

УДК 532.517.4 : 537.2

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКА ПРОВОДЯЩИХ МИКРО- И НАНОПЛЕНОК В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Горбачева Е. В., Калайдин Е. Н.

ELECTROHYDRODYNAMICS OF CONDUCTIVE MICRO- AND NANOFILMS UNDER DC ELECTRIC FIELD

Gorbacheva E. V., Kalaydin E. N.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: katya1911@list.ru

Abstract. The present paper considers a two-phase micro/nanoflow system of conductive (electrolyte) and non-conductive (dielectric) viscous liquids bounded by two solid walls in an external electric field. The charge near the solid body is immobile, but the surface charge is mobile.

Electrostatic attraction then creates an excess of counter ions within the electrolyte solution next to the solid surface or interface, thereby forming electric Debye layers near both surfaces. We study both the micro- and nanoscale electrolyte layers. In the latter case Debye layers in the electrolyte aren't overlapped.

Related two-layer Couette–Poiseuille flow of viscous liquids has been thoroughly studied using asymptotic and numerical analysis of the Orr–Sommerfeld equation. These studies revealed existence of two types of instabilities: short and long-wave instabilities related to inertia and viscous effects.

In this work the problem is described by the Nernst–Planck–Poisson–Stokes system in the liquid–electrolyte phase; the Laplace–Stokes system in the liquid–dielectric phase; and appropriate boundary conditions on the solid–electrolyte, the solid–dielectric, and the liquid–liquid interfaces. The problem has 1D steady-state answer: equilibrium between solution and a plug-like velocity profile.

Keywords: liquid film, mobile surface charge, free interface, instability, electrolyte, Nernst–Planck–Poisson–Stokes equations, double ion layer.

Введение

В работе изучается устойчивость электроосмотического течения двухслойной системы электролит–диэлектрик под действием внешнего электрического поля. Подобная задача была исследована в работах [1–3], однако в них использованы различные упрощения, не позволяющие рассмотреть проблему в полной постановке. Также в этих работах рассматриваются только микропленки, что не дает полноты картины данного явления, ведь в наномасштабах возникают иные причины неустойчивости [4].

В настоящей статье рассмотрены случаи микро и нанопленок, что позволяет сравнить эти случаи и изучить переход от одного к дру-

гому. В данной работе была изучена линейная устойчивость задачи, а также найдены критические значения параметров при переходе к неустойчивости.

1. Постановка задачи

Рассматривается физическая система, состоящая из тонких пленок двух несмешивающихся жидкостей, имеющих постоянную вязкость μ_e , μ_d и диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}_e$, $\tilde{\epsilon}_d$, где e и d соответствуют электролиту и диэлектрику. Система заключена между двумя бесконечными параллельными пластинами $y = 0$ и $y = H$ рис. 1.

Представим уравнения Нернста–Планка–Пуассона–Стокса для электролита. Нижняя

Горбачева Екатерина Витальевна, аспирантка кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: katya1911@list.ru

Калайдин Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: enkalaydin@fa.ru

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (15-08-02483-а, 15-58-45123-IND-а, 14-08-31260 mol-а, 14-08-00789-а).

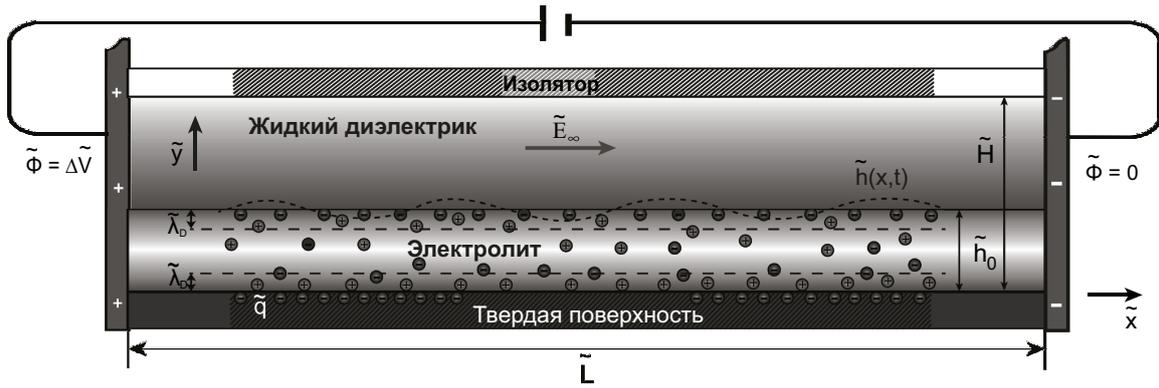


Рис. 1. Электроосмотическое двухфазное течение при условии жидкостного потока жидкости для внешнего тангенциального электрического поля

жидкость в системе является электролитом и описывается следующими уравнениями (туда над символами используются для размерных переменных, а без тильды вводятся безразмерные переменные):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{C}^+}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{C}^+}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{C}^+}{\partial \tilde{y}} = \\ & = z^+ \frac{\tilde{D}^+ \tilde{F}}{\tilde{R} \tilde{T}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{C}^+ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{C}^+ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] + \\ & + \tilde{D}^+ \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}^+}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}^+}{\partial \tilde{x}^2} \right); \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{C}^-}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{C}^-}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{C}^-}{\partial \tilde{y}} = \\ & = z^- \frac{\tilde{D}^- \tilde{F}}{\tilde{R} \tilde{T}} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{C}^- \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{C}^- \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] + \\ & + \tilde{D}^- \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}^-}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}^-}{\partial \tilde{x}^2} \right); \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\varepsilon}_e \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = \\ & = -\tilde{F} (z^- \tilde{C}^- + z^+ \tilde{C}^+); \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\mu}_e \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = \\ & = \tilde{F} (z^+ \tilde{C}^+ + z^- \tilde{C}^-) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}}; \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\mu}_e \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = \\ & = \tilde{F} (z^+ \tilde{C}^+ + z^- \tilde{C}^-) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}}; \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь (1.1), (1.2) — уравнения транспорта ионов; (1.3) — уравнение Пуассона для электрического потенциала; (1.4), (1.5) — уравнение Стокса (уравнение Навье–Стокса с отброшенными инерциальными членами); (1.6) — уравнение неразрывности жидкости; где \tilde{C}^+ , \tilde{C}^- являются молярными концентрациями катионов и анионов; $\tilde{\mathbf{U}} = \{\tilde{U}, \tilde{V}\}$ — вектор скорости жидкости–электролита; $\{\tilde{x}, \tilde{y}\}$ — декартовы координаты, \tilde{x} направлена вдоль твердой поверхности, \tilde{y} — перпендикулярно к этой поверхности; $\tilde{\Phi}$ — электрический потенциал электролита; \tilde{P} — давление в электролите; \tilde{F} — постоянная Фарадея; \tilde{R} — универсальная газовая постоянная; \tilde{T} — температура; z^\pm и D^\pm — валентность и коэффициент диффузии катионов и анионов, соответственно.

Рассмотрим уравнения Пуассона–Стокса для диэлектрической жидкости. Диэлектрическая жидкость электронейтральна, следовательно, потенциал $\tilde{\varphi}$ описывается уравнением Лапласа, а гидродинамика описывается уравнением Стокса:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad (1.7)$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\mu}_d \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = 0, \quad (1.8)$$

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\mu}_d \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} \right) = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (1.10)$$

$\tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ вектор скорости жидкости–диэлектрика, p — давление в диэлектрике.

Граничные условия на электролите формулируются следующим образом: 1) предполагается, что поверхность непроницаема для катионов и анионов; 2) потенциал является непрерывным, а его градиент имеет скачок, связанный с мобильным поверхностным зарядом $\tilde{\sigma}$, 3) заряд поверхности сохраняется, т.е. изменением поверхностного заряда и объемом заряда можно пренебречь, 4) задаются два граничных условия для нормальных и касательных напряжений, и кинематическое ограничение на свободной поверхности.

Граничные условия для напряжений при $\tilde{y} = \tilde{h}(x, y)$ принимают вид

$$\left(\tilde{P} - \tilde{p} + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{r}} \right) \mathbf{n} - \tilde{\tau}_n - \tilde{\tau}_n^E + \tilde{\mathbf{T}}_n^E + \tilde{\mathbf{T}}_n = 0; \quad (1.11)$$

$$\tilde{\varepsilon}_e \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} = \tilde{\varepsilon}_d \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} + \tilde{\sigma}; \quad (1.12)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}. \quad (1.13)$$

Рассматривается двумерный случай, где

$\tilde{\tau}$ — тензор вязких напряжений в жидкости–электролите;

$\tilde{\tau}^E$ — тензор Максвелла–Вагнера для вязких напряжений в жидкости–электролите;

$\tilde{\mathbf{T}}$ — тензор вязких напряжений в жидкости–диэлектрике;

$\tilde{\mathbf{T}}^E$ — тензор Максвелла–Вагнера вязких напряжений в жидкости–диэлектрике;

$\tilde{\gamma}$ — коэффициент поверхностного натяжения;

\tilde{r} — радиус кривизны на границе раздела $h(x, t)$;

\mathbf{n} — внешняя нормаль к границе раздела фаз (направленная наружу из электролита).

Краевые условия для касательных напряжений:

$$\begin{aligned} & 4\tilde{\mu}_e \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{h_x}{1 + h_x^2} - \\ & - \tilde{\mu}_e \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2} - \tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{s}} = \\ & = 4\tilde{\mu}_d \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{h_x}{1 + h_x^2} - \tilde{\mu}_d \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2}. \end{aligned}$$

Условие сохранения заряда на поверхности $\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}, t)$:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{U}_s \tilde{\sigma}) = 0,$$

кинематическое условие:

$$\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}},$$

условие непрерывности скорости:

$$\tilde{V} = \tilde{v}, \quad \tilde{U} = \tilde{u}.$$

Граница раздела непроницаема для обоих видов ионов, поэтому

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{C}^+ z^+ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \tilde{C}^+}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} = 0,$$

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{C}^- z^- \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} + \frac{\partial \tilde{C}^-}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} = 0.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{n}}$ вектор внешней нормали к свободной поверхности (направлена наружу от жидкой поверхности), $\tilde{\mathbf{s}}$ — это направление касательной к свободной поверхности, \tilde{U}_s — касательная скорости.

Сформулируем условия на нижней поверхности $\tilde{y} = 0$. Если твердая поверхность $\tilde{y} = 0$ является диэлектриком с поверхностным зарядом q , то потенциал $\tilde{\Phi}$ подчиняется следующему граничному условию:

$$\tilde{\varepsilon}_e \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} = -\tilde{q}.$$

Поверхность предполагается твердой, непроницаемой для обоих видов ионов (катионов и анионов) и компоненты скорости подчиняются граничным условиям

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{C}^+ z^+ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{C}^+}{\partial \tilde{y}} = 0,$$

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{C}^- z^- \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{C}^-}{\partial \tilde{y}} = 0,$$

$$\tilde{U} = 0, \quad \tilde{V} = 0.$$

Если твердая поверхность $\tilde{y} = \tilde{H}$ является диэлектриком, то потенциал $\tilde{\phi}$ удовлетворяет следующему граничному условию:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = 0,$$

компоненты скорости подчиняются условию

$$\tilde{v} = 0, \quad \tilde{u} = 0.$$

Задача описывается следующими десятью контрольными параметрами:

$E_\infty = \frac{\tilde{E}_\infty \tilde{h}_0}{\tilde{\Phi}_0}$ — напряженность внешнего поля;

$\nu = \frac{\tilde{\lambda}_D}{\tilde{h}_0}$ — число Дебая,

где $\tilde{\lambda}_D = \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_e \tilde{\Phi}_0}{\tilde{F} \tilde{C}_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_e \tilde{R} \tilde{T}}{\tilde{F}^2 \tilde{C}_0} \right)^{1/2}$;

$\delta = \frac{\tilde{\varepsilon}_d}{\tilde{\varepsilon}_e}$ — отношение диэлектрических проницаемостей диэлектрика и электролита;

$\kappa = \frac{\tilde{\varepsilon}_e \tilde{\Phi}_0^2}{\tilde{\mu}_e \tilde{D}}$ — коэффициент связи между гидродинамикой и электростатикой в электролите;

$\mu = \frac{\tilde{\mu}_d}{\tilde{\mu}_e}$ — отношение вязкостей диэлектрика и электролита;

$We = \frac{\tilde{\gamma} \tilde{h}_0}{\tilde{\varepsilon}_e \tilde{\Phi}_0^2}$ — число Вебера;

$\sigma_0 = \frac{\tilde{\sigma}_0}{\tilde{\sigma}_s}$ — безразмерный межфазный заряд;

$q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{\sigma}_s}$ — безразмерный поверхностный заряд на твердой поверхности;

$H = \frac{\tilde{H}}{\tilde{h}_0}$ — безразмерная ширина канала;

$\Pi = \frac{\tilde{\Pi}}{\tilde{\mu}_e \tilde{D} / \tilde{h}_0}$ — безразмерный градиент давления.

Свойства раствора электролита фиксируются для данной жидкости–электролита.

Для решения одномерной задачи вводится неортогональная криволинейная система координат

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x, t)}, \quad (1.14)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \eta \frac{h_t}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{h_x}{h} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (1.15)$$

Производные по нормальному и тангенциальному \mathbf{n} и \mathbf{s} направлениям на поверхности $y = h(x, t)$ (или $\eta = 1$) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{1+h_x^2}}{h} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (1.16)$$

2. Одномерное стационарное решение

2.1. Электростатическая часть

Система (1.1)–(1.13) всегда имеет стационарное решение (т.е., $\partial/\partial \tau = 0$) и равномерна относительно пространственной координаты ξ . Электростатическая задача может быть решена независимо от гидродинамической задачи.

Электрический потенциал в системе может быть представлен в виде суммы потенциалов полей пространственного заряда $\Phi_n(\eta)$ и прилагаемого извне касательного электрического поля $\Phi_t(\xi)$

$$\Phi = \Phi_t(\xi) + \Phi_n(\eta). \quad (2.1)$$

Внешний тангенциальный электрический потенциал определяется соотношением $\Phi_t = -E_\infty \xi$; касательное поле не влияет на распределение пространственного заряда и на нормальное электрическое поле. Уравнения транспорта ионов (1.1) и (1.2) в криволинейных координатах интегрируются один раз по η ; константы интегрирования находятся из краевых условий. Уравнение Пуассона (1.3) добавляется для завершения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по отношению к концентрации C^\pm и напряженности нормального электрического поля $E \equiv d\Phi_n/d\eta$

$$C^+ E + \frac{dC^+}{d\eta} = 0, \quad (2.2)$$

$$-C^- E + \frac{dC^-}{d\eta} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nu^2 \frac{dE}{d\eta} + C^+ - C^- = 0. \quad (2.4)$$

Краевые условия на заряженной диэлектрической стенке примут вид

$$\eta = 0: \quad E = -\frac{1}{\nu} q, \quad (2.5)$$

$$\eta = 1 : \quad E = \frac{1}{\nu} \sigma. \quad (2.6)$$

При интегрировании (2.4) и использовании краевых условий (2.5) и (2.6) приходим к ограничению

$$M - N = -\nu(\sigma + q), \quad (2.7)$$

где

$$M \equiv \int_0^1 C^+ d\eta, \quad N \equiv \int_0^1 C^- d\eta, \quad (2.8)$$

средние концентрации положительных и отрицательных ионов. Ограничение (2.7) означает, что $M - N$ и σ не являются независимыми и раствор электролита в пленке не может быть электронейтральным, $M \neq N$ если $\sigma \neq q$.

2.2. Преобразование уравнений электростатической системы в одно уравнение

Система уравнений (2.2)–(2.4) может быть преобразована в одно классическое уравнение Пуассона–Больцмана с помощью распределения Больцмана, полученного из уравнений (2.2) и (2.3) и подставления этого распределения в (2.4). Но существует и другой способ сведения системы к одному уравнению. Формулировка (2.2)–(2.7) содержит только производную $E = d\Phi/d\eta$, но не Φ . После добавления соотношений (2.2)–(2.3) и подстановки (2.4) в результате возникает уравнение

$$\frac{d}{d\eta}(C^+ + C^- - \frac{\nu^2}{2}E^2) = 0, \quad (2.9)$$

которое может быть проинтегрировано,

$$C^+ + C^- = A + \frac{\nu^2}{2}E^2. \quad (2.10)$$

И при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ принимает вид

$$A = (M + N) - \frac{\nu^2}{2} \int_0^1 E^2 d\eta. \quad (2.11)$$

При подстановке уравнений (2.10) и (2.4) в разность уравнений (2.2) и (2.3) получаем одно нелинейное уравнение второго порядка относительно E

$$\nu^2 \frac{d^2 E}{d\eta^2} - E \left(A + \frac{1}{2} \nu^2 E^2 \right) = 0, \quad (2.12)$$

с краевыми условиями

$$\eta = 0 : \quad E = -\frac{1}{\nu} q, \quad (2.13)$$

$$\eta = 1 : \quad E = \frac{1}{\nu} \sigma. \quad (2.14)$$

Чтобы замкнуть задачу, следует добавить условие ограничения

$$M - N = -\nu(\sigma + q). \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) является стационарным уравнением Гинзбурга–Ландау [5].

Так как в одномерном случае электростатическая часть не зависит от движения жидкости и решается независимо, результаты, полученные в данном параграфе, совпадают с результатами [6], где вместо диэлектрической жидкости был рассмотрен воздух. Анализ этих уравнений можно найти там же.

3. Гидродинамические уравнения

После решения электростатической части задачи, можно перейти к решению гидродинамических уравнений. Уравнения для верхней, диэлектрической жидкости принимают вид

$$\frac{dp}{dx} = -\Pi;$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\Pi; \quad (3.1)$$

$$y = H : \quad u = 0; \quad (3.2)$$

$$y = 1 : \quad \mu \frac{du}{dy} = \frac{dU}{d\eta} - \kappa E E_\infty, \quad u = U.$$

При интегрировании (3.1) с использованием граничных условий

$$\mu \frac{du}{dy} = C_1 - \Pi(y - H),$$

$$\mu u = C_1(y - H) - \frac{\Pi}{2}(y - H)^2,$$

где C_1 константа интегрирования.

$$C_1 = \frac{\mu u(1)}{(1 - H)} + \frac{\Pi}{2}(1 - H).$$

В результате эффективные граничные условия для электролита запишутся

$$\begin{aligned} \eta = 1 : \quad \frac{dU}{d\eta} - \frac{\mu}{1 - H} U = \\ = \kappa E E_\infty - \frac{\Pi}{2}(y - H). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнения (3.1) с граничными условиями (3.2) и (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\eta} &= \varkappa E \frac{dE}{d\eta} = \frac{\varkappa}{2} \frac{dE^2}{d\eta}, \\ \frac{d^2U}{d\eta^2} - \varkappa \frac{dE}{d\eta} E_\infty &= -\Pi, \\ \eta = 0: \quad U &= 0, \\ \eta = 1: \quad \frac{dU}{d\eta} - \frac{\mu}{1-H} U &= \varkappa E E_\infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

Последнее условие для $\eta = 1$ было изменено, с учетом граничного условия (2.6). После первого интегрирования (3.4), получим

$$\frac{dU}{d\eta} = \varkappa E_\infty E - \Pi\eta + \text{const.}$$

Из второго граничного условия при $\eta = 1$, $\text{const} = 0$. После второго интегрирования, получаем

$$U = \varkappa E_\infty \int_0^\eta E d\eta + C_1\eta - \Pi \frac{\eta^2}{2}, \quad (3.5)$$

где

$$C_1 = \frac{\varkappa\mu \int_0^\eta E d\eta E_\infty - \frac{\Pi}{2}(\eta - 1 - H^2)}{1 - H - \mu}.$$

Давление определяется из уравнения (2.1)

$$P = \text{const}(\eta) + \frac{\varkappa}{2} E^2 - \Pi x.$$

Константа интегрирования может быть найдена с помощью граничного условия (1.11) для нормальных напряжений. Для одномерного случая

$$\eta = 1: \quad P - \frac{\varkappa}{2} E^2 + \frac{\varkappa}{2} (1 - \delta) E_\infty^2 = p,$$

или

$$\text{const} = -\frac{\varkappa}{2} (1 - \delta) E_\infty^2.$$

Таким образом,

$$P = \frac{\varkappa}{2} E^2 - \frac{\varkappa}{2} E_\infty^2 (1 - \delta).$$

В предельном случае ($\mu = 0$) выражения для скорости в электролите совпадают с [6].

С точки зрения практических приложений, где целью является перемещение диэлектрической жидкости за счет электроосмотического течения проводящей жидкости, важной характеристикой является расход жидкости-диэлектрика. В одномерном стационарном случае подобное выражение принимает вид

$$\int_1^H u dy = \frac{H-1}{2} U(1).$$

Используя (3.5) и соотношение из [6] $\int_0^1 E d\eta = \sqrt{2}(q + \sigma)/2$, которое получено на основе приближения Дебая-Хюккеля и справедливо при $\nu \ll 1$, выражение для одномерного расхода жидкости-диэлектрика может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_1^H u dy &= \varkappa E_\infty \left[\frac{\mu}{1-H-\mu} + \frac{\sqrt{2}}{2}(q + \sigma) \right] \times \\ &\times \frac{H-1}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В предельных случаях ($\mu = 0$, $\Pi = 0$) соотношения для скорости в электролите совпадают с соотношениями и представленными в [6]. Результаты для $\Pi = 0$ находятся в хорошем соответствии с данными для случая, описанного в [7]. Профили скорости для различных значений μ изображены на рис. 2. Как видно, диэлектрическая скорость уменьшается с увеличением μ . Такое изменение вызвано увеличением вязкости диэлектрического слоя.

4. Численное исследование спектральной устойчивости

Рассмотрим малые синусоидальные возмущения с волновым числом α и коэффициентом роста λ накладываемые на одномерное стационарное решение,

$$G = G_0(\eta) + \hat{g}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

где

$$G = P, K, \rho, \Phi, \Psi, U, u, \sigma,$$

$$V = \hat{V}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$v = \hat{v}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$h = 1 + \hat{h} \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

где $K = C^+ + C^-$ — проводимость и $\rho = C^+ - C^-$ — плотность заряда. Индекс «0» обозначает среднее значение, а « $\hat{}$ » указывает на возмущения. Далее индекс «0» для

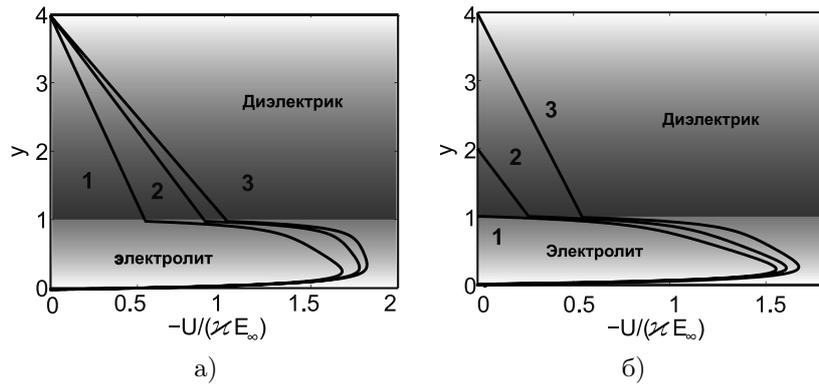


Рис. 2. Профиль скорости для $\Pi = 0$ при различных значениях а) μ 1: $\mu = 3,5$, 2: $\mu = 1$, 3: $\mu = 0,5$ и б) H 1: $H = 1$, 2: $H = 2$, 3: $H = 4$.

среднего значения будет опущен. Для численного обращения вводятся функции тока Ψ и ψ , при интегрировании уравнения непрерывности

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Линеаризуя уравнения по отношению к возмущениям, получаем систему линейных ОДУ

$$\begin{aligned} \lambda \hat{K} - \lambda K' \eta \hat{h} + i\alpha U \hat{K} - i\alpha K' \hat{\Psi} + i\alpha E_\infty \hat{\rho} = \\ = \frac{d}{d\eta} (\rho \hat{\Phi}' + E \hat{\rho} + \hat{K}') - \alpha^2 \rho \hat{\Phi} - \alpha^2 \hat{K} + \\ + \left[\alpha^2 \eta (\rho E + K') - 2 \frac{d}{d\eta} (\rho E + K') + \right. \\ \left. + i\alpha E_\infty \eta \rho' \right] \hat{h}, \quad (4.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \hat{\rho} - \lambda \rho' \eta \hat{h} + i\alpha U \hat{\rho} - i\alpha \rho' \hat{\Psi} + i\alpha E_\infty \hat{K} = \\ = \frac{d}{d\eta} (K \hat{\Phi}' + E \hat{K} + \hat{\rho}') - \alpha^2 K \hat{\Phi} - \alpha^2 \hat{\rho} + \\ + \left[\alpha^2 \eta (KE + \rho') - 2 \frac{d}{d\eta} (KE + \rho') + \right. \\ \left. + i\alpha E_\infty \eta K' \right] \hat{h}, \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\hat{\Phi}'' - \alpha^2 \hat{\Phi} + \frac{\hat{\rho}}{\nu^2} = (2E' - \alpha^2 E \eta) \hat{h}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^{IV} - 2\alpha^2 \hat{\Psi}'' + \alpha^4 \hat{\Psi} - \alpha U \eta \hat{h} + \\ (-4U''' + 2\alpha^2 U'' \eta + 4\alpha^2 U') \hat{h} = \\ = \frac{z}{\nu^2} \left[i\alpha (\rho' \hat{\Phi} - E \hat{\rho}) - E_\infty \rho' + \right. \\ \left. + E_\infty \rho' \hat{h} \right], \quad (4.4) \end{aligned}$$

$\eta = 0$:

$$\nu \hat{K}' + q \hat{\rho} + \nu \rho \hat{\Phi}' = 0, \quad (4.5)$$

$$\nu \hat{\rho}' + q \hat{K} + \nu K \hat{\Phi}' = 0,$$

$$\nu \hat{\Phi}' = -q \hat{h}, \quad (4.6)$$

$$\hat{\Psi} = 0, \quad \hat{\Psi}' + U \hat{h} = 0, \quad (4.7)$$

$\eta = 1$:

$$\hat{K}' + E \hat{\rho} + \rho (i\alpha E_\infty \hat{h} + \hat{\Phi}') = 0, \quad (4.8)$$

$$\hat{\rho}' + E \hat{K} + K (i\alpha E_\infty \hat{h} + \hat{\Phi}') = 0,$$

$$\begin{aligned} \nu [i\alpha E_\infty (1 - \delta) \hat{h} + \alpha \delta \tanh(\alpha H) \cdot \hat{\Phi}] \\ + \nu \hat{\Phi}' = \hat{\sigma} + \sigma \hat{h}, \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$\lambda \hat{\sigma} + i\alpha U \hat{\sigma} + i\alpha \sigma \hat{\Psi}' - i\alpha \sigma U \hat{h} = 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}''' - 3\alpha^2 \left(1 + \mu \frac{2\alpha^2 (1 - H)^2}{3\Delta} \right) \hat{\Psi}' + \\ + \alpha^3 \mu \frac{b_4}{\Delta} \hat{\Psi} - \alpha^2 \mu \left(\frac{\alpha b_4}{\Delta} - \frac{2 - H b_3}{1 - H \Delta} \right) U \hat{h} - \\ - (U'' + 3\alpha^2 \frac{1 - 2}{1 - H} \mu) \hat{h} - i\alpha^3 \text{We} \hat{h} + \\ + \varkappa i\alpha [E' \hat{\Phi} - E \hat{\Phi}' + E^2 \hat{h}] + \\ + \varkappa (-E_\infty \hat{\Phi}'' + (2 - \delta) \alpha^2 E_\infty \hat{\Phi}) = \\ = 2\varkappa \alpha^2 E E_\infty \hat{h}, \quad (4.11) \end{aligned}$$

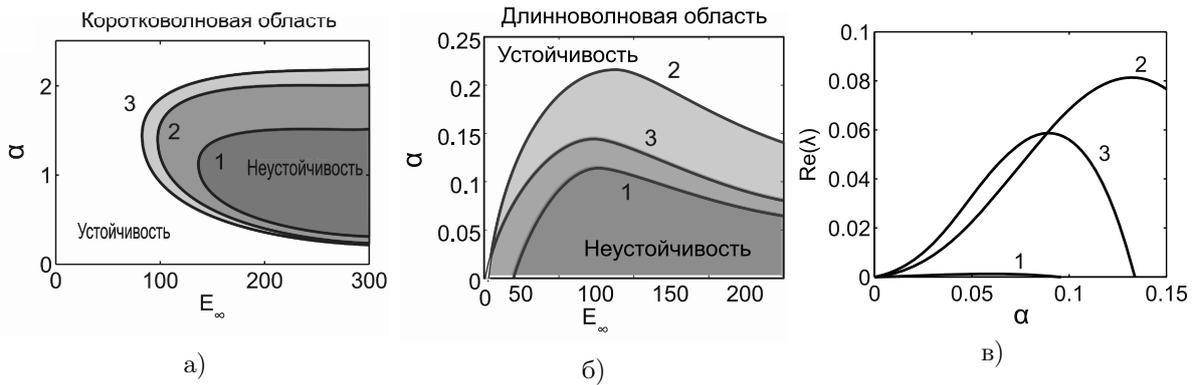


Рис. 3. Кривые граничной устойчивости а) и б) для $q = -3$, $\sigma = 1$, $\nu = 0,1$, $\varkappa = 0,2$, $H = 4$ и для различных значений 1: $\mu = 0$ 2: $\mu = 0,5$, 3: $\mu = 1$, 4: $\mu = 3,5$; в) зависимость λ от волнового числа α при $E_\infty = 50$.

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}'' - \mu\alpha \frac{b_1}{\Delta} \hat{\Psi}' + \\ \alpha^2 \left(1 + \mu \frac{2\alpha^2(1-H)^2}{\Delta} \right) \hat{\Psi} + \\ + \left[\alpha^2(\mu-1) - \frac{\mu}{1-H} \right] U \hat{h} - \\ - \alpha\mu \left(\frac{\alpha b_2}{\Delta} - \frac{2-H}{1-H} \frac{b_1}{\Delta} \right) U \hat{h} + \\ + \frac{\varkappa}{\nu} \left(i\alpha\sigma\hat{\Phi} - E_\infty\hat{\sigma} - 2\sigma E_\infty\hat{h} \right) = 0, \quad (4.12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{sh}^2 \alpha(1-H) - \alpha^2(1-H)^2, \\ b_1 &= \text{sh} 2\alpha(1-H) - 2\alpha(1-H), \\ b_2 &= \text{sh}^2 \alpha(1-H) + \alpha^2(1-H)^2, \\ b_3 &= 3 \text{sh}^2 \alpha(1-H) - \alpha^2(1-H)^2, \\ b_4 &= \text{sh} 2\alpha(1-H) + 2\alpha(1-H). \end{aligned}$$

Уравнения (4.1) и (4.2) получаются при сложении и вычитании уравнения переноса ионов. Задача на собственные значения (4.1)–(4.12) решается численно с помощью дискретизации Галеркина с использованием полиномов Чебышева.

В отличие от расчетов, проведенных в [6], добавляется новый параметр μ , а параметр H играет более важную роль, чем в случае выбора воздуха в качестве диэлектрика [6].

Увеличение вязкости жидкости–диэлектрика соответствует увеличению параметра μ . При этом расчеты показывают, что стационарное течение становится более устойчивым к коротковолновым возмущениям рис. 3а и менее устойчивым к длинноволновым возмущениям рис. 3б. Но при этом

коэффициент максимального роста возмущений λ_{max} увеличивается незначительно и приходит к насыщению рис. 3в.

Принимая во внимание, что увеличение вязкости μ уменьшает расход жидкости–диэлектрика (3.6), но при этом делает стационарный поток более устойчивым к коротковолновым возмущениям, можно ввести понятие максимально устойчивого расхода жидкости–диэлектрика c^* . Под этим будем понимать значение расхода $\int_1^H u dy$ при критическом значении E_∞^* , то есть при такой максимально возможной величине напряженности внешнего поля, при которой стационарный поток устойчив к коротковолновым возмущениям. При превышении критического значения напряженности, вследствие потери устойчивости плоским течением стоит ожидать, что расход жидкости–диэлектрика будет уменьшаться.

Существенное изменение картины устойчивости происходит только при увеличении δ в десятки раз. При этом длинноволновая область неустойчивости существенно расширяется к большим волновым числам. Коротковолновая же область наоборот сужается, и диапазон неустойчивых волновых чисел уменьшается, но при этом критическое значение величины напряженности внешнего поля уменьшается и стационарное течение становится менее устойчивым к коротковолновым возмущениям.

Заключение

В работе исследовалось поведение ультратонких пленок жидкости, ограниченные двумя твердыми стенками во внешнем электриче-

ском поле. Жидкость представляет собой бинарный электролит, электролит-диэлектрик предполагается заряженным. Твердые стенки также заряжены. Задача исследовалась с помощью асимптотических и численных методов. Установлено, что система Нернста–Планка–Пуассона–Стокса имеет одномерное решение. Для достаточно сильного внешнего поля, одномерное решение становится неустойчивым. Порог неустойчивости определяется длиной волн: для более сильных внешних электрических полей одномерное решение имеет коротковолновую неустойчивость. В пределе бесконечно малых волновых чисел независимые неустойчивые режимы имеют четкий физический смысл: они являются возмущениями, соответственно, толщины пленки, поверхностного заряда, объемной проводимости и объемного заряда. Для конечных волновых чисел, описываемых численным линейным анализом устойчивости, эти режимы теряют простую физическую интерпретацию. Для бесконечно больших чисел Вебера (или для недеформируемого раздела газ–жидкость) длинноволновая неустойчивость исчезает, в то время как коротковолновая неустойчивость сохраняется. С увеличением числа Дебая коротковолновая область неустойчивости замыкается, сужается, стягивается в точку, и в конце концов исчезает. Для достаточно большого числа Дебая остается только длинноволновая неустойчивость.

Литература

1. Chang H. C., Yossifon G., and Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux// *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2012. № 44. С. 401.
2. Lee J. S. and Li D. Electro-osmotic flow at a liquid-air interface// *Microfluid. Nanofluidics*. 2006. № 2. С. 361.

3. Gao Y., Wang T. N., and Yang C. Transient two-liquid electro-osmotic flow with electric charges at the interface// *Colloids Surfaces A*. 2005. № 266. С. 117.
4. Gao Y., Wang T. N., Yang C. and Ooi K. T. Two-fluid electro-osmotic flow in microchannels // *J. Colloid Interface Sci.* 2005. № 284. С. 306.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M., and Pitaevskii L. P. *Electrodynamics of Continuous Media*, Butterworth-Heinemann, 1984. № 8. С. 2.
6. Ganchenko G. S., Demekhin E. A., Mayur M., Amiroudine S. Electrokinetic instability of liquid micro- and nanofilms with a mobile charge, *Physics of Fluids*, 2015. № 27. С. 062002.
7. Navarkar A., Amiroudine S., Mayur M., Demekhin E. A. Long-wave interface instabilities of a two-liquid DC electroosmotic system for thin films, *Microfluid Nanofluid*, 2015. № 19. С. 813.

References

1. Chang H. C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2012, no. 44, pp. 401.
2. Lee J. S., Li D. Electro-osmotic flow at a liquid-air interface. *Microfluid. Nanofluidics*, 2006, no. 2, pp. 361.
3. Gao Y., Wang T. N., Yang C. Transient two-liquid electro-osmotic flow with electric charges at the interface. *Colloids Surfaces A.*, 2005, no. 266, pp. 117.
4. Gao Y., Wang T. N., Yang C., Ooi K. T. Two-fluid electro-osmotic flow in microchannels. *J. Colloid Interface Sci.*, 2005, no. 284, pp. 306.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. *Electrodynamics of Continuous Media*. *Butterworth-Heinemann*, 1984, no. 8, pp. 2.
6. Ganchenko G. S., Demekhin E. A., Mayur M., Amiroudine S. Electrokinetic instability of liquid micro- and nanofilms with a mobile charge. *Physics of Fluids*, 2015, no. 27, pp. 062002.
7. Navarkar A., Amiroudine S., Mayur M., Demekhin E. A. Long-wave interface instabilities of a two-liquid DC electroosmotic system for thin films. *Microfluid Nanofluid*, 2015, no. 19, pp. 813.