напряжений под штампом, распределение нагрузки на включениях также не оказывает значимого влияния на величину и распределение напряжений в области контакта штампа с деформируемой средой. Графики рис. 4 иллюстрируют результаты численных расчетов вещественной части амплитуды вертикальной компоненты контактных напряжений, возникающих в слое для случая единичной амплитуды колебаний поверхностного штампа  $q_1(r)$  (мелкий пунктир) [5], создаваемых заглубленными источниками  $q_2(r)$  (крупный пунктир)

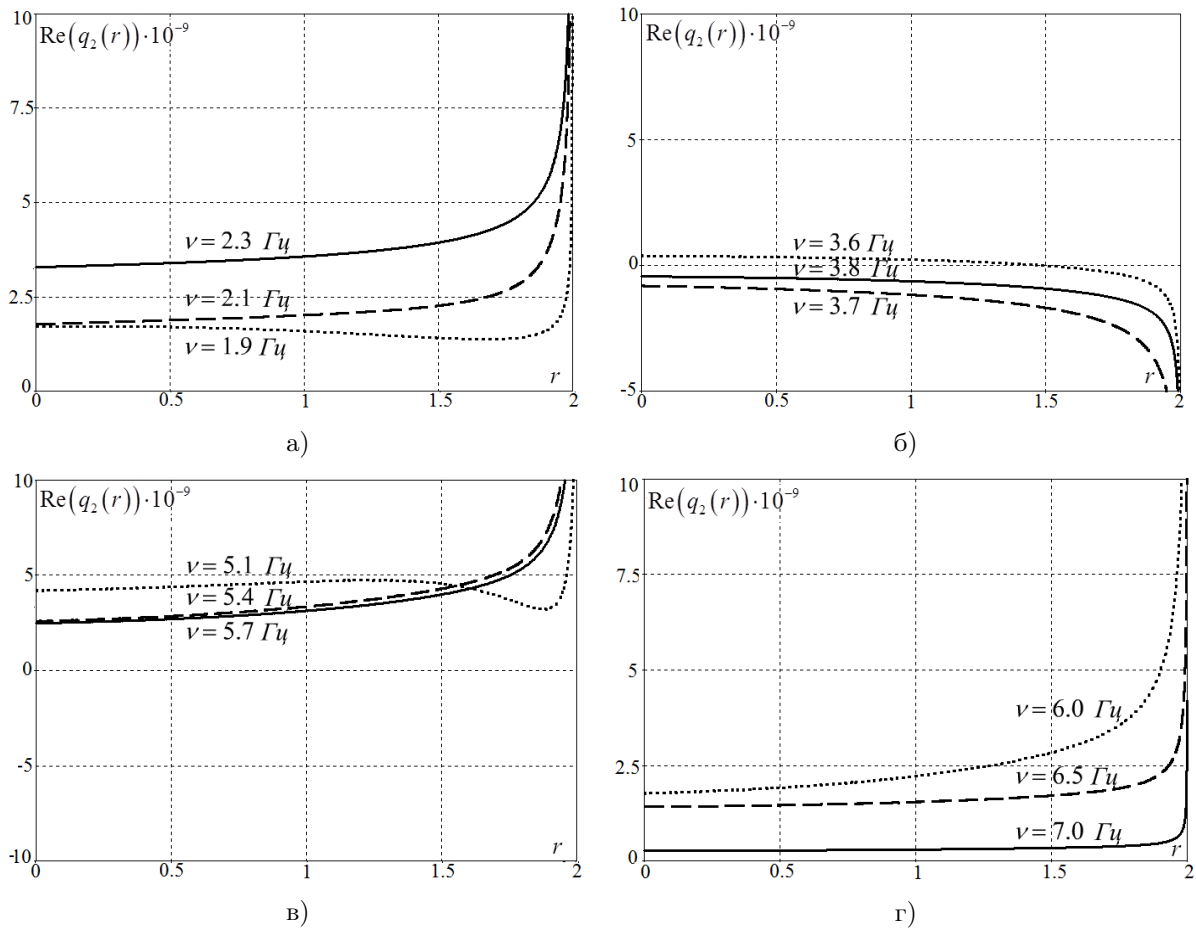


Рис. 1.  $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$  м/с,  $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$  м/с,  $\rho = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 20$  м,  $a = 2$  м,  $h_0 = 10$  м,  $r_0 = 2$ ,  $\varepsilon_1 = 1$

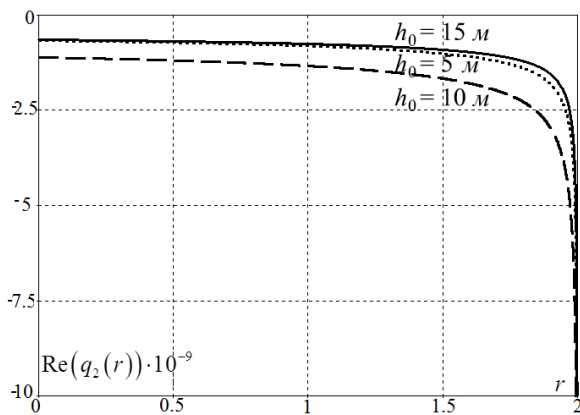


Рис. 2.  $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$  м/с,  $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$  м/с,  $\rho = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 20$  м,  $a = 2$  м,  $r_0 = 2$ ,  $\nu = 4$  Гц,  $\varepsilon_1 = 1$

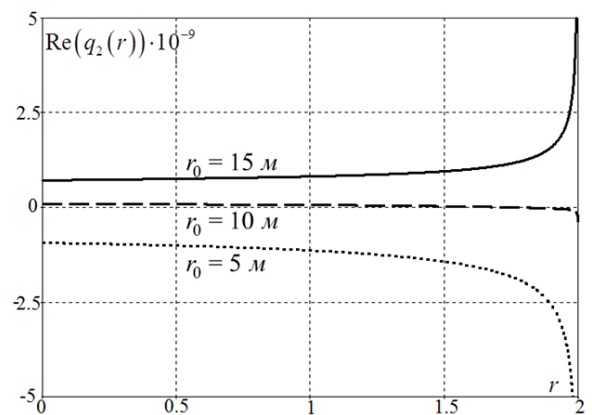


Рис. 3.  $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$  м/с,  $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$  м/с,  $\rho = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 20$  м,  $a = 2$  м,  $h_0 = 10$  м,  $\nu = 4$  Гц,  $\varepsilon_1 = 1$

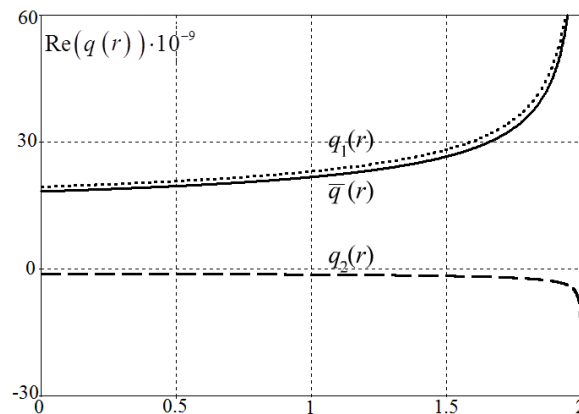


Рис. 4.  $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$  м/с,  $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$  м/с,  $\rho = 1,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 20$  м,  $a = 2$  м,  $h_0 = 10$  м,  $r_0 = 2$ ,  $\nu = 4$  Гц,  $\varepsilon_1 = 1$

и общего распределения напряжений  $\bar{q}(r)$  под штампом (сплошная линия).

Таким образом, в работе представлено решение задачи о вибрации жестко сцепленного с недеформируемым основанием упругого слоя под воздействием совокупности заглубленных горизонтальных включений и поверхностной нагрузки. Приведены результаты численного исследования влияния внутренних нагрузок на напряжения в области контакта штампа с деформируемой средой. Сравнивая полученные результаты с представленными в [5], можно утверждать, что на малых частотах при сопоставимых параметрах влияние на контактные напряжения под штампом наличия горизонтально ориентированных заглубленных включений мало отличается от влияния внутренних включений в слое, ориентированных вертикально.

### Литература

1. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и трещин) // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 3. С. 5–9.
2. Бабешко В.А. Теория «вирусов» вибропрочности для совокупности включений // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 21–23.
3. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 87–97.
4. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // ДАН. 2006. Т. 411, № 3. С. 330–333.
5. Капустин М.С., Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С. К моделированию взаимно-

действия фундамента с деформируемой грунтовой средой // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. № 3. С. 44–51.

6. Kapustin M., Pavlova A., Rubtsov S., Telyatnikov I. Model of foundation-base system under vibration load // Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2014. Vol. 487. P. 168–173.
7. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
8. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.

### References

1. Babeshko V.A. Sredy s neodnorodnostjami (sluchaj sovokupnosti vkljuchenij i treshhin) [Inhomogeneous media (collectively the case of inclusions and fractures)]. *Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela* [Proc. of the Russian Academy of Sciences. Series 'Mechanics of Rigid Body'], 2000. no. 3. pp. 5–9. (In Russian)
2. Babeshko V.A. Teorija "virusov" vibroprochnosti dlja sovokupnosti vkljuchenij [The theory of "viruses" for a set of vibration strength inclusions]. *Izvestija Vuzov. Sev.-Kav. Region. Estestv. Nauki* [Proc. of the Universities. North-Caucasian region. Natural Sciences], 2000, no. 3, pp. 21–23. (In Russian)
3. Prjahina O.D., Smirnova A.V. Analiticheskij metod reshenija dinamicheskikh zadach dlja sloistykh sred s vkljuchenijami [Analytical method for solving dynamic problems for layered media with inclusions]. *Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela* [Proc. of the Russian Academy of Sciences. Series 'Mechanics of Rigid Body'], 2005, no. 2, pp. 87–97. (In Russian)

4. Prjahina O.D., Smirnova A.V. К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений [To study the dynamics package with a plurality of elastic layers of hard inclusions]. *Doklady akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2006, vol. 411, no. 3, pp. 330–333. (In Russian)
5. Kapustin M.S., Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Telyatnikov I.S. К моделированию взаимодействия фундамента с деформируемой грунтовой средой [By modeling the interaction with deformable foundation soil environment]. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2015, no. 3, pp. 44–51. (In Russian)
6. Kapustin M., Pavlova A., Rubtsov S., Telyatnikov I. Model of foundation-base system under vibration load. *Communications in Computer and Information Science (CCIS)*, 2014, vol. 487, pp. 168–173.
7. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах* [Dynamics massive bodies and the resonance phenomenon in deformable environments]. Moscow, Nauchnyi mir Pub., 1984, 248 p. (In Russian)
8. Babeshko V.A. *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka Pub., 1984, 265 p. (In Russian)

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2016

© Капустин М. С., Павлова А. В., Рубцов С. Е., Телятников И. С., 2016

Статья поступила 25 сентября 2016 г.