

УДК 004.942

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ, ОСРЕДНЕННОЙ ПО ТОНКОМУ СЛОЮ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Сахарова Л. В.

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF THERMAL CONVECTION,  
AVERAGED OVER A THIN LAYER OF THE EVAPORATING LIQUID

Sakharova L. V.

Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, 344007, Russia  
e-mail: L\_Sakharova@mail.ru

*Abstract.* We obtain some types of self-similar substitutions for thermal convection problem, averaged over a thin layer, extended wave case. The problem is the asymptotic model of dry non-viscous, no temperature wire drops and is averaging approach Oberbeck–Boussinesq on a thin layer of an evaporating liquid. The problem is the use of simulation in modern processes involving heat and mass transfer processes: in medical diagnosis, pharmacological studies, crystallography, printing, etc. For the construction of self-similar solutions of the original problem moves to the Riemann invariants. To the resulting problem characteristic relations that determine the self-substitution were obtained. These substitutions allowed to reduce the dimension of the problem and reduce it to a system of ordinary differential equations (ODE). Built ODE solutions – self-similar solution of the problem of thermal convection for extended drops that determine height drops by osredennuyu toschine mass transfer rate and heat flux as a function of time and location. Established the applicability of the self-similar solutions to the simulation of different situations: the evaporation of the droplet and its condensation, pinning, ie, securing the borders of three-phase contact on a rough surface, and depinning, ie her separation; different geometric configurations drop at the initial time. Built similar solution exponential type describes a situation where the liquid layer thickness decreases exponentially (evaporation) or increases (condensing) with time for a given law. In particular, the rate of decrease (increase) may be determined by the flow of fluid through a fixed boundary phase contact (drain). The resulting solution of traveling wave type corresponds to the case when the liquid is drying up direction of the external mechanical action, causing fluid flow at a constant rate.

*Keywords:* mathematical model, similar solutions, drop, evaporation – condensation

### Введение

Исследование процессов тепло- и массопереноса при испарении – конденсации капель жидкостей имеет важное применение во множестве современных технологий: медицинской диагностике [1, 2] и фармакологических исследованиях (High-throughput Drug Screening – HTS) [3], кристаллографии белка [4], для растягивания ДНК и РНК [5], полиграфии [6], создании структурированных поверхностей [7], кристаллографии [8], производстве наноструктур [9], микроматриц (microarray technology), в том числе однокристалльных лабораторий (labs-on-a-chip) [10]. Важной областью исследования физических процессов, протекающих при испарении ка-

пель, включающих микро- и наночастицы, является самосборка наночастиц в однослойные упорядоченные суперрешетки (evaporation-induced self-assembly (EISA) или evaporation driven self-assembly (EDSA)) [11], а также так называемый эффект «кофейных колец» (coffee ring effect), являющийся серьезной проблемой для разработчиков струйных принтеров [12–15].

Исследование механизмов испарения-конденсации и поиск путей управления ими является важной задачей математического моделирования современных технологий, основанных на испарении капель и пленок различных жидкостей. В связи с этим в последние годы разработано большое количество моделей, описывающих процессы массопере-

носа при высыхании капель жидкостей. Для математического моделирования процессов в испаряющейся капле применяются различные подходы. Как правило, авторы рассматривают (без детального вывода уравнений модели) те или иные следствия системы уравнений Навье–Стокса, а также популярный в настоящее время метод осреднения трехмерных задач по высоте пленки либо капли испаряющейся жидкости [16–20].

Несмотря на существенные успехи при моделировании конкретных ситуаций в физике, медицине и биологии, проблемой подхода в указанных работах является потребность во множестве локальных предположений, а также преимущественно численный подход к исследованию получающихся начально-краевых задач. Модели позволяют решить конкретные практические задачи методами математической физики, однако не обладают достаточно высоким уровнем общности. Для каждой конкретной задачи принимаются многочисленные упрощающие предположения, основанные на экспериментальных данных и формулах, полученных эмпирическим путем. Процесс осреднения, используемый в перечисленных работах, также проводится на основе упрощающих предположений и при отсутствии четких математических обоснований.

В работе [21] разработан универсальный математический аппарат для исследования процессов тепло- и массопереноса в испаряющихся каплях и жидкостях. Осуществлено математически корректное построение приближения Обербека–Буссинеска, наиболее часто используемого для описания гравитационной конвекции в жидкости. Введен в рассмотрение оператор осреднения, на основании свойств которого осуществлено осреднение и замыкание приближения Обербека–Буссинеска. Построен ряд математически корректных универсальных моделей. Наиболее значимой является задача тепловой конвекции, осредненная по тонкому слою испаряющейся жидкости. Установлено, что сингулярность на границе трехфазного контакта является мнимой. Получен ряд асимптотических универсальных моделей, в том числе для описания невязкой и (или) нетемпературопроводной капли

$$h_t + \operatorname{div}(h^2 \mathbf{s}) = -V_0 \phi; \quad (1)$$

$$s_t - \frac{2}{3} h \mathbf{s} \operatorname{div} \mathbf{s} + \frac{4}{3} h \mathbf{s} \nabla \mathbf{s} = 0; \quad (2)$$

$$\phi_t - \frac{2}{3} h \phi \operatorname{div} \mathbf{s} + \frac{4}{3} h \mathbf{s} \nabla \phi = 0; \quad (3)$$

$$c_t + h \mathbf{s} \nabla c = D \Delta c. \quad (4)$$

Здесь  $h$  — переменная во времени высота капли, зависящая от координат;  $\mathbf{s}$ ,  $\phi$  и  $c$  — осредненные по толщине капли скорость массопереноса, тепловой поток и концентрация твердой примеси в капле. Величина  $V_0$  — безразмерный параметр, характеризующий скорость переноса массы через межфазную границу.

В работе осуществлено решение задачи (1)–(3) методом характеристик в сочетании с численными методами для вращательно-симметричной капли. Установлено, что для заданных параметров характер поведения капли сильно зависит от времени. Если в начальный момент времени профиль близок к линейному, то с течением времени от принимает нелинейный вид и наблюдается опрокидывание профиля. Существенный интерес представляет получение аналитических решений для задачи (1)–(3) в общем случае, в первую очередь, ее автомодельных решений [22–24].

Ряд автомодельных решений задачи получен в настоящей работе. Для их построения выполнен переход к инвариантам Римана, что позволило получить для системы уравнений (1)–(3) три типа замен, понижающих размерность системы и сводящих ее к системам ОДУ. Для полученных систем ОДУ найдены различные аналитические решения, определяющие высоту капли  $h$ , осредненные по толщине капли скорость массопереноса  $\mathbf{s}$  и тепловой поток  $\phi$  как функции времени  $x$  и координаты  $t$ . Классификация типов построенных решений осуществлена на основании поведения функции  $h$ , описывающей поведение поверхности капли в процессе испарения-конденсации. Установлена область применения различных автомодельных решений к моделированию различных ситуаций: испарение либо конденсация, пиннинг (закрепление границы трехфазного контакта, вызванное шероховатостью основания) либо депиннинг (отрыв границы на идеально гладком основании, на котором лежит капля), различная форма поверхности капли (линейная, выпуклая, вогнутая) и т.п. Кроме того, получено автомодельное решение, включающее экспоненциальную зависимость от времени.

Оно позволяет описывать как конденсацию, так и испарение капли в различных условиях: при высыхании тонкой пленки, распределенной неравномерным слоем между двумя твердыми стенками; в условиях протекания жидкости через границу трехфазного контакта, что соответствует случаю высыхания капли в условиях дренажа границы. Наконец, построенное решение типа бегущей волны описывает высыхание капли в условиях внешнего направленного механического воздействия.

**1. Задача для протяженной волны в инвариантах Римана и определяющие соотношения для автомоделных замен**

Будем рассматривать одномерный случай задачи тепловой конвекции (1)–(3), являющийся моделью протяженной капли

$$h_t + 2hsh_x + h^2s_x = -V_0\phi; \quad (1.1)$$

$$s_t + 2/3hss_x = 0; \quad (1.2)$$

$$\phi_t - 2/3h\phi s_x + 4/3hs\phi_x = 0. \quad (1.3)$$

Осуществим переход к инвариантам Римана  $R, P, Q$ , в результате чего система (1.1)–(1.3) приобретет следующий вид:

$$R_t + 2RP^{1/4}R_x = -V_0PQ; \quad (1.4)$$

$$P_t + 2/3RP^{1/4}P_x = 0; \quad (1.5)$$

$$Q_t + 4/3RP^{1/4}Q_x = 0. \quad (1.6)$$

Связь между старыми и новыми переменными выражается формулами

$$R = hs^{3/4}; \quad P = s; \quad Q = \frac{\phi}{s}, \quad (1.7)$$

или

$$h = RP^{-3/4}; \quad s = P; \quad \phi = QP. \quad (1.8)$$

Для построения автомоделных замен введем в рассмотрение следующие подстановки

$$R = \alpha\bar{R}, \quad P = \beta\bar{P}, \quad Q = \gamma\bar{Q}, \\ t = \delta\bar{t}, \quad x = \varepsilon\bar{x}, \quad (1.9)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  — параметры. Неизменность системы (1.4)–(1.6) при подстановке в нее (1.9)

обеспечивается выполнением следующих равенств:

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha^2\beta^{1/4}}{\varepsilon} = \beta\gamma; \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha\beta^{5/4}}{\varepsilon}; \\ \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\beta^{1/4}\gamma}{\varepsilon}. \quad (1.10)$$

Как следствие (1.10) получим два определяющих соотношения для системы

$$\delta = \varepsilon/\alpha\beta^{1/4}, \quad \alpha = \beta\gamma\delta. \quad (1.11)$$

Рассмотрим основные типы автомоделных замен, вытекающих из (1.11), а также соответствующие им решения исходной задачи (1.1)–(1.3).

**2. Автомоделная замена 1 и соответствующие ей решения**

Пусть  $\alpha = \beta = 1$ . Тогда из (1.11) следует, что  $\delta = \varepsilon, \gamma = 1/\delta$ . На основании данных связей между параметрами получим автомоделные замены

$$x/t = z, \quad Qt = u, \quad (2.1)$$

где  $u$  и  $t$  — новые переменные, Применение (2.1) к задаче (1.4)–(1.6) сводит ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$R_z (2RP^{1/4} - z) = -V_0Pu; \quad (2.2)$$

$$P_z (2/3RP^{1/4} - z) = 0; \quad (2.3)$$

$$-u + u_z (-z + 4/3RP^{1/4}) = 0. \quad (2.4)$$

Система (2.2)–(2.4) имеет два решения, определяемых уравнением (2.3). Найдем каждое из них и рассмотрим по отдельности.

**Решение 1.1.** Пусть, в соответствии с (2.3),

$$RP^{1/4} = 3/2z. \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в уравнения (2.2) и (2.4) позволяет получить решение системы (2.2)–(2.4) в инвариантах Римана

$$R = (C_2 - 81/32C_1V_0z^5)^{1/5}, \quad (2.6)$$

$$P = 81/16z^4 (C_2 - 81/32C_1V_0z^5)^{-4/5}, \quad (2.7)$$

$$Q = C_1z/t, \quad (2.8)$$

где  $C_1, C_2$  — константы интегрирования. Вернемся от инвариантов к обычным переменным (1.8) и на основании формул (2.6)–(2.8)

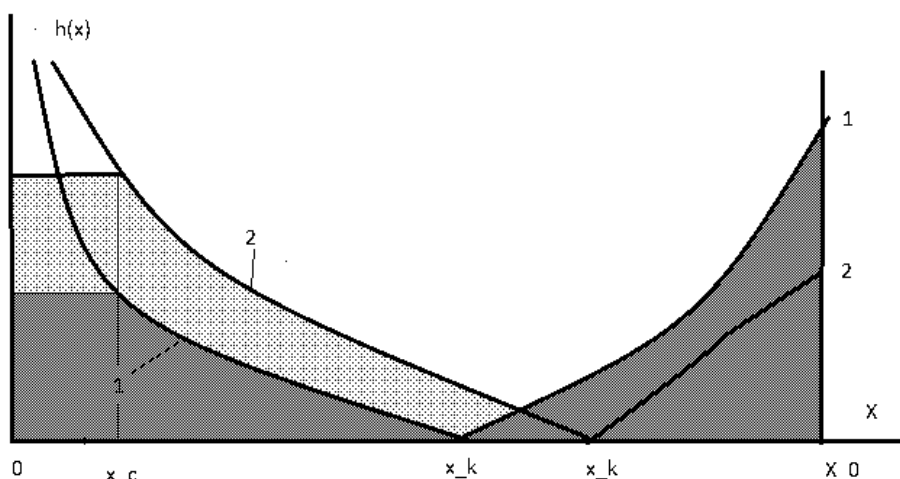


Рис. 1. Поверхность капли, описываемая решением (2.9)–(2.11),  $C_1, C_2 > 0$  ( $V_0 > 0$ ),  $x_k$  — точка трехфазного контакта. Левая область — конденсация капли;  $x = 0$  — жесткая стенка, к которой примыкает капля. Правая область — испарение;  $x = x_0$  — жесткая стенка. Кривые (1) и (2) соответствуют различным моментам времени  $t_1 < t_2$

получим автомодельное решение исходной системы (1.1)–(1.3)

$$h = \frac{8}{27tx^3} \left( C_2 t^5 - \frac{81}{16} C_1 V_0 x^5 \right)^{4/5}, \quad (2.9)$$

$$s = \frac{81}{16} x^4 \left( C_2 t^5 - \frac{81}{16} C_1 V_0 x^5 \right)^{-4/5}, \quad (2.10)$$

$$\phi = \frac{81}{16} C_1 \frac{x^5}{t^2} \left( C_2 t^5 - \frac{81}{16} C_1 V_0 x^5 \right)^{-4/5}. \quad (2.11)$$

Функция  $s$  непрерывна при  $x = 0$  и  $t = 0$ . Функция  $\phi$  имеет разрыв при  $t = 0$ ,  $h$  имеет разрывы и при  $x = 0$ , и при  $t = 0$ , что указывает на невозможность использования автомодельного решения на границе  $x = 0$ .

Функция  $h$  ведет себя по-разному в зависимости от знаков констант  $C_1, C_2$ . Пусть  $C_1, C_2 > 0$  ( $V_0 > 0$ ). Из (2.9) видно, что  $h$  обращается в ноль при  $x_k = 2/3 \sqrt[5]{3C_2/2V_0 C_1 t}$ . Значение  $x_k$ , соответствующее краю капли, увеличивается с возрастанием  $t$ . Если  $0 < x < x_k$ , то  $h'_x < 0$ ,  $h'_t > 0$ , то есть функция убывает по  $x$  и возрастает  $t$  (конденсация); если  $x > x_k$ , то  $h'_x > 0$ ,  $h'_t < 0$ , то есть имеет место возрастание функции по  $x$  и убывание по  $t$  (испарение).

Таким образом, решение (2.9)–(2.11) может быть использовано для описания испаряющейся капли, если в качестве начального момента времени положить  $t = t_0 > 0$ . При

этом предполагается, что «край» капли (стенка, к которой примыкает капля) находится в некоторой точке  $x = x_0 > x_k$ . Тогда определить константы  $C_1, C_2$  можно, например, задавая значения  $h(x_0) = h_0$ ,  $s(x_0) = s_0$  при  $t = t_0$ . Если же в качестве левого края капли взять точку  $x = 0$ , то формулы (2.9)–(2.11), определяющие конденсацию капли, нельзя использовать целиком из-за сингулярности. Необходимо использовать сшивку (2.9)–(2.11) с каким-либо удобным решением, например, константой (рис. 1).

Соотношения между  $C_1, C_2$  и вновь введенной константой можно получить, например, из начальных условий  $h(0, t_0) = h_0$ ,  $s(0, t_0) = s_0$ ,  $\varphi(0, t_0) = \varphi_0$ .

**Вывод 1.1.** Решение 1.1 при  $C_1, C_2 > 0$ , определяемое формулами (2.9)–(2.11), в различных областях задания может быть использовано для описания как конденсирующейся, так и испаряющейся капли.

Если же  $C_1, C_2 < 0$ , то из формул (2.9)–(2.11) следует: если  $x < x_k$ , то  $h'_x > 0$ ,  $h'_t < 0$ , то есть капля испаряется; если же  $x > x_k$ , то  $h'_x < 0$ ,  $h'_t > 0$ , капля конденсируется. Если  $C_1 > 0, C_2 < 0$  либо  $C_1 < 0, C_2 > 0$ , то подкоренная функция в ноль не обращается и решение описывает испарение пленки, распределенной неравномерным слоем между двумя стенками.

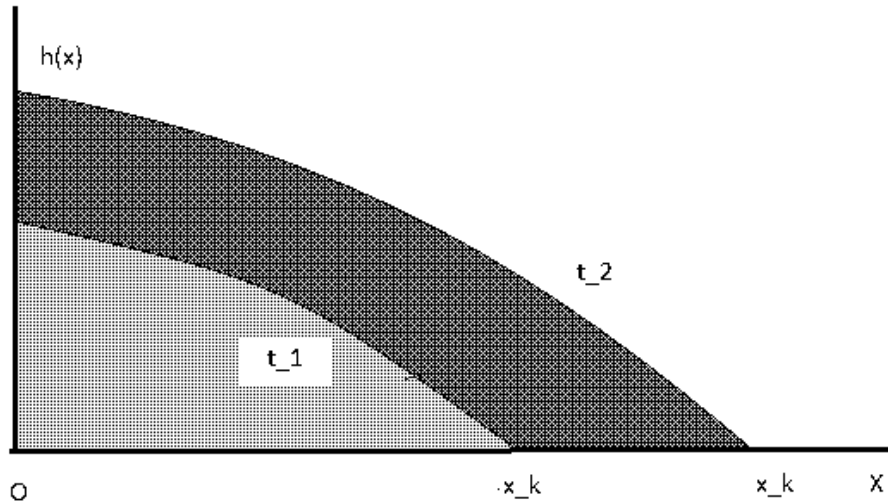


Рис. 2. Поверхность капли, описываемая решением (2.14)–(2.16), конденсация,  $D_1 > 0$ ,  $R_0 > 0$ ;  $x = 0$  — жесткая стенка, к которой примыкает капля,  $x = x_k$  — точка трехфазного контакта. Линии соответствуют различным моментам времени  $t_1 < t_2$

**Решение 1.2.** Теперь рассмотрим второе решение уравнения (2.3), соответствующее  $P_z = 0$ :  $P = D_1^4$ , где  $D_1$  — константа интегрирования. Тогда оставшиеся уравнения системы преобразуются к виду

$$R_z(2RD_1 - z) = -V_0D_1^4u, \quad (2.12)$$

$$-u + u_z(-z + 4/3RD_1) = 0. \quad (2.13)$$

Система ОДУ (2.12)–(2.13) не имеет аналитических решений, однако допускает построение асимптотического решения в виде рядов. На его основе получим асимптотическое автономное решение исходной системы (1.1)–(1.3)

$$s = D_1^4, \quad (2.14)$$

$$\phi = \frac{D_1^4}{t} \left( u_0 + \frac{3u_0}{4R_0D_1} \frac{x}{t} + \frac{9}{8}R_0^{-2}D_1^{-2} \left( u_0 + \frac{V_0D_1^4u_0}{3R_0} \right) \frac{x^2}{t^2} \right), \quad (2.15)$$

$$h - \left( R_0 + \frac{2D_1^4V_0}{R_1} \right) = -2V_0D_1^2u_0R_1 \left( \frac{x}{t} + \frac{D_1R_0}{R_1} \right)^2, \quad (2.16)$$

$$R_1 = 5R_0 + 2V_0D_1^4u_0.$$

Как следует из (2.16), по смыслу задачи должно выполняться условие  $D_1R_0 > 0$ .

Будем для определенности считать, что  $D_1 > 0$ ,  $R_0 > 0$ . Парабола (2.16) имеет вершину в точке  $B(-tD_1R_0/R_1; t^2(R_0 + 2D_1^4V_0/R_1))$  и пересечения с осью  $OX$  в точках

$$x_k = t/R_1 \left( -D_1R_0 \pm \sqrt{\frac{R_0R_1 + 2V_0D_1^4}{V_0D_1^2u_0}} \right).$$

**Вывод 1.2.** Таким образом, с течением времени высота капли, описываемой Решением 1.2, заданным формулами (2.14)–(2.16), возрастает. Следовательно, автономное Решение 1.2 соответствует конденсации капли (рис. 2). Однако ценность данного автономного решения существенно снижена по двум причинам: 1) величина  $s$  постоянна; 2) построенное параболическое решение является асимптотическим, в то время как исходное решение представимо в виде рядов.

Неизвестные константы  $u_0$  и  $R_0$  могут быть найдены, например, из задания углов смачивания в начальный момент времени  $t = t_0 > 0$  точках  $x = 0$  и  $x = x_k$

$$h'_x(x = 0) = \text{tg } \alpha_1, \quad h'_x(x = x_k) = \text{tg } \alpha_2.$$

### 3. Автономная замена 2 и соответствующие ей решения

Пусть  $\beta = \gamma = 1$ . Тогда из (1.11) следует, что  $\delta = \alpha$ ,  $\varepsilon = \delta^2$ . Следовательно, применимы

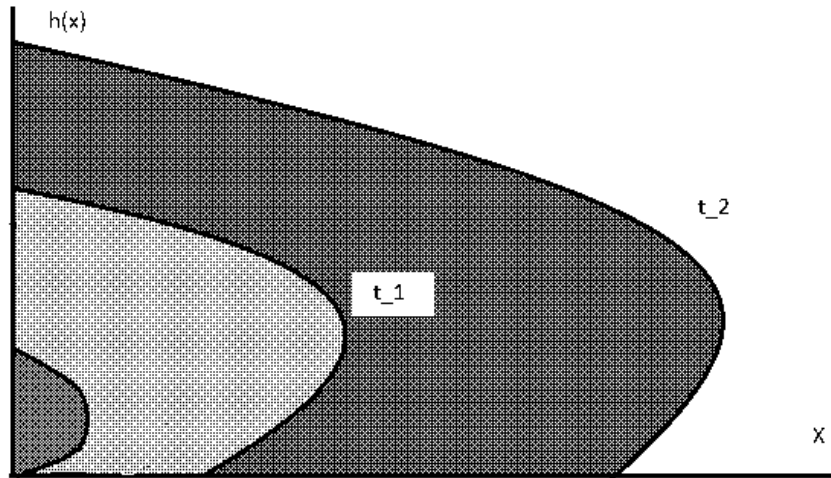


Рис. 3. Поверхность капли, описываемая решением (3.9)–(3.11), конденсация капли на вертикальной стенке. Линии соответствуют различным моментам времени  $t_1 < t_2$

автомодельные замены

$$z = x/t^2, \quad R = tV, \quad (3.1)$$

приводящие систему (1.4)–(1.6) к виду

$$V + 2V_z \left( -z + VP^{1/4} \right) = -V_0PQ; \quad (3.2)$$

$$P_z \left( -2z + 2/3VP^{1/4} \right) = 0; \quad (3.3)$$

$$Q_z \left( -2z + 4/3VP^{1/4} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Из уравнения (3.3) следует, что

$$P_z = 0 \quad (3.5)$$

или

$$VP^{1/4} = 3z, \quad (3.6)$$

а из уравнения (3.4) — что

$$Q_z = 0 \quad (3.7)$$

либо

$$VP^{1/4} = 3/2z. \quad (3.8)$$

Рассмотрим решения системы (3.2)–(3.4), соответствующие различным комбинациям (3.5)–(3.8).

**Решение 2.1.** Пусть выполняются (3.5) и (3.7). Тогда на основании системы (3.2)–(3.4)

может быть получено автомодельное решение исходной системы (1.1)–(1.3)

$$x + t^2 (V_0P_1^5Q_1 + P_1/V_1) = P_1V_1 (hP_1^3 + t(V_0P_1^4Q_1 + 1/V_1))^2, \quad (3.9)$$

$$s = P_1^4, \quad (3.10)$$

$$\phi = Q_1P_1^4, \quad (3.11)$$

где  $P_1, Q_1, V_1$  — константы (рис. 3).

Кривая (3.9) есть парабола с вершиной в точке  $B(-t^2P_1K; -Kt/P_1^3)$ , где  $K = (V_0P_1^5Q_1 + 1)/V_1$ , и пересечением с осью  $OX$  в точке  $C(t^2P_1^6KV_0Q_1; 0)$ . Если  $P_1K < 0$ , то вершина параболы расположена в первой координатной четверти, а ветви повернуты влево. В соответствии с (3.9) в начальный момент времени  $t = 0$  получим параболу с вершиной в начале координат:  $t = 0, x = P_1^7V_1h^2$ . При увеличении времени вершина смещается вправо и вверх. Таким образом, высота капли увеличивается и наблюдается «опрокидывание» профиля капли.

**Вывод 2.1.** Решение 2.1, определяемое формулами (3.9)–(3.11), соответствует конденсации капли на стенке, совпадающей с осью ординат.

**Решение 2.2.** Пусть теперь выполняются (3.5) и (3.8),  $P = P_1^4, V = 3z/2P_1$ , где  $P_1$  — константа. В этом случае получим второе

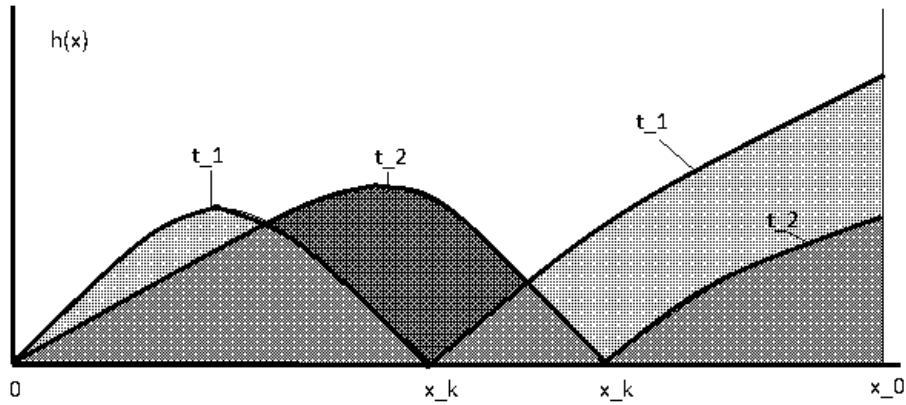


Рис. 4. Поверхность капли, описываемая решением (3.12)–(3.14).  $x_k$  — точка трехфазного контакта. Левая область — конденсация капли;  $x = 0$  — фиксированный левый край капли;  $x = x_k$  — движущийся правый край. Правая область — испарение;  $x = x_0$  — жесткая стенка, к которой примыкает капля. Кривые (1) и (2) соответствуют моментам времени  $t_1 < t_2$

автомоделное решение системы (3.2)–(3.4), определяющее линейный профиль капли

$$h = 3x/2P_1^4 t, \quad s = P_1^4, \quad \phi = -3x/V_0 P_1 t^2.$$

**Решение 2.3.** Пусть теперь выполняются соотношения (3.6) и (3.7),  $Q = Q_1$ ,  $P = 81z^4/V^4$ . Им соответствует следующее автомоделное решение

$$h = \frac{t^{4/5} x^{1/5}}{27} 5^{4/5} \times \left( A_1 t^{21/2} - \frac{27}{7} V_0 Q_1 x^{21/4} \right)^{4/5}, \quad (3.12)$$

$$s = \frac{81x^{4/5}}{t^{9/5}} 5^{-4/5} \times \left( A_1 t^{21/2} - \frac{27}{7} V_0 Q_1 x^{21/4} \right)^{-4/5}, \quad (3.13)$$

$$\phi = Q_1 \frac{81x^{9/5}}{t^{4/5}} 5^{-4/5} \times \left( A_1 t^{21/2} - \frac{27}{7} V_0 Q_1 x^{21/4} \right)^{-4/5}. \quad (3.14)$$

Функция  $h$ , определяемая (3.12), не имеет сингулярностей ни по  $x$ , ни по  $t$ . При фиксированном  $t$  функция имеет пересечения с осью  $OX$  в точках  $x_n = 0$ ,  $x_k = (7A_1/27V_0Q_1)^{4/21} t^2$ .

Максимум функции находится в точке  $x_m = (28A_1/675V_0Q_1)^{4/21} t^2$ , то есть  $0 < x_m < x_k$ . Решение (3.12)–(3.14) может быть использовано в области  $x_0 < x < x_k$  для описания конденсирующейся капли в условиях пиннинга ее левого края, а в области  $x_k < x < x_0$  — для описания испаряющейся капли (рис. 4). Соотношения между константами, входящими в (3.12)–(3.14) можно получить, задавая начальные условия.

**Вывод 2.3.** Решение 2.3, определяемое формулами (3.12)–(3.14), в различных областях задания может быть использовано для описания как конденсации, так и испарения.

#### 4. Автомоделная замена 3 и соответствующие ей решения

Пусть  $\alpha = \gamma = 1$ . Тогда из (1.11) следует, что  $\beta = 1/\delta$ ,  $\varepsilon = \delta^{3/4}$ . Таким образом, применимы автомоделные замены

$$z = x/t^{3/4}, \quad P = W/t, \quad (4.1)$$

где  $z$  и  $W$  — новые неизвестные переменные. Применение формул (4.1) к системе (1.4)–(1.6) приводит ее виду

$$R_z \left( -3/4z + 2RW^{1/4} \right) = -V_0 W Q; \quad (4.2)$$

$$-W + W_z \left( -3/4z + 2/3RW^{1/4} \right) = 0; \quad (4.3)$$

$$Q_z \left( -3/4z + 4/3RW^{1/4} \right) = 0. \quad (4.4)$$

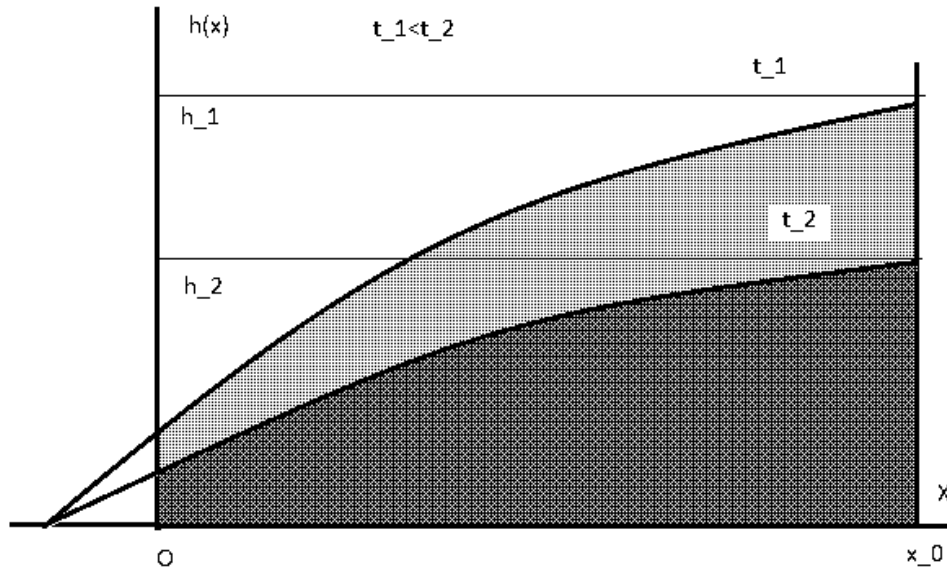


Рис. 5. Поверхность испаряющейся пленки, описываемая решением (5.6)–(5.8). Здесь  $x_k < 0$  — абсцисса пересечения графика с осью ОХ;  $x = 0$  и  $x = x_0$  соответствуют стенкам, к которой примыкает капля

Из (4.4) следует, что

$$Q_z = 0, \quad (4.5)$$

или

$$RW^{1/4} = 9/16z. \quad (4.6)$$

Система (4.2)–(4.4) имеет два решения, определяемых уравнениями (4.5) и (4.6).

**Решение 3.1.** Случаю (4.6) соответствует автомодельное решение системы

$$h = \frac{9x}{16B_1} \exp\left(\frac{4x^2}{3\sqrt{t^3}}\right), \quad (4.7)$$

$$s = \frac{B_1}{t} \exp\left(-\frac{4x^2}{3\sqrt{t^3}}\right), \quad (4.8)$$

$$\phi = -\frac{27z}{144B_1^{1/4}V_0t} \times \left(1 + \frac{2x^2}{3\sqrt{t^3}}\right) \exp\left(\frac{x^2}{3\sqrt{t^3}}\right). \quad (4.9)$$

Из формул (4.7)–(4.9) следует, что функция  $h$  возрастает по  $x$ , убывает по  $t$ ;  $s$  — убывает по  $x$  и по  $t$ ;  $\phi$  возрастает по  $x$ , убывает по  $t$ . Константа  $B_1$  может быть найдена из задания, например, угла смачивания при  $x = 0$ .

**Вывод 3.1.** Решение 3.1, определяемое формулами (4.7)–(4.9), соответствует испарению в условиях пиннинга, то есть неподвижной границы трехфазного контакта в точке  $x = 0$ .

**Решение 3.2.** Случай (4.5) означает, что  $Q = A_1$ . Ему соответствует частное решение задачи

$$h = \frac{3}{B^4} x^{1/5} t^{3/5}, \quad s = B^4 \frac{x^{4/5}}{t^{8/5}}, \quad (4.10)$$

$$\phi = -\frac{63}{5V_0B} \frac{x^{4/5}}{t^{8/5}},$$

где  $B$  есть произвольная постоянная.

**Вывод 3.2.** Решение 3.2, определяемое соотношением (4.10), соответствует конденсации капли в условиях пиннинга.

### 5. Экспоненциальное автомодельное решение

Теперь будем разыскивать автомодельное решение задачи (1.1)–(1.3) в виде

$$h = H(x) \exp(\lambda t),$$

$$s = S(x) \exp(-\lambda t), \quad (5.1)$$

$$\phi = \Phi(x) \exp(\lambda t),$$



Подстановка (5.1) в уравнения (1.1)–(1.3) понижает их размерность и приводит к простой системе ОДУ для функций  $H(x)$ ,  $S(x)$ ,  $\Phi(x)$

$$\lambda H + 2HSH'_x + H^2S'_x = -V_0\Phi; \quad (5.2)$$

$$\lambda S + 2/3HSS'_x = 0; \quad (5.3)$$

$$\lambda\Phi'_t - 2/3H\phi S'_x + 4/3H\phi\Phi'_x = 0. \quad (5.4)$$

Ее решение имеет следующий вид:

$$\Phi = \Phi_0, \quad S = \frac{S_0}{\sqrt[5]{(2,5\lambda H + V_0\Phi_0)^6}},$$

$$\frac{2S_0(3\lambda H + V_0\Phi_0)}{\sqrt[5]{(2,5\lambda H + V_0\Phi_0)^6}} = -1,5\lambda x + C,$$

где  $S_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $C$  — константы интегрирования. С учетом (5.1), автомодельное Решение 4 одномерной задачи (1.1)–(1.3) для протяженной капли имеет вид

$$h(x, t) = H(x) \exp(\lambda t), \quad (5.5)$$

где  $H(x)$  есть решение уравнения

$$\frac{2S_0(3\lambda H + V_0\phi_0)}{\sqrt[5]{(2,5\lambda H + V_0\phi_0)^6}} = -1,5\lambda x + C, \quad (5.6)$$

$$s(x, t) = \frac{S_0 \exp(-\lambda t)}{\sqrt[5]{(2,5\lambda H + V_0\phi_0)^6}}, \quad (5.7)$$

$$\phi = \Phi_0 \exp(\lambda t). \quad (5.8)$$

Исходя из физического смысла, для испарения  $\lambda < 0$  (т.е. высота капли уменьшается со временем). Со временем поток тепла  $\phi$  также уменьшается, а скорость массопереноса  $s$ , наоборот, увеличивается. Для конденсации  $\lambda > 0$  (т.е. высота капли увеличивается со временем),  $\phi$  увеличивается, а скорость массопереноса  $s$  уменьшается. Как следует из (5.6), точке пересечения графика с осью  $OX$  ( $h = 0$ ) соответствует абсцисса

$$x_k = 2/3\lambda \left( C - \frac{2S_0}{\lambda \sqrt[5]{V_0\phi_0}} \right).$$

Возможны два случая.

**Случай 1.** Рассматривается жидкость, заполняющая неравномерным слоем пространство от  $x = 0$  до  $x = x_0$  (две стенки).

Соответственно  $x_k < 0$ , константы  $C$  и  $S_0$  могут быть определены, например, из задания высоты капли в начальный момент времени  $t = 0$  при  $x = 0$  и  $x = x_0$ . Вместо одного из указанных условий можно считать, что константа  $\phi_0$  задана в начальный момент времени:  $\phi(0) = \phi_0$ . Полученное решение соответствует испарению пленки, неравномерным слоем расположенной между двумя стенками (рис. 5).

**Случай 2.** Пусть теперь  $x_k > 0$ . Тогда левый край жидкости представляет собой точку трехфазного контакта. Считаем, что на правом крае области  $x = x_0$  в начальный момент времени определено значение  $h$ , а значит, из (5.6) вытекает соотношение для констант. Кроме того, пусть задана константа  $\phi_0$  в начальный момент времени  $\phi(0) = \phi_0$ . Имеем два уравнения для определения трех констант  $C$ ,  $\phi_0$  и  $S_0$ .

Существенно, что при  $x_k$  скорость массопереноса не обращается в ноль

$$s(x_k) = \frac{S_0}{\sqrt[5]{(V_0\phi_0)^6}}.$$

Условие означает протекание жидкости через границу с заданной, экспоненциально возрастающей со временем скоростью (рис. 6)

$$v(t) = s(x_k) \exp(-\lambda t) = \frac{S_0 \exp(-\lambda t)}{\sqrt[5]{(V_0\phi_0)^6}}. \quad (5.9)$$

Условие (5.9) позволяет, во-первых, задать параметр  $\lambda$ , во-вторых, получить третье условие для нахождения констант

$$S_0 = s(x_k) \sqrt[5]{(V_0\phi_0)^6}.$$

**Вывод 4.** Экспоненциальное автомодельное Решение 4, определенное формулами (2.4)–(2.7), может быть использовано для описания как испарения, так и конденсации жидкой пленки в двух случаях: 1) если жидкость расположена неравномерным слоем между двумя твердыми стенками; 2) если на левой границе трехфазного контакта имеет место протекание жидкости с экспоненциально заданной скоростью, то есть имеет место дренаж.

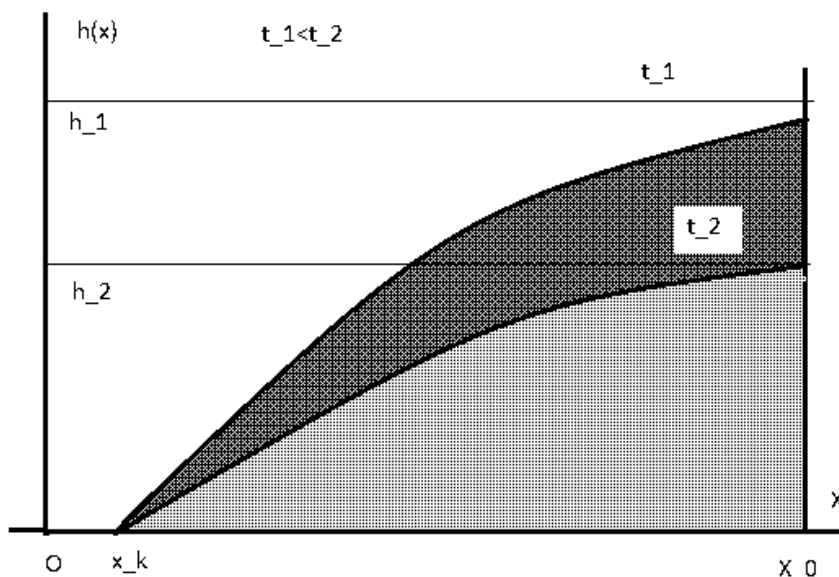


Рис. 6. Поверхность испаряющейся капли в условиях пиннинга, описываемая решением (5.6)–(5.8). Здесь  $x_k > 0$  — точка трехфазного контакта;  $x = x_k$  — жесткая стенка

### 6. Автомоделное решение типа бегущей волны

Будем разыскивать решение системы (1.1)–(1.3) в виде бегущей волны, то есть в зависимости от новой переменной

$$\xi = x - vt. \quad (6.1)$$

В результате подстановки (6.1) система (1.1)–(1.3) сводится к следующему виду

$$h'_\xi(-v + 2hs) + h^2 s'_\xi = -V_0\phi; \quad (6.2)$$

$$s'_\xi(-v + 2/3hs) = 0; \quad (6.3)$$

$$\phi'_\xi(-v + 4/3hs) - 2/3h\phi s'_\xi = 0. \quad (6.4)$$

Как следует из (6.3), возможны два варианта решения.

**Решение 5.** Пусть выполняется первый вариант решения,  $s'_\xi = 0$  или

$$s = S_1 = \text{const}, \quad (6.5)$$

следовательно,

$$h'_\xi(-v + 2hS_1) = -V_0\phi, \quad (6.6)$$

$$\phi'_\xi(-v + 4/3hS_1) = 0, \quad (6.7)$$

и на основании (6.7) также получаем два решения.

**Решение 5.1.** Пусть, согласно уравнению (6.7),  $\phi'_\xi = 0$  или  $\phi = \phi_1$ . Этому случаю соответствует автомоделное решение системы

$$h = \frac{v}{S_1} \pm \sqrt{-\frac{V_0\phi_1}{S_1} \left( x - vt - \frac{v^2 + S_1 C_1}{V_0\phi_1} \right)}, \quad (6.8)$$

$$s = S_1, \quad \phi = \phi_1, \quad (6.9)$$

где константы  $S_1$ ,  $\phi_1$ ,  $C_1$  определяются начальными условиями (рис. 7).

Пусть теперь, на основании (6.7)  $h = 3v/4S_1$ . Тогда, как следует из (6.6),  $\phi = 0$ . С учетом того, что здесь  $s = S_1$ , данное решение состоит из констант и физического интереса не представляет.

**Решение 5.2.** Пусть выполняется второй вариант решения уравнения (6.3),  $v = 2/3hs$ . Ему соответствует автомоделное решение, при котором поверхность капли определяется параболой

$$h = \sqrt{-4V_0\phi_2/v(x - vt + C_2)},$$

$$\phi = \pm \frac{\phi_2}{\sqrt{-4V_0\phi_2/v(x - vt + C_2)}},$$

$$s = \frac{1,5v}{\sqrt{-4V_0\phi_2/v(x - vt + C_2)}},$$

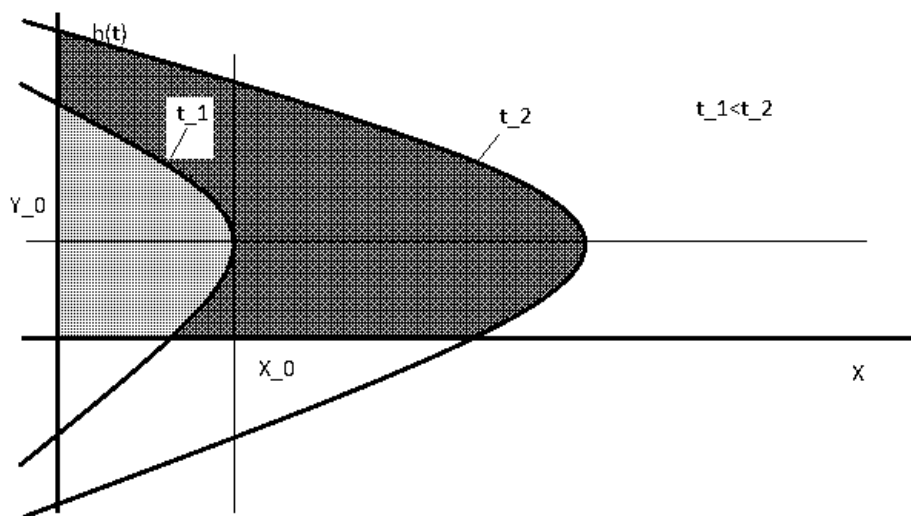


Рис. 7. Поверхность капли, описываемая решением (6.8)-(6.9), зависимость от времени  $t$ ,  $v > 0$ .  
Линии соответствуют различным моментам времени  $t_1 < t_2$ ;

где  $C_2$  — константа интегрирования.

**Вывод.** Решение типа бегущей волны позволяет описать высыхание пленки в условиях внешнего механического воздействия, вызывающего движение жидкости с постоянной скоростью.

### Заключение

Как следует из представленного материала, задача тепловой конвекции обладает большим количеством автомодельных решений, среди которых фигурируют степенные, с экспоненциальной зависимостью от времени, типа бегущей волны и т.д. С помощью подбора констант, соответствующих краевым условиям, данные автомодельные решения можно применять для моделирования различных практических ситуаций: испарение капли и ее конденсация в различных геометрических конфигурациях; пиннинг – депиннинг (в том числе только на одной границе); высыхание капли в условиях внешнего механического воздействия и т.д.

### Литература

1. Гольбрайх Е., Раниц Е.Г., Моисеев С.С. О формировании узора трещины в свободно высыхающей пленке водного раствора белка // Журнал технической физики. 2003. Т. 73. Вып. 10. С. 116–121.
2. Шабалин В.Н., Шатохина С.Н. Морфология биологических жидкостей человека. М.: Хризостом, 2001. 304 с.
3. Ющенко А.А., Даудова А.Д., Аюпова А.К., Урляпова Н.Г., Шатохина С.Н. Способы оценки общетоксического действия лекарственных средств на организм. Пат. РФ 2232387. 2004. Б.И. № 17.
4. Раниц Е. Белок и жизнь (самосборка и симметрия наноструктур белка). Иерусалим; М.: ЗЛ. Милта-ПКП ГИТ, 2002. 257 с.
5. Abramchuk S.S., Khokhlov A.R., Iwataki T., Oana H., Yoshikawa K. Evaporative Self-assembly of Ordered Complex Structures // Europhys. Lett. 2001. Vol. 55. P. 294–300.
6. Harris D.J., Hu H., Conrad J.C., Lewis J.A. Patterning Colloidal Films via Evaporative Lithography // Physical Review Letters. 2007. Vol. 98. No. 14. P. 148301.
7. Xu J., Xia J., Hong S.W. et al. Self-Assembly of Gradient Concentric Rings via Solvent Evaporation from a Capillary Bridge // Physical Review Letters. 2006. Vol. 96, no. 6. P. 066104.
8. Takhistov P., Chang H. Complex Stain Morphologies // Industrial and Engineering Chemistry Research. 2002. Vol. 41, no. 25. P. 6256–6269.
9. Helseth L.E., Fischer T.M. Particle interactions near the contact line in liquid drops // Physical Review E. 2003. Vol. 68. No. 4. P. 042601.
10. Rieger B., van den Doel L.R., van Vliet L.J. Ring formation in nanoliter cups: Quantitative measurements of flow in micromachined wells // Physical Review E. 2003. Vol. 68, no. 3. P. 036312.
11. Bigioni T.P., Lin X.M., Nguyen T.T., Corwin E.I., Witten T.A., Jaeger H.M. Kinetically driven self assembly of highly ordered nanoparticle monolayers // Nature materials.

2006. Vol. 5. No. 4. P. 265–270.
12. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops // *Nature*. 1997. Vol. 389. P. 827–829.
  13. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop // *Physical Review E*. 2000. Vol. 62. P. 756–765.
  14. Govor L.V., Reiter G., Parisi J., Bauer G.H. Self-assembled nanoparticle deposits formed at the contact line of evaporating micrometer-size droplets // *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 69. P. 061609.
  15. Parisse F., Allain C. Shape Changes of Colloidal Suspension Droplets during Drying // *J. Phys. II France*. 1996. Vol. 6. P. 1111–1119.
  16. Maki K.L., Kumar S. Fast Evaporation of Spreading Droplets of Colloidal Suspensions // *Langmuir*. 2011. Vol. 27. No. 18. P. 11347–11363.
  17. Tarasevich Y.Y., Vodolazskaya I.V., Sakharova L.V. Mathematical modeling of pattern formation caused by drying of colloidal film under a mask // *Eur. Phys. J. E*. 2016. Vol. 39. No. 2. P. 26. DOI: 10.1140/epje/i2016-16026-5.
  18. Widjaja E., Harris M. Particle deposition study during sessile drop evaporation // *AIChE J.* 2008. Vol. 54, no. 9. P. 2250–2260.
  19. Тарасевич Ю.Ю., Православнова Д.М. Качественный анализ закономерностей высыхания капли многокомпонентного раствора на твердой подложке // *Журнал технической физики*. 2007. Т. 77, вып. 2. С. 17–21.
  20. Тарасевич Ю.Ю., Исакова О.П., Кондухов В.В., Савицкая А.В. Влияние режима испарения на пространственное перераспределение компонентов в испаряющейся капле жидкости на твердой горизонтальной подложке // *Журнал технической физики*. 2010. Т. 80, вып. 5. С. 45–53.
  21. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В., Полякова Н.М. Моделирование испарение капли жидкости. Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2015. 208 с.
  22. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.
  23. Рождественский Б.Л., Яценко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
  24. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 312 с.
  - vysykhayushhej plenke vodnogo rastvora belka [The formation of pattern cracks freely in the dry film of the aqueous solution of the protein]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics Journal], 2003, vol. 73, iss. 10, pp. 116–121. (In Russian)
  2. Shabalin V.N., Shatokhina S.N. *Morfologiya biologicheskikh zhidkostej cheloveka* [Morphology of human biological fluids]. Moscow, Khrizostom Publ., 2001, 304 p. (In Russian)
  3. Yushhenko A.A., Daudova A.D., Ayupova A.K., Urlyapova N.G., Shatokhina S.N. *Sposoby otsenki obshhetoksicheskogo dejstviya lekarstvennykh sredstv na organizm* [Methods for evaluation of General toxic action of drugs on the body]. Pat. RF 2232387, 2004. B.I. #17. (In Russian)
  4. Rapis E. *Belok i zhizn' (samosborka i simetriya nanostruktur belka)* [Protein and life (self-assembly and symmetry of protein nanostructures)]. Ierusalim, Moscow, ZL Milta-PPK GIT Pub., 2002. 257 p. (In Russian)
  5. Abramchuk S.S., Khokhlov A.R., Iwataki T., Oana H., Yoshikawa K. Evaporative Self-assembly of Ordered Complex Structures. *Europhys. Lett.*, 2001, vol. 55, pp. 294–300.
  6. Harris D.J., Hu H., Conrad J.C., Lewis J.A. Patterning colloidal films via evaporative lithography. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, no. 14, pp. 148301.
  7. Xu J., Xia J., Hong S.W. et al. Self-assembly of gradient concentric rings via solvent evaporation from a capillary bridge. *Physical Review Letters*, 2006, vol. 96, no. 6, pp. 066104.
  8. Takhistov P., Chang H. Complex Stain Morphologies. *Industrial and engineering chemistry research*, 2002, vol. 41, no. 25, pp. 6256–6269.
  9. Helseth L.E., Fischer T.M. Particle interactions near the contact line in liquid drops. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 4, pp. 042601.
  10. Rieger B., van den Doel L.R., van Vliet L.J. Ring formation in nanoliter cups: Quantitative measurements of flow in micromachined wells. *Physical Review E*, 2003, vol. 68, no. 3, pp. 036312.
  11. Bigioni T.P., Lin X.M., Nguyen T.T., Corwin E.I., Witten T.A., Jaeger H.M. Kinetically driven self assembly of highly ordered nanoparticle monolayers. *Nature materials*, 2006, vol. 5, no. 4, pp. 265–270.
  12. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops. *Nature*, 1997, vol. 389, pp. 827–829.
  13. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop. *Physical Review E*, 2000, vol. 62, pp. 756–765.
  14. Govor L.V., Reiter G., Parisi J., Bauer G.H.

## References

- Self-assembled nanoparticle deposits formed at the contact line of evaporating micrometer-size droplets. *Phys. Rev. E*, 2004, vol. 69, pp. 061609.
15. Parisse F., Allain C. Shape Changes of Colloidal Suspension Droplets during Drying. *J. Phys. II France*, 1996, vol. 6, pp. 1111–1119.
  16. Maki K. L., Kumar S. Fast Evaporation of Spreading Droplets of Colloidal Suspensions. *Langmuir*, 2011, vol. 27, no. 18, pp. 11347–11363.
  17. Tarasevich Y.Y., Vodolazskaya I.V., Sakharova L.V. Mathematical modeling of pattern formation caused by drying of colloidal film under a mask. *Eur. Phys. J. E*, 2016, vol. 39, no. 2, p. 26. DOI 10.1140/epje/i2016-16026-5.
  18. Widjaja E., Harris M. Particle deposition study during sessile drop evaporation. *AIChE J.*, 2008, vol. 54, no. 9, pp. 2250–2260.
  19. Tarasevich Yu.Yu., Pravoslavnova D.M. Kachestvennyj analiz zakonornostej vysykhaniya kapli mnogokomponentnogo rastvora na tverdoj podlozhke [Qualitative analysis of the regularities of the drying of multicomponent solution drops on solid padlock]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics Journal], 2007, vol. 77, iss. 2, pp. 17–21. (In Russian)
  20. Tarasevich Yu.Yu., Isakova O.P., Kondukhov V.V., Savitskaya A.V. Vliyanie rezhima isparenii na prostranstvennoe pereraspredelenie komponentov v isparayushhejsya kaple zhidkosti na tverdoj gorizontol'noj podlozhke [The effect of the evaporation on the spatial redistribution of components in the evaporating liquid droplet on a horizontal solid substrate]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics Journal], 2010, vol. 80, iss. 5, pp. 45–53. (In Russian)
  21. ZHukov M.Yu., SHiryaeva E.V., Polyakova N.M. Modelirovanie isparenii kapli zhidkosti [Modeling of the evaporation of drops of liquid]. Rostov-on-Don, Yuzhniy federal'niy universitet Publ., 2015, 208 p. (In Russian)
  22. Barenblatt G.I. *Podobie, avtomodel'nost', promezhutochnaya asimptotika. Teoriya i prilozheniya k geofizicheskoy gidrodinamike* [Similarity, automodelism, intermediate asymptotics. Theory and applications to geophysical fluid dynamics]. Leningrad, Gidrometioizdat Publ., 1982, 256 p. (In Russian)
  23. Rozhdestvenskij B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilinejnykh uravnenij i ikh prilozheniya k gazovoj dinamike* [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 687 p. (In Russian)
  24. Samarskij A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhajlov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilinejnykh parabolicheskikh uravnenij* [Regimes with aggravation in the problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow, Nauka Pub., 1987, 312 p. (In Russian)