

УДК 51.37

## РЕАЛИЗАЦИЯ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В АЗОВСКОМ МОРЕ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

REALIZATION OF VARIATIONAL ALGORITHM AT IDENTIFICATION OF INPUT  
PARAMETERS OF MODEL OF TRANSFER OF PASSIVE IMPURITY IN AZOV SEA

Kochergin V. S., Kochergin S. V.

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia  
e-mail: vskoher@gmail.com

*Abstract.* For the purpose of transporting and diffusion modeling of pollutants in the Azov Sea and solving the environment tasks a barotropic hydrodynamic model in sigma-coordinates is implemented. The results of calculations at various wind stresses are considered as initial information while modeling transporting passive admixture. For implementing the variation algorithm of assimilation of the measurements data and identification the initial parameters of the model mathematical apparatus of adjoint equations is used. The questions of choice of compatible difference approximations at numerical realization of the head and adjoint models are considered. The TVD-approximations and the variant of monotonous equations are presented. The results of numerical modeling are compared to satellite data of concentration of suspended matter a good correlation of model estimations with the measurements data is obtained. On the basis of application of adjoint equation theory the functions of influence of initial data on admixture concentration for the areas of intensive navigation in the Azov Sea are created. At implementing such an algorithm we obtain not only evaluation data of the controlled functional but also the opportunity to identify the possible pollution sources by spatial structure of created influence functions and a priori information of the sources. By setting various initial data it's possible to estimate the functional in questions characterizing the environment situation without integrating the head model. Thus on the basis of solution of adjoint tasks and creating influence functions operative estimation of initial data influence on controlled concentration values of admixture in a certain area is possible. Such information can be useful at making decisions with the purpose of optimization of anthropogenic load on ecosystem of Azov-Black Sea basin. The approach based on integrating adjoint equations can be applied while solving various ecological tasks. It allows to find influence areas of the initial fields and pollution sources on the concentration field of investigated admixture in a certain area.

*Keywords:* variational algorithm, identification of input parameters, passive admixture, transport model, Azov Sea, transport and diffusion of pollutions, assimilation of data measurements.

### Введение

При решении задач, связанных с оценкой экологического состояния водных бассейнов, необходим анализ возможных последствий распространения примесей различной природы. Такой анализ полей концентрации может быть осуществлен на основе использования математического моделирования. При этом решаются две взаимосвязанные проблемы. Первая — решается на основе построения оптимальной модели переноса примеси и численной реализации, учитывающей природу её поведения в водной среде. Вторая про-

блема связана с идентификацией входных параметров модели и усвоения данных измерений. Под входными параметрами модели понимаются её коэффициенты, поля скоростей и начальные данные. Для реализации вариационного алгоритма усвоения данных измерений проведены расчеты по моделированию гидродинамических полей в Азовском море при различном ветровом воздействии. Полученные поля течений и коэффициенты турбулентной диффузии использовались в качестве входных параметров для основной и сопряженной задач. Произведено сравнение

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskoher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела морских информационных систем и технологий Морского гидрофизического института РАН; e-mail: ko4ep@mail.ru

результатов моделирования на основе модели переноса пассивной примеси со спутниковыми данными о концентрации взвешенного вещества. На основе интегрирования сопряженной задачи построены функции влияния для района интенсивного судоходства в акватории Керченского пролива. В результате реализации алгоритма идентификации найдено оптимальное пространственное распределение мощности источника загрязнения.

Использование сопряженных уравнений и вариационных принципов при решении задач, связанных с моделированием динамики океана, получили широкое распространение [1, 2]. Исторически сложилось так, что сначала вариационный подход применялся для решения задач динамики атмосферы [3, 4], а в дальнейшем использовался для решения океанологических задач. В основе таких алгоритмов лежат решение сопряженной задачи и минимизация квадратичного функционала качества прогноза. Важной особенностью таких алгоритмов является то, что сама модель выступает в роли пространственно-временного интерполянта [4] и получаемое решение согласованно не только с данными измерений, но и с самой моделью. Идентификация входных параметров осуществляется за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза. Такой функционал является выпуклым и минимум его единственный. Модель переноса пассивной примеси — линейная, поэтому использование её в качестве связей (ограничений) при минимизации выбранного функционала не меняет его выпуклости, что позволяет осуществлять поиск входных параметров модели, при которых её решение наилучшим образом согласуется с имеющимися данными измерений.

Решение сопряженной задачи по своей сути является «функцией чувствительности» или «функцией влияния» [5], поэтому решение сопряженной задачи дает возможность также оценивать влияние различных районов области интегрирования модели на интересующий район. Часто при решении экологических задач необходимо следить не за самой концентрацией примеси, а за значениями некоторых функционалов в рассматриваемом районе. Например, это может быть средняя или суммарная концентрация какой-либо примеси в исследуемой области. Такие значения функционалов можно вычислять непосредственно по значениям концентрации в узлах расчетной сетки. При этом, значения на конечный момент интегрирования ищутся

путем решения модели переноса с заданными начальными данными и функциями источников загрязнения. Таким образом, задавая различные начальные данные и функции источников, получаем серию полей концентрации, для которых вычисляем необходимый функционал в указанной области. Для различных начальных данных и мощностей источников необходимо осуществлять новый пространственно-временной расчет. Среди таких расчетов можно выбрать наиболее оптимальный с точки зрения соответствия функционала его допустимым значениям. С другой стороны решение подобного рода задач может быть упрощено на основе метода сопряженных уравнений. При этом в соответствии с [5], сопряженная задача решается один раз и исследуемый функционал вычисляется без пространственно-временного счета при различных начальных полях и функциях источников.

### 1. Модель переноса

В качестве модели переноса пассивной примеси в Азовском море рассмотрим следующее уравнение в  $\sigma$ -координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \Gamma : \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \\ \sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Q_S(x, y), \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Q_B(x, y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \bar{Q}_S \delta(x - x_0, y - y_0), \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \bar{Q}_B \delta(x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (1.3)$$

где  $C$  — концентрация примеси;  $U, V, W$  — компоненты поля скорости;  $A_H$  и  $K_H$  — коэффициенты турбулентной диффузии в горизонтальном и вертикальном направлениях;

$D(x, y)$  — динамическая глубина;  $\sigma$  — вертикальная координата ( $\sigma = 0$  на поверхности,  $\sigma = -1$  на дне);  $Q_S(x, y), Q_B(x, y)$  — переменные по пространству мощности источника на поверхности и на дне;  $\bar{Q}_S, \bar{Q}_B$  — постоянные мощности точечных источников,  $M$  — область интегрирования модели;  $\Gamma$  — граница области  $M$ ;  $M_t = M \times [0, T]$ .

## 2. Сопряженная задача

Поставим в соответствие (1.1)–(1.3) сопряженную задачу

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} = D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma}, \quad (2.1)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0,$$

$$\sigma = 0, \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0,$$

$$C^*(x, y, \sigma, T) = h(x, y, \sigma).$$

При выводе (2.1) учтено соотношение, полученное из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.2)$$

Умножая (1.1)–(1.3) на  $C^*$  и интегрируя по частям с учетом (2.1) и (2.2), получим

$$\int_M h C dM = \int_M C_0 C^* dM. \quad (2.3)$$

Выбираем  $h$  в виде

$$h = \begin{cases} \frac{1}{m(\Omega)} & \text{в области } \Omega, \\ 0 & \text{вне области } \Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $m$  — мера некоторой области  $\Omega \in M$ . При этом в левой части выражения (2.3) получаем среднюю концентрацию  $\bar{C}_T$  в  $\Omega$  на момент времени  $T$ .

Выбрав в качестве  $\Omega$  ячейку расчетной сетки имеем

$$\bar{C}_T = \int_M C_0 C^* dM. \quad (2.5)$$

Таким образом, решая серию сопряженных задач (2.1) с начальными данными (2.4), по формуле (2.5) осуществляется оценка поля концентрации в некоторой ячейке расчетной сетки. Начальные данные  $C_0$  могут соответствовать любому моменту времени  $t_0 \in [0, T]$ , при этом процедура восстановления поля концентрации пассивной примеси  $C_T$  производится на интервале времени  $[t_0, T]$ .

Сопряженные задачи в данном алгоритме независимы друг от друга и могут быть реализованы различными исполнителями (процессорами). Это позволяет с использованием современной вычислительной техники осуществлять необходимые вычисления в распараллеленном режиме. Дальнейшая оценка  $C_T$  осуществляется без пространственно-временного счета с использованием уже рассчитанных значений  $C^*$ .

Выбирая

$$h = \begin{cases} 1 & \text{в области } \Omega, \\ 0 & \text{вне области } \Omega, \end{cases}$$

можно оценить суммарную концентрацию на конечный момент времени в области  $\Omega$  по формуле

$$\int_{\Omega} C_T d\Omega = \int_M C_T dM = \int_M C_0 C_0^* dM. \quad (2.6)$$

При этом решение сопряженной задачи является весовой функцией при начальных данных, то есть по  $C_0^*$  можно судить, какие области  $M$  оказывают влияние на формирование полей концентрации примеси в  $\Omega$ .

## 3. Вариационный алгоритм идентификации

Задача усвоения данных измерений  $C_{\text{изм}}$  состоит в минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} [P(C - C_{\text{изм}}), P(C - C_{\text{изм}})]_{M_t}, \quad (3.1)$$

где  $M_t = M \times [0, T]$ ,  $P$  — оператор расширения нулями функций невязок, заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (3.1) с ограничениями

модели (1.1)–(1.3) эквивалентна поиску экстремума следующего функционала:

$$I = I_0 + \left[ \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \left( \frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_e} + (C - C_0, C^*)_M + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_S(x, y), C^* \right)_{\sigma_t^0} + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_B(x, y), C^* \right)_{\sigma_t^{-1}}. \quad (3.2)$$

В (3.2) рассмотрен случай переменных по пространству потоков вещества. Записывая вариацию функционала (3.2) и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в  $\sigma$ -координатах (2.2), получим

$$\delta I = (\delta Q_S(x, y), C^*)_{\sigma_t^0} + (\delta Q_B(x, y), C^*)_{\sigma_t^{-1}}, \quad (3.3)$$

где  $C^*$  — множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = -P(C - C_{изм}), \quad (3.4)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.5)$$

$$\sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0,$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (3.6)$$

Аналогичным образом строится алгоритм идентификации в случае определения других входных параметров задачи, например, мощности постоянного точечного источника или начального поля концентрации.

#### 4. Метод численной реализации

Для простоты изложения рассмотрим следующую консервативную монотонную разностную схему [6] для одномерного уравнения переноса примеси:

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} + \frac{\Psi}{\Delta x} = 0, \quad (4.1)$$

где

$$\Psi = k \left( 1 + R_{i+1/2} \mu_{i+1/2} + R_{i+1/2} \right) \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - k \left( 1 + R_{i-1/2} \mu_{i-1/2} + R_{i-1/2} \right) \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x},$$

$$R_{i+1/2} = -\frac{U_{i+1/2} \Delta x}{2k},$$

$U$  — скорость,  $k$  — коэффициент турбулентной диффузии,  $\Delta x$  — шаг по пространству,  $\mu(R) = \text{cth}(R) - 1/R$ .

Согласованная с ней схема для сопряженной задачи имеет вид

$$-\frac{C^{*n+1} - C^{*n}}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{k\xi_1}{\Delta x} - \frac{k\xi_2}{\Delta x} \right) = 0. \quad (4.2)$$

$$\xi_1 = \left( 1 + R_{i+1/2} \mu_{i+1/2} - R_{i+1/2} \right) C_{i+1}^* - \left( 1 + R_{i+1/2} \mu_{i+1/2} + R_{i+1/2} \right) C_i^*,$$

$$\xi_2 = \left( 1 + R_{i-1/2} \mu_{i-1/2} - R_{i-1/2} \right) C_i^* - \left( 1 + R_{i-1/2} \mu_{i-1/2} + R_{i-1/2} \right) C_{i-1}^*.$$

Можно показать, что при условии выполнения уравнения (2.2) аппроксимации (4.1) и (4.2) идентичны и для решения сопряженной задачи могут быть использованы процедуры, применяемые при интегрировании основной задачи.

Часто при решении задач переноса пассивной примеси полезными оказываются так называемые TVD аппроксимации [7]. В силу того, что аппроксимация диффузионных членов не претерпевает изменений, продемонстрируем особенности построения TVD схем для сопряженной задачи на следующем одномерном уравнении. Пусть имеем

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (4.3)$$

где  $F = UC$  — поток вещества,  $U$  — скорость переноса.

Аппроксимация (4.3) имеет вид

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x}. \quad (4.4)$$



Рис. 1. Концентрация взвешенного вещества 16 октября 2015 года (<https://earthdata.nasa.gov/labs/worldview/>)

Схема направленных разностей получается при аппроксимации потоков вида

$$F_{i+1/2}^G = \begin{cases} U_{i+1/2} C_i, & U_{i+1/2} \geq 0, \\ U_{i+1/2} C_{i+1}, & U_{i+1/2} < 0, \end{cases}$$

а схема Лакса–Вендраффа при

$$F_{i+1/2}^L = U_{i+1/2} \left[ \frac{C_{i+1} C_i}{2} - \frac{\lambda_{i+1/2}}{2} (C_{i+1} - C_i) \right], \quad (4.5)$$

где  $\lambda_{i+1/2} = \frac{U_{i+1/2} \Delta t}{\Delta x}$  — число Куранта.

Для решения (4.3) строится TVD схема, в которой используется комбинация этих двух схем

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^G + \psi(C) * (F_{i+1/2}^L - F_{i+1/2}^G), \quad (4.6)$$

где  $\psi(C)$  — весовой множитель, зависящий от решения, определяемый из условия TVD [7].

Можно показать, что оба предельных случая являются согласованным с соответствующими аппроксимациями при решении основной задачи.

## 5. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились с моделью [8] для акватории Азовского моря.

Для тестирования вариационного алгоритма идентификации мощности источника в заливе Казантип был проведен расчет на установление модельного поля течений с постоянным ветром 10 м/с восточного направления. Полученные поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии использовались в качестве входных параметров при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок 10 сут. При этом шаг по времени  $\Delta t = 240$  с, шаг по пространству  $\Delta x = 0,78$  км,  $\Delta y = 1,125$  км. По вертикали в модели используется расчетная сетка в  $\sigma$  — координатах с 15-ю горизонтами. На рис. 1 представлен снимок поверхности Азовского моря, из которого по концентрации взвешенного вещества можно судить о динамических процессах.

По направлению распространения продуктов горения от источников на суше можно определить направление ветра. Восточный ветер наблюдался в течение нескольких суток. При таком ветровом воздействии от точечного источника, расположенного у косы Долгой, распространение пассивной примеси изображено на рис. 2. Сравнивая результат моделирования с данными, полученными с искусственного спутника Земли, можно судить об адекватном описании моделью динамических процессов происходящих в Азовском море.

В результате интегрирования сопряженной модели переноса были построены функции влияния начальных данных на суммарную концентрацию  $\bar{C}$  в области  $\Omega$ , прилегающей к Керченскому проливу (рис. 3) и

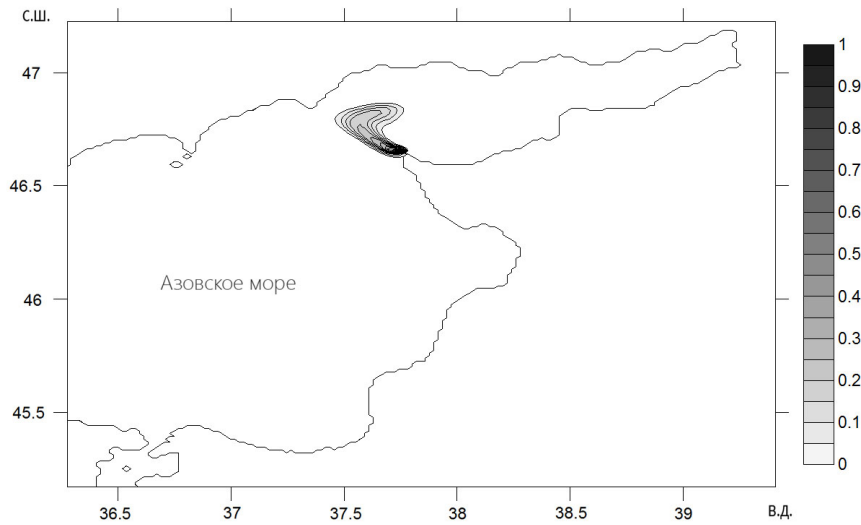


Рис. 2. Распространение примеси от точечного источника

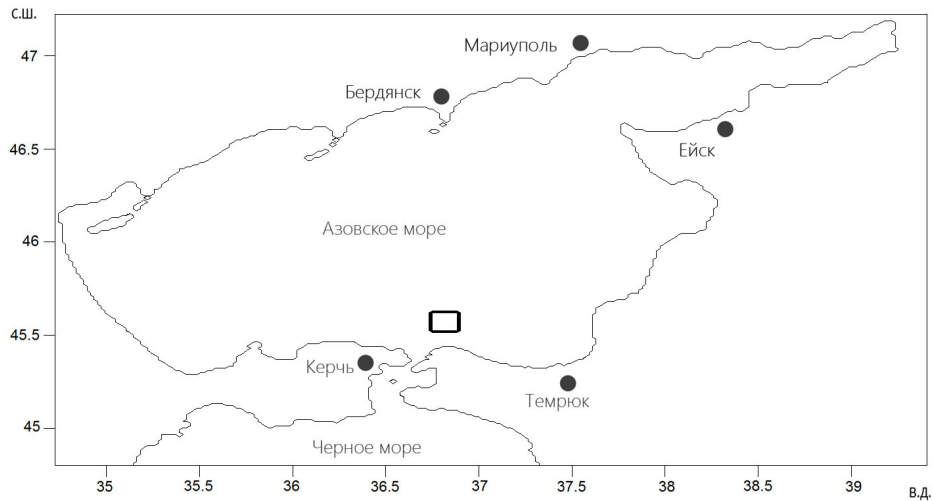


Рис. 3. Область  $\Omega$  в районе Керченского пролива

расположенной в районе интенсивного судоходства. В результате при северном ветре на суммарную концентрацию  $\bar{C}$  в  $\Omega$  в основном оказывают влияние область Керченского пролива и порта Темрюк. Известно, что в данном районе преобладают северо-восточные ветры. При таком ветровом воздействии основное влияние на  $\bar{C}$  в  $\Omega$  оказывает акватория порта Темрюк (рис. 4).

При восточных и юго-восточных ветрах основное влияние на  $\bar{C}$  в  $\Omega$  оказывает область прохождения судов мористее Керченского пролива. При южном ветре суммарная концентрация в указанной области фактически определяется областью прохождения судов, а при юго-западных ветрах начинают оказывать основное влияние сам Керченский пролив с портом Керчь и Азовское побережье

Керченского полуострова, которое наряду с Казантипским заливом влияют на  $\bar{C}$  в  $\Omega$  при западных ветровом воздействии. При северо-западных ветрах на  $\bar{C}$  в  $\Omega$  существенное влияние оказывает область, примыкающая к выходу из Керченского пролива в Азовском море. Таким образом, на основе решения сопряженных задач и построения функций влияния появляется возможность оценки влияния различных источников загрязнений на интересующий район. Такая информация может оказаться полезной при принятии решений с целью оптимизации антропогенной нагрузки на экосистему Азово-Черноморского бассейна.

На рис. 5 представлена область в Казантипском заливе, в котором задается переменное по пространству значение  $Q_B$ . При этом максимальное значение  $Q_B^{\max} = -1$  достига-

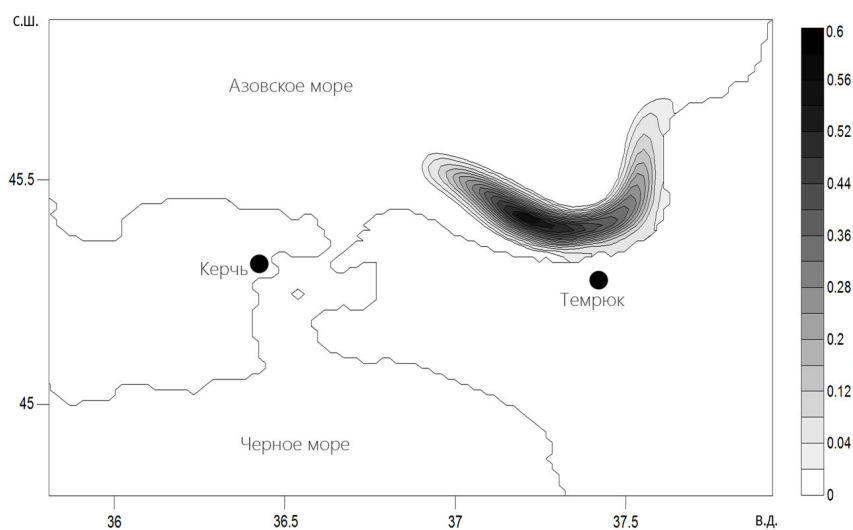
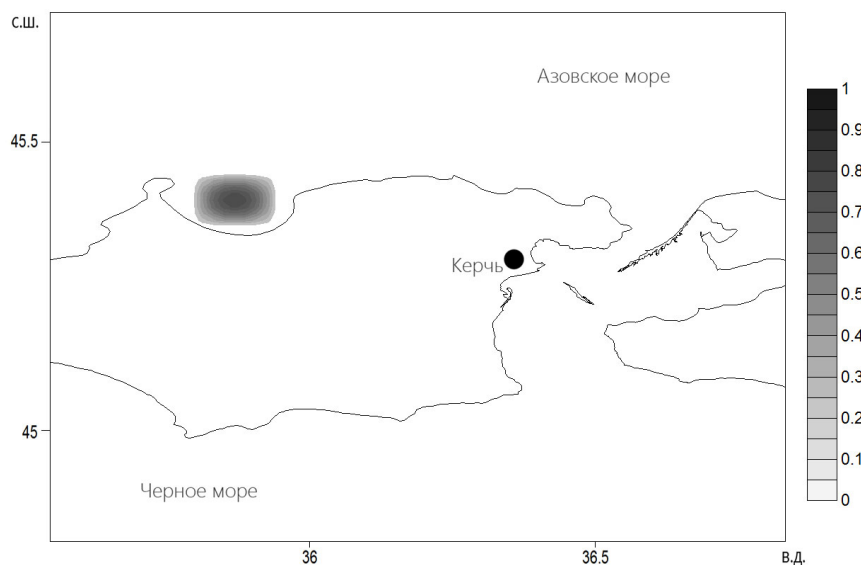


Рис. 4. Функция влияния при северо-восточном ветре

Рис. 5. Область  $\Omega$  и абсолютное значение мощности источника  $Q_B$ 

ется в центральной части области. В качестве данных измерений использовался результат моделирования распространения пассивной примеси при восточном ветровом воздействии и указанном переменном по пространству потоке вещества на дне Казантипского залива.

На рис. 6 представлен поток  $Q_B$  на двадцатой итерации работы алгоритма идентификации. В процессе итераций получается хорошее соответствие найденного  $Q_B$  первоначально заданному. Используемый алгоритм позволяет восстанавливать пространственную структуру потока вещества. В данной работе без ограничения общности рассматривается величина  $Q_B$ . Понятно, что  $C_{\text{изм}}$  может не принадлежать одному моменту

времени  $T$ , а относиться к различным моментам времени  $t \in [0, T]$ .

В соответствии с [4] модель в данном алгоритме выступает в роли пространственно-временного интерполянта, поэтому главное, чтобы общего количества информации было достаточно для сходимости итерационного процесса. Наиболее информативными точками измерений являются измерения, расположенные в области максимальных значений поля концентрации и районах обладающих существенной информационной связью с  $\Omega$ , которые можно определить по функциям влияния на основе решения соответствующих сопряженных задач.

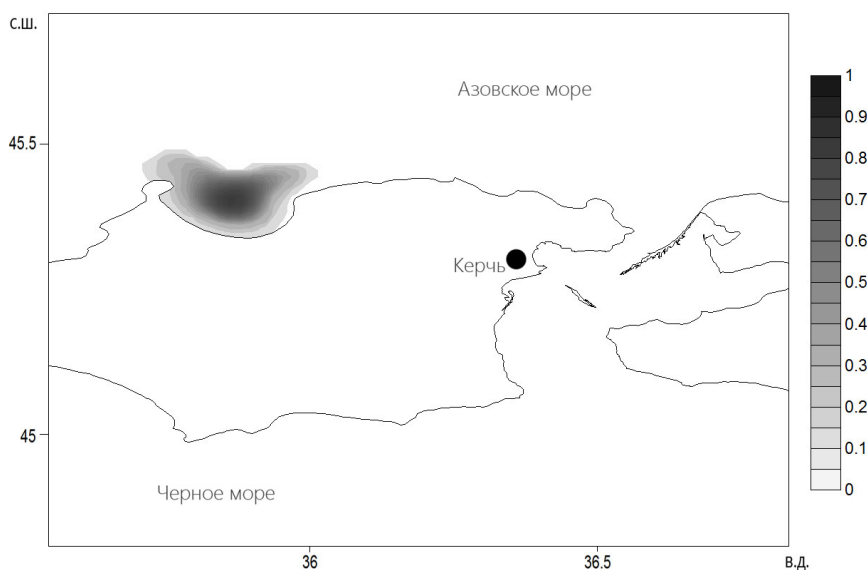


Рис. 6. Абсолютное значение мощности источника  $Q_B$  на двадцатой итерации

В целом проведенные численные эксперименты показали надежную работу вариационного алгоритма идентификации мощности источника загрязнения применительно к модели переноса пассивной примеси в Азовском море. Подход, основанный на интегрировании сопряженных уравнений, может быть применен при решении различных задач экологической направленности. Он позволяет определять зоны влияния начальных полей и источников загрязнений на поле концентрации исследуемой примеси в интересующем нас районе. Ввиду большого объема информации, имеющегося в трехмерных полях скоростей и коэффициентов, умозрительные заключения о возможных источниках загрязнений весьма затруднительны. При использовании сопряженных уравнений удастся точно проследить все изменения в полях и указать возможные районы формирования исследуемой примеси.

### Литература

1. *Malanotte-Rizzoli P., Holland W.R.* Data constraints applied to models of the ocean general circulation. Part II: The Transient, Eddy-Resolving Case // *Journal of Physical Oceanography*. 1988. Vol. 18. Iss. 8. P. 1093–1107.
2. *Yu L., O'Brien J.J.* Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile // *J. of Phys. Oceanogr.* 1991. Vol. 21. P. 709–719.
3. *Марчук Г.И.* Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана // *Метеорология и гидрология*. 1974. № 2. С. 17–34.
4. *Пененко В.В.* Методы численного моделирова-

ния атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 350 с.

5. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
6. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. 238 с.
7. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. of Comp. Phys.* 1983. Vol. 49. Iss. 3, pp. 353–393. doi:10.1016/0021-9991(83)90136-5
8. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.

### References

1. *Malanotte-Rizzoli P., Holland W.R.* Data constraints applied to models of the ocean general circulation. Part II: The Transient, Eddy-Resolving Case. *Journal of Physical Oceanography*, 1988, vol. 18, iss. 8, pp. 1093–1107.
2. *Yu L., O'Brien J.J.* Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile. *J. of Phys. Oceanogr.*, 1991, vol. 21, pp. 709–719.
3. *Marchuk G.I.* Osnovnyye i sopryazhennyye uravneniya dinamiki atmosfery i okeana [Basic and conjugate equations of dynamics of atmosphere and ocean]. *Meteorologiya i gidrologiya* [Meteorology and hydrology], 1974, no. 2, pp. 17–34. (In Russian)
4. *Penenko V.V.* *Metody chislenogo modelirovaniya atmosferynykh protsessov* [Methods for numerical



- modeling of atmospheric processes]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1981, 350 p. (In Russian)
5. Marchuk G.I. *Matematicheskoye modelirovaniye v probleme okruzhayushchey sredy* [Mathematical modeling in the environmental problem]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 320 p. (In Russian)
  6. Eremyev V.N.. Kochergin V.P.. Kochergin S.V.. Sklyar S.N. *Matematicheskoye modelirovaniye gidrodinamiki glubokovdnykh basseynov* [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins]. Sevastopol, EKOSI-Gidrofizika Publ., 2002, 238 p. (In Russian)
  7. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. of Comput. Phys.*, 1983, vol. 49, iss. 3, pp. 353–393. doi:10.1016/0021-9991(83)90136-5
  8. Ivanov V.A.. Fomin V.V. *Matematicheskoye modelirovaniye dinamicheskikh protsessov v zone more – susha* [Mathematical modeling of dynamic processes in the zone of the sea – drying]. Sevastopol, EKOSI-gidrofizika Publ., 2008, 363 p. (In Russian)

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2016

© Кочергин В. С., Кочергин С. В., 2016

Статья поступила 18 августа 2016 г.