УДК 539.3

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рубцов С. Е., Павлова А. В.

TO THE STUDY OF THE MIXED DYNAMIC PROBLEMS FOR A LIMITED VOLUME OF FLUID ON AN ELASTIC FOUNDATION

Rubtsov S. E., Pavlova A. V.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Abstract. The paper presents the results of analytical studies of the distribution of contact stresses at the interface between a limited pool of liquid and an elastic foundation. A limited amount of an ideal compressible fluid, located on deformable foundation, is considered. An elastic layer and an elastic half-space rigidly coupled with non-deformable base are considered as the latter. In the system "elastic medium – liquid" the oscillations are excited by surface vibrator.

The velocity potential that satisfies the wave equation as the characteristic of the wave field in the liquid is being considered. It is assumed that the hydrodynamic pressure on the upper liquid surface is absent. The condition of impermeability is given on vertical borders, on bottom surface the liquid is affected by an elastic foundation. The displacement vector points of the elastic base satisfy the system of Lame differential equations. The interaction of the liquid and elastic medium is determined by the continuity of the vertical speed component in the contact area. It is believed that the system vibrations are of steady character.

In this work the integral equation of the first kind with kernel is obtained and solved, depending on both difference and sum of the arguments, the function is also built, that describes the distribution of contact stresses in the area of contact between the liquid and the elastic media with consideration of physical and frequency factors.

The relevance of research of dynamic interaction of hydraulic structures with deformable foundation is determined by the high requirements for reliability of their exploitation and the degree of certainty of the forecast of consequences in case of vibroseismic interactions. The results of this study may serve as a foundation for the further development of methods for solving dynamic contact problems of joint oscillations of elastic and liquid mediums.

Keywords: limited pool of liquid, elastic foundation, harmonic oscillations, the integral factorization method.

Повышение требований к долговечности и надежности эксплуатации энергетических, промышленных и гидротехнических сооружений, особенно в сейсмически активных регионах, к которым относится и Краснодарский край, диктует необходимость разработки достоверных способов исследования особенностей динамических режимов функционирования этих объектов при вибрационных воздействиях сейсмического и техногенного характера. Повышение точности описания реальных процессов и достоверности оценок возможных последствий вибросейсмического воздействия является чрезвычайно актуальной задачей, решение которой особенно важно в случаях, когда искусственные и естественные дамбы, плотины, водохранилища располагаются в непосредственной близости от населенных пунктов.

Растущий интерес к математическим моделям динамического взаимодействия гидросооружений с геологической средой связан, в частности, и с развитием геофизики, гидроакустики, сейсмологии, чьи эксперименталь-

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: rub_serg@mail.ru

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, доцент профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края (р_юг_а 16-41-230184).

ные методы позволяют получать региональную сейсмическую информацию, использование которой дает возможность проводить аналитические и численные исследования основных параметров, обеспечивающих безопасное функционирование изучаемых объектов. В качестве моделей гидросооружений различного назначения обычно принимаются ограниченный или полуограниченный слой сжимаемой жидкости.

Проблемы, связанные с особенностями волновых процессов в контактирующих жидких и упругих средах, рассматривались многими авторами, им посвящены, например, работы [1–4]. В [3] представлены методы исследования распространения возмущений в гидротехнических сооружениях под действием динамических нагрузок с учетом их взаимодействия с упругим основанием и жидкостью, описаны математические модели, позволяющие изучать возникающие поля деформаций и напряжений, и аналитические методы построения решений нестационарных задач.

Однако несмотря на многочисленные публикации и разнообразные подходы, на сегодняшний день вопросы динамического взаимодействия конструкций с жидкостью и деформируемым основанием не до конца изучены, поскольку исследование подобных систем требует совместного решения нескольких взаимосвязанных задач гидродинамики и динамической теории упругости, что сопряжено с определенными математическими сложностями. Наиболее часто рассматриваются модели, представляющие собой системы слоев сжимаемой идеальной жидкости и упругих однородных слоев с плоскопараллельными границами раздела. В [5] авторами была исследована задача для контактирующих протяженных жидкой и упругих сред.

В настоящей работе представлены результаты аналитического исследования распределения контактных напряжений на границе раздела упругого основания и ограниченного бассейна жидкости.

Рассматривается ограниченный объем идеальной сжимаемой жидкости $\{(x, y) \in \Omega;\ 0 < z < h\}$, расположенный на деформируемом основании. В качестве последнего рассматриваются:

а) жестко сцепленный с недеформируемым основанием одноророднный упругий слой $\{-\infty < x, y < \infty;\ -H < z < 0\}$;

б) однородное упругое полупространство $\{-\infty < x, y < \infty;\ -\infty < z < 0\}$.

В системе «упругая среда – жидкость» гармонические во времени колебания возбуждаются виброисточником, моделируемым распределенной в области Ω_0 нагрузкой $\mathbf{F} = \{0, 0, q_0(x, y, t)\}$.

В качестве характеристики волнового поля в жидкости рассматривается потенциал скоростей $\bar{\phi}\,(x, y, z, t)$, удовлетворяющий волновому уравнению

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial t^2} \tag{1}$$

и заданным граничным условиям. Полагается, что на верхней поверхности жидкости гидродинамическое давление отсутствует. На вертикальных границах задано условие непротекания, на нижней поверхности жидкость испытывает воздействие со стороны упругого основания. Данные условия могут быть описаны следующим образом:

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\substack{(x,y)\in\Sigma,\\ 0\leqslant z\leqslant h}} = 0, \\ \rho_0\left.\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t}\right|_{\substack{z=h\\ (x,y)\in\Omega}} = 0, \\ \rho_0\left.\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t}\right|_{\substack{z=0,\\ (x,y)\in\Omega}} = \bar{q}\,(x,\, y,\, t)\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения: Σ — граница области Ω, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к Σ, c_0 — скорость звука в жидкости, ρ_0 — плотность жидкости, $\bar{q}\,(x, y, t)$ — функция нормального давления на границе раздела жидкой и упругой сред.

Вектор перемещений

$$\bar{\mathbf{u}}\,(x, y, z, t) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$$

точек упругого основания удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Ляме

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}}) + \mu\Delta\bar{\mathbf{u}} = \rho\frac{\partial^2\bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \tag{3}$$

и условиям на поверхности $z = 0$ упругой среды

$$2\mu\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} + \lambda\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{u}} = \\ = \begin{cases} q\,(x, y, t)\,, & (x, y) \in \Omega, \\ q_0\,(x, y, t)\,, & (x, y) \in \Omega_0, \\ 0\,(x, y) \notin \Omega, & \Omega_0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \tag{5}$$

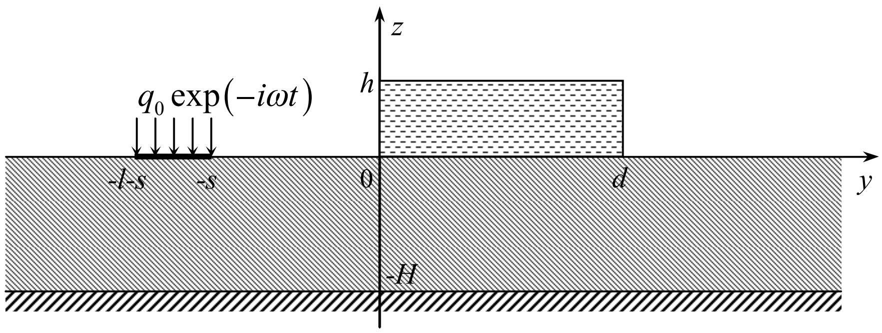

Рис. 1. Геометрическое представление системы

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty. \tag{6}$$

Если в качестве основания рассматривается упругий слой, на нижней его границе $z = -H$ задается условие жесткого сцепления

$$\bar{\mathbf{u}}\,(x, y, -H, t) = 0. \tag{7}$$

Если как основание рассматривается упругое полупространство, приняты условие убывания смещений на бесконечности $(R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty)$

$$\bar{\mathbf{u}}\,(x, y, z, t) \to 0 \tag{8}$$

и условие излучения [6, 7].

Взаимодействие жидкой и упругой сред определяется непрерывностью вертикальной составляющей скорости в области контакта

$$\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}\right)\Bigg|_{\substack{z=0,\\(x,y)\in\Omega}} = 0. \tag{9}$$

Полагается, что колебания системы носят установившийся (с частотой ω) характер и зависимость от времени характеристик задачи описывает множитель $\exp(-i\omega t)$.

Далее задача рассматривается в плоской постановке, т.е. функции, соответствующие всем заданным и искомым величинам, не зависят от координаты x:

$$\bar{q}\ \ (x, y, t) = q(y) \exp(-i\omega t)\,,$$

$$\bar{\phi}\,(x, y, z, t) = \phi(y, z) \exp(-i\omega t)\,,$$

$$\bar{\mathbf{u}}\,(x, y, z, t) = v, w = \mathbf{u}\,(y, z) \exp(-i\omega t)\,.$$

Геометрическое представление рассматриваемой системы изображено на рис. 1. Как видно из рисунка, область $\Omega = \{0 \leqslant y \leqslant d\}$, $\Omega_0 = \{-l - s \leqslant y \leqslant -s\}$.

Аналогично подходу, изложенному в [8], решение краевой задачи (1), (2) получено применением конечного косинус-преобразования Фурье и представляет собой ряд вида

$$\phi\,(y, z) = \frac{-i}{d\rho_0\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_C\,(n)\, K_1\,(n, z) \times \\ \times \exp\left(-i\frac{\pi n y}{d}\right). \tag{10}$$

Здесь

$$Q_C\,(n) = \int\limits_0^d q\,(y) \cos\left(\frac{\pi n y}{d}\right) \mathrm{d}y,$$

$$K_1\,(n, z) = \frac{\operatorname{sh}\left((h - z)\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2}}\right)}{\operatorname{sh}\left(z\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2}}\right)}.$$

Применение к уравнению (3) и граничным условиям (4)–(7) для упругого слоя (или (4)–(6), (8) — для полупространства) преобразования Фурье по переменной y и последующее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к представлению компонент вектора перемещений $\mathbf{u}\,(y, z)$ точек упругого основания в интегральной форме

$$v\,(y, z) = \int\limits_0^d q\,(\xi)\, r_1\,(y - \xi, z)\,\mathrm{d}\xi + v_0\,(y, z) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\sigma R_1\,(\alpha, z)\,(Q\,(\alpha) + Q_0\,(\alpha)) \times \\ \times \exp(-i\alpha y)\,\mathrm{d}\alpha, \tag{11}$$

$$w(y,z)=\int\limits_0^d q(\xi)\,r_2(y-\xi,z)\,\mathrm{d}\xi+w_0(y,z)=\\=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\sigma R_2(\alpha,z)\left(Q(\alpha)+Q_0(\alpha)\right)\times\\\times\exp(-i\alpha y)\,\mathrm{d}\alpha,\quad(12)$$

где $R_j(\alpha,z)$, $j=1,2$ — соответствующие компоненты последнего столбца символа матрицы Грина для слоя или полупространства (согласно выбранной модели упругого основания), $Q(\alpha)$, $Q_0(\alpha)$ — Фурье-образы соответственно $q(y)$ и $q_0(y)$. Контур интегрирования σ почти всюду совпадает с вещественной осью, отклоняясь от нее в комплексную плоскость лишь при обходе вещественных точек ветвления и полюсов подынтегральной функции в соответствии с условием излучения [6, 7].

Исходя из условия взаимодействия сред (9) и используя соотношения (10)–(12), а также формулу суммирования Пуассона, получено интегральное уравнение относительно неизвестного гидродинамического давления $q(y)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_0^d k(y-2nd-\xi)\,q(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\right.\\\left.+\int\limits_0^d k(y-2nd+\xi)\,q(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)-\\-\rho_0\omega^2\int\limits_0^d r(y-\xi)\,q(\xi)\,\mathrm{d}\xi=f(y),\quad(13)$$

$$0<y<d,$$

где

$$k(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\alpha)\exp(-i\alpha y)\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$K(\alpha)=\sigma_3\operatorname{cth}(h\sigma_3),$$

$$\sigma_3=\sqrt{\alpha^2-\kappa_3^2},\quad\kappa_3=\frac{\omega}{c_0}.$$

Левая часть интегрального уравнения (13) может быть продолжена на всю действительную ось y с помощью функций $\phi_1(y)$ — в область $y<0$ и $\phi_2(y)$ — в область $y>d$. После этого, применив к уравнению интегральное преобразование Фурье и проделав ряд алгебраических преобразований, приходим к системе функциональных соотношений, матричное представление которой имеет вид

$$\mathbf{X}^+(\alpha)+\mathbf{B}(\alpha)\,\mathbf{X}^-(\alpha)=\mathbf{F}(\alpha).\qquad(14)$$

Здесь

$$\mathbf{X}^+(\alpha)=\begin{pmatrix}Q^+(\alpha)\\Q_1^+(\alpha)\\\Phi_1^+(\alpha)\\\Phi_2^+(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}^-(\alpha)=\begin{pmatrix}Q^-(\alpha)\\Q_1^-(\alpha)\\\Phi_1^-(\alpha)\\\Phi_2^-(\alpha)\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\alpha)=\begin{pmatrix}0\\0\\-F(-\alpha)\\-F(\alpha)\exp(-i\alpha d)\end{pmatrix},$$

$$Q^+(\alpha)\equiv Q(\alpha),$$

$\Phi_1^-(\alpha)$, $\Phi_2^+(\alpha)$, $F(\alpha)$ — трансформанты Фурье функций $q(y)$, $\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$, $f(y)$ соответственно,

$$Q^-(\alpha)=Q^+(-\alpha),$$
$$Q_1^+(\alpha)=Q^-(\alpha)\exp(i\alpha d),$$
$$Q_1^-(\alpha)=Q^+(\alpha)\exp(-i\alpha d),$$
$$\Phi_1^+(\alpha)=\Phi_1^-(-\alpha),\quad\Phi_2^-(\alpha)=\Phi_2^+(-\alpha),$$
$$\mathbf{B}(\alpha)=\|b_{ij}\|_{i.j=1}^4,$$

где

$$b_{ii}=0,\quad i=\overline{1{,}4},$$
$$b_{13}=b_{14}=b_{23}=b_{24}=0,$$
$$b_{31}=b_{42}=b_1,\quad b_{32}=b_{41}=b_2,$$
$$b_{12}=b_{21}=-\exp(i\alpha d),$$
$$b_{34}=b_{43}=\exp(-i\alpha d),$$

$$b_1=\frac{\rho\omega^2R(\alpha)}{K(\alpha)-\rho\omega^2R(\alpha)}\times\\\times\left(K(\alpha)\left(1+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(2i\alpha kd)\right)-\rho\omega^2R(\alpha)\right),$$

$$b_2=\frac{\rho\omega^2R(\alpha)\,K(\alpha)}{K(\alpha)-\rho\omega^2R(\alpha)}\times\\\times\exp(i\alpha d)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(2i\alpha kd).$$

Для слоя

$$R(\alpha) = \kappa_2^2\bigl[\sigma_1 \operatorname{sh}(\sigma_1 H)\operatorname{ch}(\sigma_2 H) - \\ -\alpha^2\sigma_2^{-1}\operatorname{sh}(\sigma_1 H)\operatorname{ch}(\sigma_2 H)\bigr](\Delta(\alpha))^{-1}, \quad (15)$$

где

$$\Delta(\alpha) = 4\mu\bigl[2\alpha^2 - \\ -\eta + \alpha^2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\left(\sigma_1^2\sigma_2^2+\eta^2\right)\operatorname{sh}(\sigma_1 H)\operatorname{sh}(\sigma_2 H) - \\ -\left(\alpha^2+\eta^2\right)\operatorname{ch}(\sigma_1 H)\operatorname{ch}(\sigma_2 H)\bigr],$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\alpha^2-\kappa_1^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\alpha^2-\kappa_2^2},$$

$$\eta = \alpha^2 - 0{,}5\kappa_2^2,$$

$$\kappa_1^2 = \rho\omega^2(\lambda+2\mu)^{-1}, \quad \kappa_2^2 = \rho\omega^2\mu^{-1}.$$

Для полупространства

$$R(\alpha) = \sigma_1\kappa_2^2(\Delta_1(\alpha))^{-1}, \\ \Delta_1(\alpha) = 4\mu\left(\alpha^2\sigma_1\sigma_2-\eta^2\right). \quad (16)$$

Для решения системы (14) использован интегральный метод факторизации [6, 7, 9], основы которого были заложены разработкой метода Винера–Хопфа [10], требующий проведения факторизации матрицы-функции $\mathbf{B}(\alpha)$ в виде произведения $\mathbf{B}(\alpha) = \mathbf{B}^+(\alpha)\,\mathbf{B}^-(\alpha)$ и вектора $\mathbf{G}(\alpha) = (\mathbf{B}^+(\alpha))^{-1}\mathbf{F}(\alpha)$ в виде суммы $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}^+(\alpha)+\mathbf{G}^-(\alpha)$ относительно контура σ (знаком «+» помечены функции, регулярные в области выше σ, а знаком «$-$» — ниже). Учитывая свойства элементов матрицы $\mathbf{B}(\alpha)$ и вектора $\mathbf{F}(\alpha)$, можно показать, что

$$\left(\left(\mathbf{B}^+(\alpha)\right)^{-1}\mathbf{X}^+(\alpha) - \mathbf{G}^+(\alpha)\right) = \mathrm{O}\left(|\alpha|^{-1}\right)$$

при $|\alpha| \to \infty$. Следовательно, общее решение краевой задачи Римана для (14) имеет вид

$$\mathbf{X}^+(\alpha) = \mathbf{B}^+(\alpha)\,\mathbf{G}^+(\alpha),$$

$$\mathbf{X}^-(\alpha) = \left(\mathbf{B}^-(\alpha)\right)^{-1}\mathbf{G}^-(\alpha).$$

Следует отметить, что матрица-функция $\mathbf{B}(\alpha)$ не обладает свойствами, необходимыми для применения теорем о факторизации матриц-функций [7]. Для факторизации $\mathbf{B}(\alpha)$ сначала была проведена ее нормализация, т.е. приведение к виду, допускающему представление $\mathbf{B}(\alpha) \to \mathbf{E} + O(\alpha^{-\kappa})$, $\kappa > 0$, $|\alpha| \to \infty$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, с помощью умножения ее слева и справа на специального вида треугольные матрицы. После факторизации полученной матрицы был выполнен переход к исходной, которая в свою очередь была представлена в виде произведения двух матриц с элементами, регулярными выше и ниже контура σ.

Факторизация вектора $\mathbf{G}(\alpha)$ выполнена с использованием теории вычетов.

В результате проведенных операций построена функция $Q(\alpha)$, являющаяся первой компонентой вектора $\mathbf{X}^+(\alpha)$ и представляющая собой преобразование Фурье искомого гидродинамического давления $q(y)$

$$Q(\alpha) \equiv Q^+(\alpha) = \\ = \frac{1}{2}\Biggl(\sum_k F^*(-p_k)\,\Psi(\alpha,p_k) + \\ + \sum_n F(z_n)\frac{\psi^*(\alpha,-z_n)}{\alpha+z_n} + \\ + \sum_m F(-\xi_m)\frac{\psi^*(\xi_m,\alpha)}{\alpha+\xi_m} + \\ + \left\{\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Theta_j} F(u)\,\Psi(\alpha,u)\,\mathrm{d}u\right\}\Biggr) + \\ + \frac{1}{2}\exp(i\alpha d)\times \\ \times\Biggl(\sum_k F^*(-p_k)\,\Psi(\alpha,p_k)\exp(ip_k d) + \\ + \sum_n F(-z_n)\frac{\psi^*(\alpha,-z_n)\exp(iz_n d)}{\alpha+z_n} + \\ + \sum_m F(\xi_m)\frac{\psi^*(\xi_m,\alpha)\exp(i\xi_m d)}{\alpha+\xi_m} + \\ + \left\{\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\Theta_j} F(u)\,\Psi(\alpha,u)\exp(iud)\,\mathrm{d}u\right\}\Biggr).$$

Здесь символ «*» указывает на вычет функции в соответствующей точке, т.е. $R^*(p_k) = \operatorname*{res}_{\alpha=p_k} R(\alpha)$. Слагаемые в фигурных скобках описывают интегралы по берегам проведенных из точек ветвления κ_j, $j = 1, 2$, разрезов и имеют место только в задаче для упругого основания в виде полупространства. В последнем соотношении использованы обозначения

$$F(\alpha) = R(\alpha)\,Q_0(\alpha),$$

$$\psi(\alpha,\beta) = \psi_2(\alpha)\,\psi_1(\beta),$$

$$\Psi(\alpha,\beta) = \frac{\psi(\alpha,\beta) - \psi(\beta,\alpha)}{\alpha-\beta} + \\ + \frac{\psi(\alpha,-\beta) - \psi(-\beta,\alpha)}{\alpha+\beta},$$

где

$$\psi_1(\alpha) = \frac{1}{P^+(\alpha)},$$

$$\psi_2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} l^+(\alpha) P^+(\alpha) \exp(-i\alpha d),$$

$$l^+(\alpha) = \frac{\exp(i\alpha d)}{2\pi(\alpha+i)^\varepsilon} \int\limits_{-d}^{d} \exp(i\alpha x) \times \\ \times \int\limits_{\Gamma} \frac{(u+i)^\varepsilon \exp(-iux)}{P(u)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}x, \quad \varepsilon > 0,$$

$$P(\alpha) = P_1(\alpha)\left(|\alpha| + \mathrm{O}\left(|\alpha|^{-1}\right)\right),$$

$$P_1(\alpha) = \frac{\rho\omega^2 R(\alpha)}{K(\alpha) - \rho\omega^2 R(\alpha)},$$

где вид функции $R(\alpha)$ для упругого слоя и полупространства описывается соотношениями (15), (16) соответственно, p_k — положительные вещественные полюса $R(\alpha)$. При этом в задаче для слоя в качестве упругого основания

$$P^+(\alpha) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{N_0}(\alpha+z_k)}{\prod\limits_{k=1}^{N}(\alpha+\xi_k)} \frac{c_3(\alpha+ib)^{N-N_0}}{\sqrt{\alpha+ib}},$$

для основания в виде полупространства —

$$P^+(\alpha) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{N_0}(\alpha+z_k)}{\prod\limits_{k=1}^{N}(\alpha+\xi_k)} \times \\ \times \frac{c_3(\alpha+ib)^{N-N_0}}{\sqrt{\alpha+ib}} \frac{\sqrt{\alpha+\kappa_1}}{\sqrt{\alpha+\kappa_2}},$$

где

$$c_3^2 = \frac{\rho\omega^2\kappa_2^2}{4\mu\left(\kappa_2^2 - \kappa_1^2\right)},$$

N_0 — количество положительных нулей z_k, а N — количество положительных полюсов ξ_k функции $P_1(\alpha)$. Выбор параметра b определяет точность применяемого факторизационного метода решения интегрального уравнения, порядок отбрасываемых членов тем меньше, чем больше значение b [7].

Таким образом, в работе получено и решено интегральное уравнение первого рода с ядром, зависящим как от разности, так и от суммы аргументов, построена функция, описывающая распределение контактных напряжений в области раздела жидкой и упругой сред с учетом физических и частотных факторов.

Актуальность исследований динамического взаимодействия гидротехнических сооружений с деформируемым основанием определяется повышенными требованиями к надежности их эксплуатации и к степени достоверности прогноза последствий вибровосейсмовоздействий. Результаты проведенного исследования могут служить дальнейшему развитию методов решения контактных динамических задач о совместных колебаниях упругой и жидкой сред.

Описанная модель может быть использована при разработке более сложных моделей, обеспечивающих определение основных характеристик контактного взаимодействия гидроупругих систем «жидкость–грунт» с учетом раздельного или одновременного действия на них природных сейсмических волн и искусственно созданных вибрационных колебаний, выявление условий возникновения и существования опасных для сооружения динамических режимов воздействия и оценки их частотного диапазона в зависимости от определяющих параметров, исследование особенностей динамического поведения рассматриваемых систем в зависимости от размеров поверхностного объекта контактирующего с упругой средой.

Литература

1. *Коренев Б.Г.* Действие импульса на цилиндрические и призматические резервуары, наполненные жидкостью. В кн.: Строительная механика. М.: Стройиздат, 1966. С. 213–266.
2. *Климов М.А.* Определение присоединенной массы жидкости в случае неосесимметричных колебаний днищ резервуаров. В кн.: Динамические напряжения и деформации в элементах энергетического оборудования. М.: Наука, 1977. С. 76–83
3. *Сеймов В.М., Островерх Б.Н., Ермоленко А.И.* Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений. Киев: Наук. думка, 1983. 320 с.
4. *Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.

5. *Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С., Зарецкая М.В.* Исследование напряженного состояния слоистой среды с жидким включением // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 1. С. 71–78.
6. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
8. *Рубцов С.Е.* Исследование установившихся колебаний ограниченного объема жидкости на упругом слое // Известия высших учебных заведений, Сев.-Кав. регион, естественные науки, 2000. № 1. С. 49–51.
9. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах. М.: Наука, 1984. 285 с.
10. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Иностр. лит., 1962. 280 с.

References

1. Korenev B.G. Dejstvie impul'sa na cilindricheskie i prizmaticheskie rezervuary, napolnennye zhidkost'ju [Pulse action on the cylindrical and prismatic tanks filled with liquid]. In *Stroitel'naja mehanika* [Structural mechanics]. Moscow, Strojizdat Pub., 1966, pp. 213–266. (In Russian)
2. Klimov M.A. Opredelenie prisoedinennoj massy zhidkosti v sluchae neosesimmetrichnyh kolebanij dnishh rezervuarov [Defining the associated mass of liquid in the case of axisymmetric vibrations of tank bottoms]. In *Dinamicheskie naprjazhenija i deformacii v jelementah jenergeticheskogo oborudovanija* [Dynamic stresses and strains in power equipment elements]. Moscow, Nauka Publ., 1977, pp. 76–83. (In Russian)
3. Sejmov V.M., Ostroverh B.N., Ermolenko A.I. *Dinamika i sejsmostojkost' gidrotehnicheskih sooruzhenij* [The dynamics and earthquake resistance of hydraulic structures]. Kiev, Nauk. dumka Pub., 1983, 320 p. (In Russian)
4. Sejmov V.M., Trofimchuk A.N., Savickij O.A. *Kolebanija i volny v sloistyh sredah* [Oscillations and waves in layered media]. Kiev, Nauk. dumka Pub., 1990, 224 p.
5. Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Telyatnikov I.S., Zaretskaja M.V. Issledovanie naprjazhennogo sostojanija sloistoj sredy s zhidkim vkljucheniem [Investigation of the stress state of layered medium with liquid inclusion]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 1, pp. 71–78. (In Russian)
6. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problem of elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 455 p. (In Russian).
7. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskih oblastei* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 319 p. (In Russian)
8. Rubtsov S.E. Issledovanie ustanovivshihsja kolebanij ogranichennogo ob#ema zhidkosti na uprugom sloe [The study stationary vibrations limited volume of fluid in the elastic layer]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij, Severo-Kavkazskij region, estestvennye nauki* [Proc. of the Universities. North-Caucasian region. Natural Sciences], 2000, no. 1, pp. 49–51. (In Russian)
9. Babeshko V.A. *Obobshchennyi metod faktorizacii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka Pub., 1984, 265 p. (In Russian)
10. Nobl B. *Metod Vinera–Hopfa* [Wiener–Hopf method]. Moscow, Zurubezhnaya lit. Pub., 1962, 280 p. (In Russian)

Статья поступила 26 ноября 2016 г.