УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ПОДВИЖНЫМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ

Сыромятников П. В.

THE SIMULATION OF SURFACE DISTURBANCES ELASTIC SEMI-INFINITE MEDIUM CAUSED BY MOVING OSCILLATING SOURCE

Syromyatnikov P. V.[*,**]

[*] Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Krasnodar Branch, Krasnodar, 350040, Russia
[**] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru

Abstract. This paper considers the problem of the motion at a constant speed over the surface of the elastic layer of the mobile source which oscillates. The problem is solved by means of Fourier integral transformations. The homogeneous boundary value problem is being considered in the moving coordinate system, connected with the source. It is assumed that there is a steady-harmonic oscillation. By using the direct method of contour integration, which is described in detail in the work, the elastic surface perturbation obtained by numerical integration of two-dimensional Fourier integrals. This method makes it possible to calculate the wave processes in the same manner as for the fixed sources. Due to its simplicity, the method of integration can be considered as engineering method, although it can be successfully used for scientific purposes. Examples of calculation of the surface perturbations of isotropic elastic layer in flat and three-dimensional problem are given, caused by moving source in a speed range from 0.5 values of Rayleigh waves velocity up to 1.16 of the longitudinal wave velocity, both in the presence of the oscillations and in the absence of oscillations. The method can be applied without any additional modifications for multilayer anisotropic and isotropic materials, as cushion base.

Keywords: elastic layer, surface moving oscillating source, surface perturbation, numerical integration.

Исследованию поверхностных возмущений, вызванных движущимися по поверхности твердого тела источниками, посвящено немалое количество работ [1–5]. Как правило, к задачам подобного рода применимы те же методы, что и для динамических и статических задач теории упругости [1–4] с неподвижным источником, но они имеют и свою определенную специфику, порождающую необходимость в модификациях имеющихся методов. В [4] описан принцип соответствия, устанавливающий взаимосвязь между задачами с подвижным и неподвижным источником.

Данная работа посвящена моделированию возмущений на поверхности изотропного слоя, вызванных равномерно распределенной в прямоугольной области вертикальной поверхностной нагрузкой, перемещающейся с постоянной скоростью в фиксированном направлении и совершающей гармонические колебания.

Задача решается с помощью интегральных преобразований Фурье [2, 3] и методов численного интегрирования. Благодаря своей простоте метод интегрирования можно считать инженерным, при этом он вполне пригоден для исследовательских целей. Специфика задачи заключается в появлении так называемой наведенной анизотропии, которая существенно осложняет расчет контурных интегралов при традиционном подходе к их вычислению [3].

1. Постановка задачи

Рассматривается изотропный упругий слой в декартовой системе координат

Сыромятников Павел Викторович, канд. физ.–мат. наук, заведующий лабораторией прикладной математики и механики Южного научного центра РАН, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края (16-48-230336 р_а), программ Президиума Южного научного центра РАН.

$\{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$, занимающий объем $-\infty < x, y < \infty$, $-h \leqslant z \leqslant 0$, где h — толщина слоя. Слой лежит на жестком основании $z = -h$. Вектор перемещений в упругой среде $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^{\mathrm{T}}$ описываются уравнениями Ламе для случая отсутствия объемных сил

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\,\mathrm{div}(\mathbf{u})}{\partial x_j} + \mu\Delta u_j + \rho\frac{\partial u_j^2}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$
$$j = 1, 2, 3.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность, t — время.

Гармоническая нагрузка $q\exp(-i\omega t)$, заданная на поверхности слоя $x_3 = z = 0$ в прямоугольной области Ω со сторонами L_x, L_y, движется без вращения вдоль прямой Ox_1 с постоянной скоростью v (в дальнейшем общий экспоненциальный множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается). В подвижной системе координат $\{\tilde{x}, y, z\}$, где

$$\tilde{x} = x - vt, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z, \quad (1.2)$$

область Ω описывается неравенствами

$$-\frac{L_x}{2} \leqslant \tilde{x} \leqslant \frac{L_x}{2}, \quad -\frac{L_y}{2} \leqslant y \leqslant \frac{L_y}{2}. \quad (1.3)$$

На поверхности слоя $z = 0$ заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{i3}(\tilde{x}, y, z)|_{z=0} = q_i, \quad (1.4)$$
$$i = 1, 2, 3, \quad (\tilde{x}, y) \in \Omega,$$
$$\sigma_{j3}\,(\tilde{x}, y, z)|_{z=0} = 0, \quad (\tilde{x}, y) \notin \Omega.$$

На нижнем основании при $z = -h$ граничные условия имеют вид

$$u_j(x, y, z)|_{z=-h} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

Требуется определить смещения $u(x, y, z, t\,)|_{z=0}$ как функцию координат $\{x, y\}$, времени t, скорости v и, в случае гармонических колебаний, частоты осцилляций ω.

2. Метод решения

Задачу (1.1)–(1.5) можно рассматривать как нестационарную задачу общего вида, однако такой подход труднореализуем.

С другой стороны, в системе координат, связанной с подвижным источником $\{\tilde{x}, y, z\}$ (1.2), задачу можно рассматривать как частный, хотя и весьма специфический, случай аналогичной задачи для неподвижного гармонического поверхностного источника [2].

Данное обстоятельство позволяет для решения задачи (1.1)–(1.5) использовать большой арсенал средств, разработанный для задач с неподвижным гармоническим источником [2–4].

Решение задачи (1.1)–(1.5), как и в случае с неподвижным источником, может быть представлено в виде двойного интеграла Фурье [2,3]:

$$u_j(\tilde{x}, y, \omega, v) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\sum_{n=1}^{3}\tilde{K}_{jn}(\alpha_1, \alpha_2, \omega, v)Q_n(\alpha_1, \alpha_2)\times$$
$$\times\exp\left(-i(\alpha_1\tilde{x} + \alpha_2 y)\right)\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2. \quad (2.1)$$

Здесь матрица $\tilde{\mathbf{K}}$ получена несложной суперпозицией из соответствующего образа Фурье матрицы Грина для неподвижного источника K, $Q(\alpha_1, \alpha_2)$ является образом Фурье вектора поверхностной нагрузки в подвижной системе координат, Γ_1, Γ_2 представляет собой контуры в комплексных плоскостях $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_2\}$, отклоняющиеся при обходе вещественных полюсов матрицы $\tilde{\mathbf{K}}$ в соответствии с принципом предельного поглощения [2–4]. В плоском случае двойной интеграл (2.1) преобразуется в однократный интеграл вида

$$u_j(\tilde{x}, z, \omega, v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\sum_{n=1}^{3}\tilde{K}_{jn}(\alpha_1, 0, z, \omega, v)\times$$
$$\times Q_n(\alpha_1)\exp(-i\alpha_1\tilde{x})d\alpha_1. \quad (2.2)$$

В полярных системах координат

$$\alpha_1 = \alpha\cos\tau, \quad \alpha_2 = \alpha\sin\tau,$$
$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \tau = \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{x} = r\cos\beta, \quad y = r\sin\beta,$$
$$r = \sqrt{\tilde{x}^2 + y^2}, \quad \beta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{\tilde{x}}.$$

интеграл (2.1) можно записать в следующем виде:

$$u_j(r, \beta, z) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\sum_{n=1}^{3}\tilde{K}_{jn}(\alpha, \tau, z, \omega, v)\times$$
$$\times Q_n(\alpha, \tau)\alpha\exp(-ir\alpha\cos(\tau-\beta))d\tau d\alpha. \quad (2.4)$$

Использование интегрального представления (2.1) в виде (2.4) в вычислительном отношении более удобно. Далее в расчетах исследуются вертикальные смещения u_3, вызванные вертикальной нагрузкой $Q = Q_3$, которые можно представить аналогично (2.4)

$$u_3(r,\beta,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_\Gamma \tilde{K}_{33}(\alpha,\tau,z,\omega,v)\times$$
$$\times Q_3(\alpha,\tau)\alpha\exp(-ir\alpha\cos(\tau-\beta))\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\alpha. \quad (2.5)$$

Функция $K_{33} = R$ (остальные элементы матрицы $\mathbf{K}$ описаны в [2]) для слоя на жестком основании имеет вид

$$\begin{aligned}R(\alpha,z) = (\sigma_1(\alpha^2(\sigma_1\sigma_2\operatorname{sh}\sigma_1 z+&\\ +\gamma^2\operatorname{sh}\sigma_2 z+\gamma^2\operatorname{sh}\sigma_2\operatorname{ch}\sigma_1(h+z)&\\ -\alpha^2\operatorname{ch}\sigma_1 h\operatorname{sh}\sigma_2(h+z))+&\\ +\sigma_1\sigma_2(\alpha^2\operatorname{sh}\sigma_1 h\operatorname{ch}\sigma_2(h+z))-&\\ -\gamma^2\operatorname{ch}\sigma_2 h\operatorname{sh}\sigma_1(h+z))/\Delta,&\quad (2.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) = 2\mu(2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^2+&\\ +\alpha^2(\gamma^4+\sigma_1^2\sigma_2^2)\operatorname{sh}\sigma_1 h\operatorname{sh}\sigma_2 h-&\\ -\sigma_1\sigma_2(\alpha^4+\gamma^4)\operatorname{ch}\sigma_1 h\operatorname{ch}\sigma_2 h),&\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\alpha^2-\kappa_1^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\alpha^2-\kappa_2^2},$$

$$\kappa_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \kappa_2^2/2.$$

Рассмотрим вторую производную по времени, входящую в уравнения движения Ляме (1.1)

$$\rho\frac{\partial^2(u(x-vt)\exp(-i\omega t))}{\partial t^2} =$$
$$= \rho(u''-2i\omega u'-\omega^2 u)\exp(-i\omega t) =$$
$$= \rho(v^2u_{xx}+2iv\omega u_x-\omega^2 u)\exp(-i\omega t). \quad (2.7)$$

Согласно (2.7) в образах Фурье $U = F_{x,y}[u]$ получаем соответствие $U \leftrightarrow u$

$$\rho\frac{\partial^2(u(x-vt)\exp(-i\omega t))}{\partial t^2} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \rho(-\alpha_1^2v^2U+2\omega v\alpha_1 U-\omega^2 U)\exp(-i\omega t) =$$
$$= -\rho(\omega-\alpha_1 v)^2 U\exp(-i\omega t).$$

Последнее соотношение означает, что в образах Фурье уравнений Ляме для неподвижного источника квадрат частоты ω^2 заменяется в случае подвижной системы координат на выражение [2] $\omega^2 \leftrightarrow (\omega-\alpha_1 v)^2$. Из этого также следует, что отличие символа матрицы Грина $\tilde{K}$ для подвижного источника от символа матрицы Грина K для случая неподвижного источника ограничивается только содержащими квадрат частоты членами κ_1^2, κ_2^2 (2.6), которые приобретают следующий вид:

$$\kappa_1^2 = \frac{\rho\,(\omega-\alpha_1 v)^2}{(\lambda+2\mu)}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho\,(\omega-\alpha_1 v)^2}{\mu}.$$

Дисперсионные поверхности, в зависимости от величины скорости v, могут претерпевать значительные изменения, влияющие на вид контуров Γ_j, Γ.

При ненулевой скорости $v \neq 0$ изотропная среда приобретает специфическую анизотропию, обусловленную направлением движения и величиной v. В зависимости от величины скорости может меняться тип уравнений [3,4].

3. Метод прямого контурного интегрирования

Метод прямого контурного интегрирования, используемый в дальнейшем в качестве основного метода интегрирования, представляет собой алгоритм непосредственного вычисления контурных интегралов (2.4) в ближней зоне.

Метод основывается на использовании принципа предельного поглощения [2], который при гармонических колебаниях вида $\exp(-i\omega t)$, $0 < \omega$, предполагает введение в уравнения движений слагаемого $\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t}$, $0 < \varepsilon \ll \omega$, соответствующего действию малого внутреннего трения, что эквивалентно введению комплексной частоты

$$\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i\frac{\varepsilon}{\rho}\omega. \quad (3.1)$$

Обозначим решение краевой задачи с комплексной частотой $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$, тогда результирующее решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ получается как равномерный предел

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to+0}\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

При введении комплексной частоты все вещественные полюса символа матрицы Грина $\mathbf{K}$ смещаются с действительной оси в комплексную плоскость. Тогда интеграл по Γ в (2.5) может быть вычислен непосредственно вдоль вещественной полуоси Γ_R без деформирования контура в комплексную плоскость, т.к. в этом случае вещественная полуось является корректным контуром интегрирования. При введении ненулевого ε (3.1) возникает погрешность, связанная с возникновением мнимых частей действительных полюсов и смещением комплексных. Кроме того, предполагается ограниченность вещественного контура Γ_R некоторой величиной R, что также вносит свою погрешность. В изотропном случае каждая мода $\mathbf{u}_\varepsilon^{(n)}$ с номером n при этом представляет собой неоднородную волну, амплитуда которой экспоненциально убывает с удалением от источника

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(n)}(r,\phi) \sim \exp\left(-\varepsilon r/\left|c_g^{(n)}\right|\right)\mathbf{u}^{(n)}(r,\phi), \quad (3.3)$$

где $\mathbf{u}^{(n)}(r,\phi)$ — точное решение, соответствующее $\varepsilon=0$, $c_g^{(n)}$ — групповая скорость моды с номером n (для анизотропных сред вид зависимости (3.3) сохраняется, при этом зависимость от угла ϕ имеет сложный вид). Однако, если $\varepsilon : 0<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon$ достаточно мало и $c_g^{(n)}\neq 0$, то в ближней зоне $0\leqslant r<r_0$ погрешность $(\mathbf{u}(r)-\mathbf{u}_\varepsilon(r))$ может, по крайней мере, не превышать погрешности вычисления контурных интегралов (2.5) в представлении $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ с нулевой мнимой частью частоты для деформированного контура Γ. Поэтому вносимую погрешность метода, связанную с ненулевым ε, всегда можно сделать значительно меньше других неизбежных составляющих суммарной вычислительной погрешности. Действительно, на основании формулы (3.3) можно приближенно оценить относительную погрешность для отдельной компоненты вектора $u_\varepsilon(r)$

$$\begin{aligned}\delta(r) = |1-u_\varepsilon(r)/u(r)| \approx \\ \approx |1-\exp(-\varepsilon r/|c_g|)| \approx |\varepsilon r/c_g|.\end{aligned} \quad (3.4)$$

В нерезонансном случае для любой фиксированной частоты можно указать диапазон изменения $\delta(r)$

$$\begin{aligned}\varepsilon r/c_{\max}^{(g)} \leqslant \delta(r) \leqslant \varepsilon r/c_{\min}^{(g)},\\ c_{\max}^{(g)} = \max_{0\leqslant\tau\leqslant 2\pi}|c_g(\tau)|,\\ c_{\min}^{(g)} = \min_{0\leqslant\tau\leqslant 2\pi}|c_g(\tau)|,\end{aligned} \quad (3.5)$$

где τ — угол в плоскости волновых чисел (2.3).

Данный метод не может быть использован непосредственно для вычислений предела $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ (3.2), когда интегралы для $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ становятся расходящимися, но при этом вполне пригоден для численной оценки точного решения $\mathbf{u}(\mathbf{x})\approx\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$. Расчет интегралов по ограниченному вещественному контуру Γ_R осуществляется с помощью специальных квадратур для сильно осциллирующих функций, повторное интегрирование не требует привлечения специальных методов, поскольку осцилляции при повторном интегрировании намного меньше. Ключевым моментом в реализации метода являются устойчивость и экономичность алгоритмов расчета символа матрицы Грина, в том числе в интервалах больших волновых чисел. В практических расчетах наибольшая точность достигается при минимальных значениях ε, однако при этом расчетное время растет пропорционально величине (r/ε).

Данный метод применим для расчета статических, гармонических и нестационарных полей в ближней от источника зоне. Сравнение результатов, полученных по методу прямого контурного интегрирования с другими методами показало, что различия не превышают средних ошибок вычислений. Благодаря своей простоте данный метод можно отнести к инженерным методам, хотя он вполне пригоден для научных исследований.

Заметим, что математически корректное решение может быть получено только для контуров, деформированных в комплексные плоскости, поскольку при выполнении данного условия возможно получить равномерный при $\varepsilon\to 0$ предел, дающий решение исходной задачи (1.1)–(1.5).

4. Численные результаты

В численных расчетах были приняты следующие значения параметров слоя, близкого по механическим свойствам к песчанику

$$\begin{aligned}\lambda = 2{,}38833\cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\\ \mu = 2{,}448\cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\\ \rho = 1{,}7\cdot 10^3\ \text{Кг/м}^3,\quad h=100\ \text{м}.\end{aligned} \quad (4.1)$$

Значениям параметров (4.1) соответствуют следующие скорости поперечной объемной волны v_s, продольной объемной волны v_p и релеевской волны v_r в полупространстве:

$$\begin{aligned}v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 120\ \text{м/с},\\ v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = 207\ \text{м/с},\\ v_r \approx 110{,}267\ \text{м/с}.\end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее везде параметры для расчетов и результаты расчетов приводятся в безразмерном виде. Приведем соответствующие величинам (4.2) безразмерные скорости

$$v_s = 1{,}2, \quad v_p = 2{,}07, \quad v_r \approx 1{,}10267. \quad (4.3)$$

В качестве вертикального поверхностного подвижного источника рассматривался источник

$$q_3 = q(\tilde{x}, y) = -1, \quad -\frac{L_y}{2} \leqslant y \leqslant \frac{L_y}{2},$$

$$-\frac{L_x}{2} \leqslant (\tilde{x}) \leqslant \frac{L_x}{2}, \quad L_x = L_y = 0{,}1. \quad (4.4)$$

Приведенные далее на рис. 1, 2 графики вертикальных смещений u_3 рассчитаны по формулам (2.2), (2.5).

Интегралы рассчитывались методом прямого контурного интегрирования при введении комплексной частоты ω_ε (3.1) с параметром $\varepsilon = 10^{-2}$ по ограниченному вещественному контуру $\Gamma = \Gamma_R : [0, R]$. В расчетах использовались программы вычисления интегралов от осциллирующих функций пакета NAG [6].

На рис. 1 представлены графики решений плоской задачи при наличии осцилляций, приведены значения действительной части $\operatorname{Re} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$, мнимой части смещений $\operatorname{Im} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$, амплитуды $|u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)|$ для безразмерных частот $\omega = 0{,}1;\ 1;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 4;\ 5;\ 10$ при скорости $v = 0{,}5v_r$. Согласно анализу дисперсионных кривых при скорости $v = 0{,}5v_r$ распространяющиеся волны могут возникать при частоте $\omega \geqslant 1{,}8$, до этой частоты колебания не распространяются (рис. 1а–1в). Как видно из рис. 1г–1з, волновые поля перед источником и позади источника сильно различаются. При малых частотах, как правило, амплитуда позади источника больше, чем перед источником (рис. 1г–1е), однако, например, при частотах $\omega = 5$, 10 наблюдается обратное соотношение амплитуд (рис. 1ж, 1з). Рассмотрим более подробно направленность движения волн и соотношения амплитуд позади и впереди источника. Так, колебания, изображенные на рис. 1а, 1б, (частоты соответственно $\omega = 0{,}01;\ 0{,}1$), не распространяются (локализованы). Для рис. 1в, частота $\omega = 1$, имеем положительно направленное движение (в направлении движения источника) слева и справа от источника примерно с одинаковой скоростью $v_1^{(L)} > 0$, $v_1^{(R)} > 0$, $v_1^{(L)} \approx v_1^{(R)}$, с удалением от источника колебания достаточно быстро затухают.

На рис. 1г, 1д (частоты $\omega = 2{,}5$, 3) представлены случаи однонаправленного движения в положительном направлении, когда $v_1^{(L)} > 0$, $v_j^{(R)} > 0$, $v_1^{(L)} > v_{\max}^{(R)}$, убывание амплитуд волн с расстоянием медленное. Для рис. 1е, 1ж, 1з, частоты $\omega = 4;\ 5;\ 10$, движения разнонаправлены позади и впереди источника: $v_1^{(L)} < 0$, $v_j^{(R)} > 0$, при этом в случае рис. 1е – $\left|v_1^{(L)}\right| > v_{\max}^{(R)}$, в случае рис. 1ж, 1з — $\left|v_1^{(L)}\right| < v_{\max}^{(R)}$.

Рассмотрим результаты для пространственной задачи в случае отсутствия осцилляций, $\omega = 0$.

Приведенный на рис. 2 график вертикальных смещений $u_3\,(\tilde{x}, y, v)$ рассчитан для скорости $v = 2{,}4 = 2{,}17v_r = 2v_s = 1{,}16v_p$. В силу геометрической симметрии источника относительно вектора направления движения $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}^{\mathrm{T}}$ и симметричном (равномерном) распределении нагрузки, картина поверхностных возмущений $u_3(\tilde{x}, y, v)$ является симметричной относительно оси OX при любой скорости.

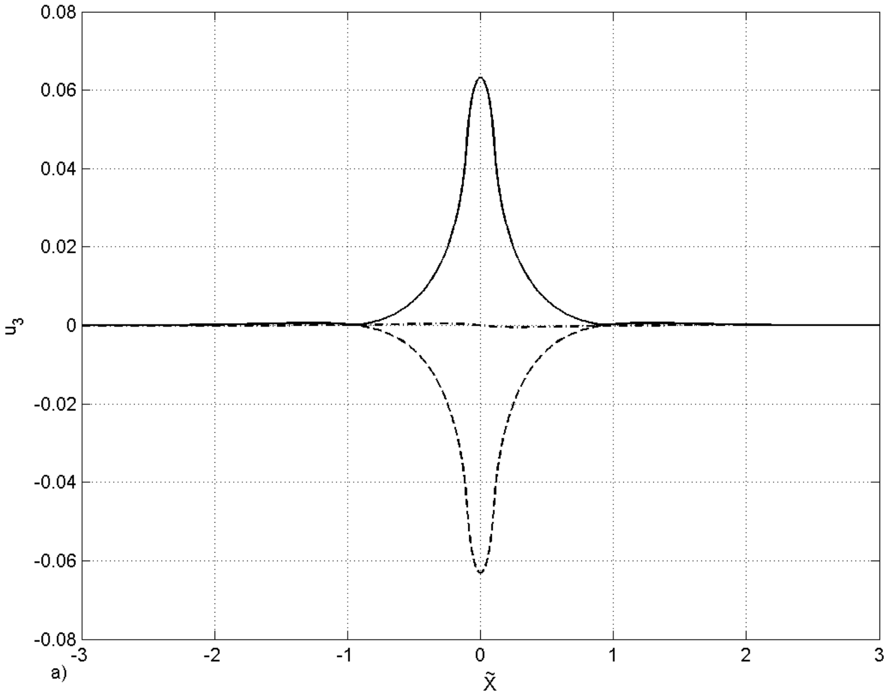
На рис. 2 можно выделить две статических структуры в виде конусов Маха: более четко выраженный конус с меньшим углом соответствует скорости релеевских волн, конус Маха с большим углом и со значительно меньшей амплитудой соответствует скорости продольных волн. Теоретически возможный при данной скорости конус Маха, определяемый скоростью поперечных волн, либо имеет очень малую относительную амплитуду, которую численно выделить данным способом нельзя, либо вообще не образуется при данном способе возбуждения.

В рассмотренной задаче о движении источника по поверхности полуограниченного упругого тела метод прямого контурного интегрирования показал высокую эффективность.

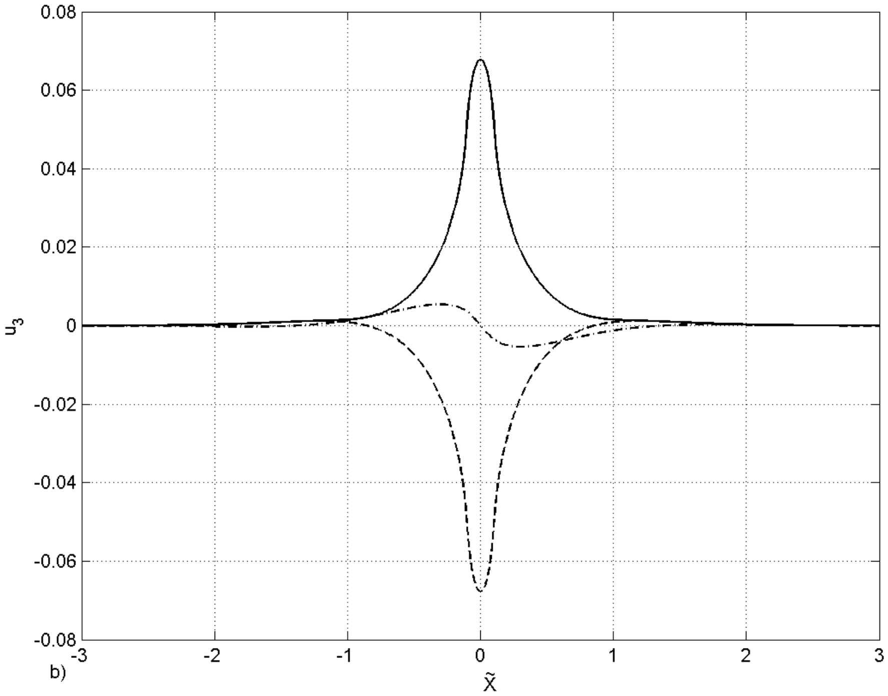
Разработанные алгоритмы могут применяться без дополнительных модификаций для случая многослойных изотропных и анизотропных сред типа пакета слоев или многослойного полупространства.

Литература

1. *Pflanz G., Garcia J., Schmid G.* Vibrations due to loads moving with sub-critical and super-critical velocities on rigid track // Proc. of Intern.

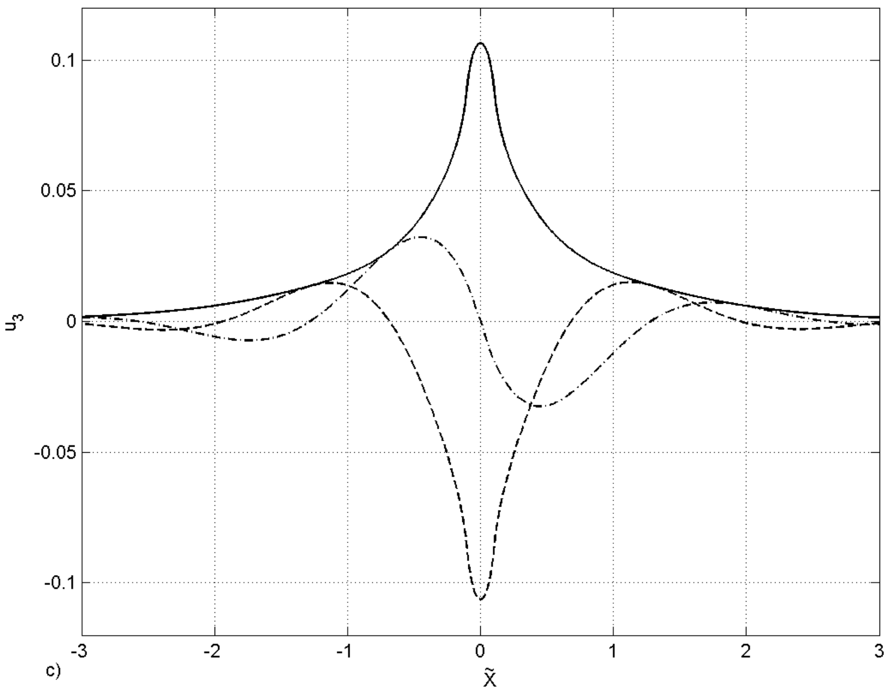


а)

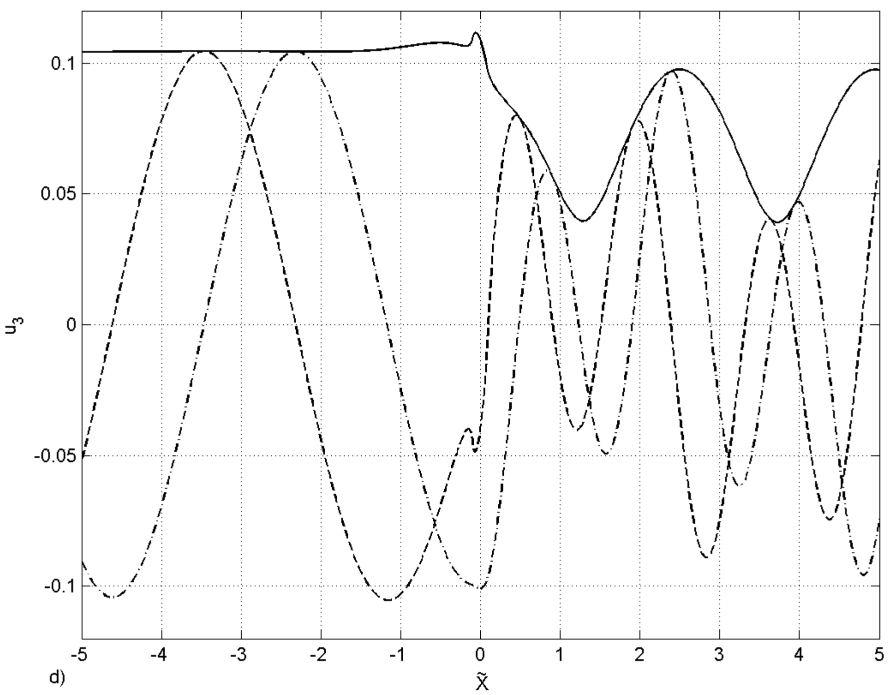


б)

Рис. 1. Вид $\operatorname{Re} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (пунктирная линия), $\operatorname{Im} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (штрих-пунктирная линия), $|u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)|$ (сплошная линия), скорость $v = v_r/2$, безразмерные частоты: а) $\omega = 0{,}1$, б) $\omega = 1$, в) $\omega = 2$, г) $\omega = 2{,}5$, д) $\omega = 3$, е) $\omega = 4$, ж) $\omega = 5$, з) $\omega = 10$

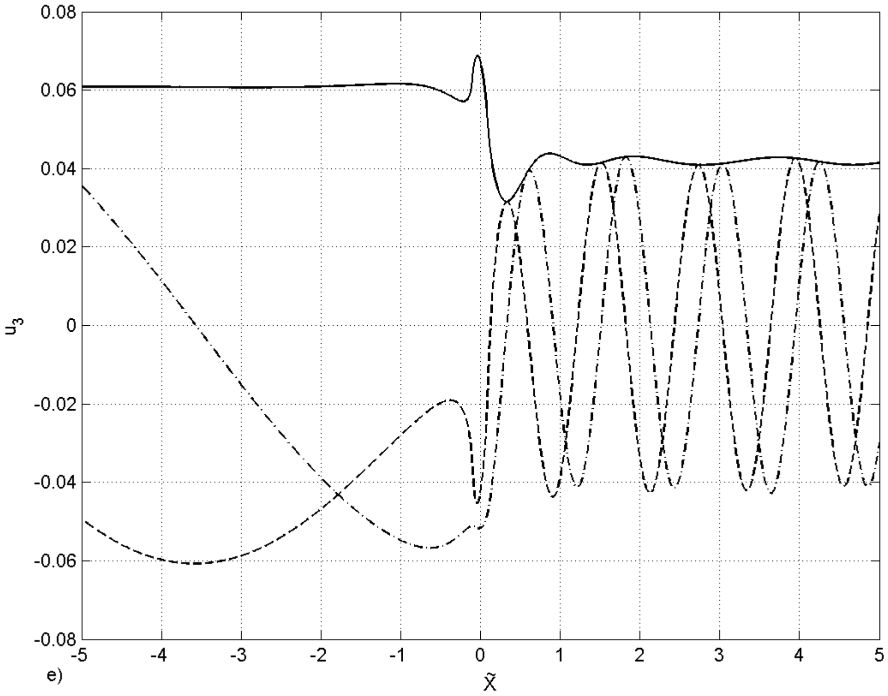


в)

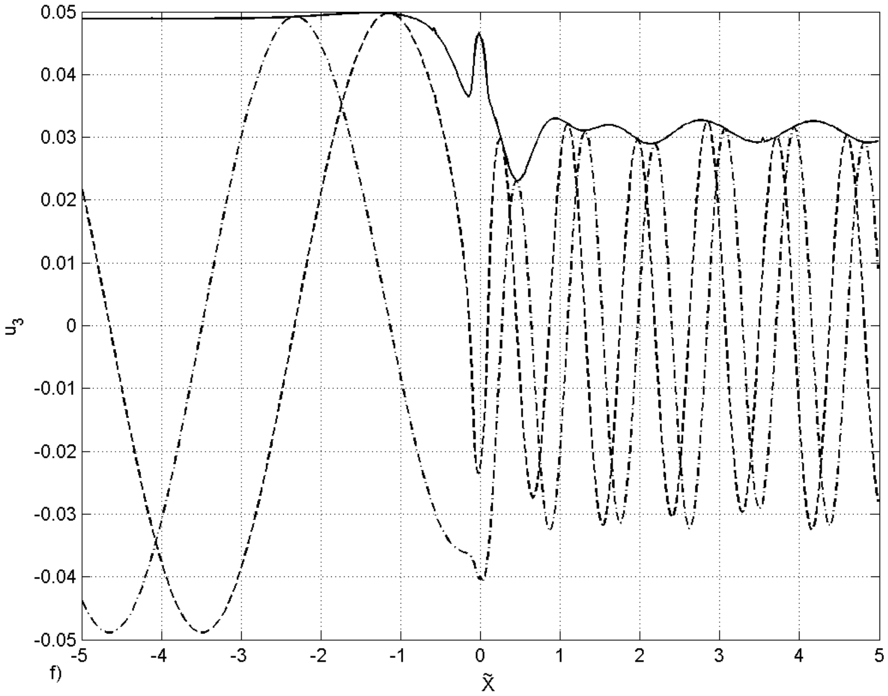


г)

Рис. 1. Вид $\mathrm{Re}\, u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (пунктирная линия), $\mathrm{Im}\, u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (штрих-пунктирная линия), $|u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)|$ (сплошная линия), скорость $v = v_r/2$, безразмерные частоты: а) $\omega = 0{,}1$, б) $\omega = 1$, в) $\omega = 2$, г) $\omega = 2{,}5$, д) $\omega = 3$, е) $\omega = 4$, ж) $\omega = 5$, з) $\omega = 10$

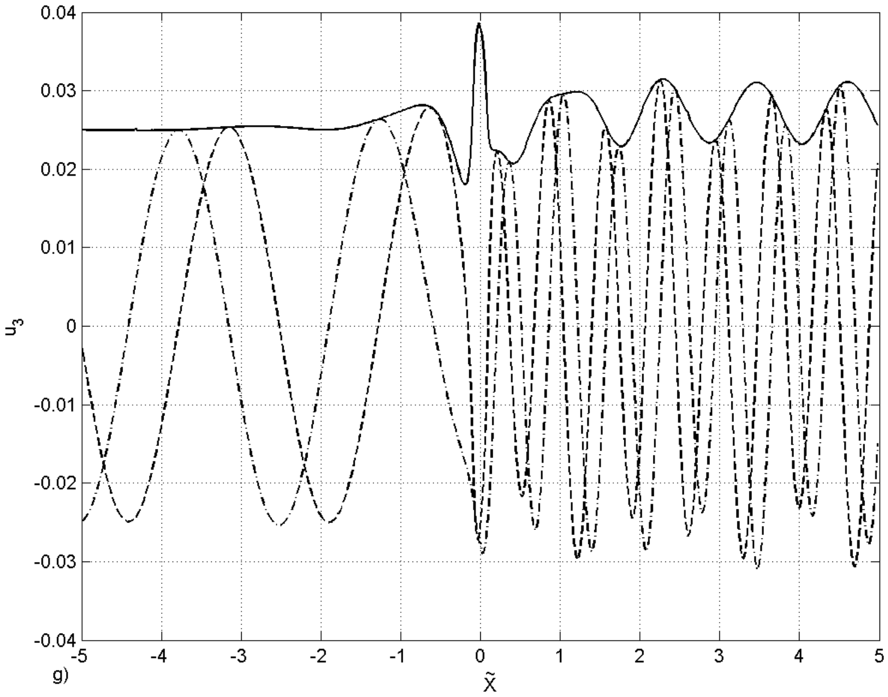


д)

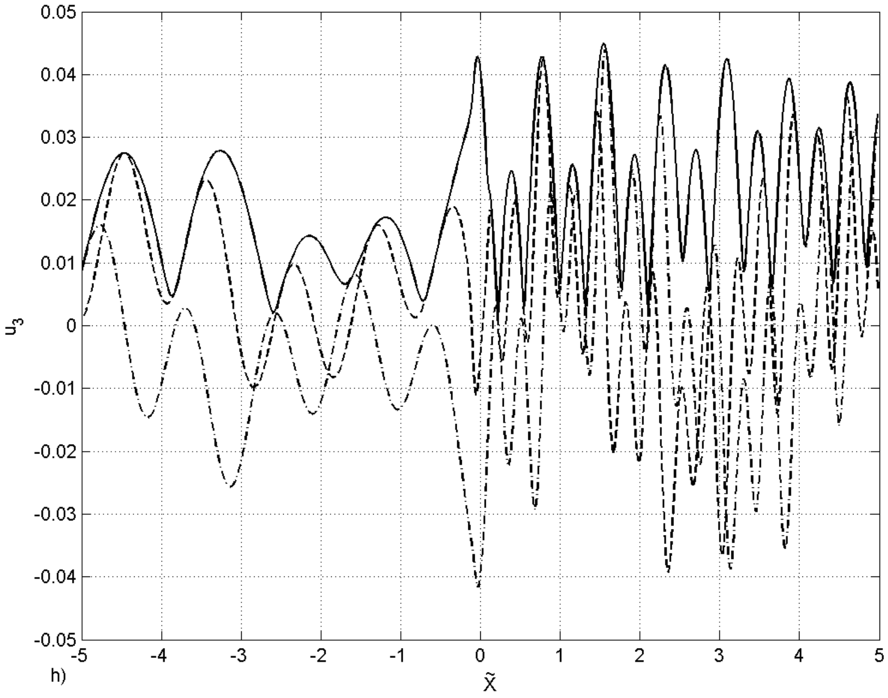


е)

Рис. 1. Вид $\operatorname{Re} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (пунктирная линия), $\operatorname{Im} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (штрих-пунктирная линия), $|u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)|$ (сплошная линия), скорость $v = v_r/2$, безразмерные частоты: а) $\omega = 0{,}1$, б) $\omega = 1$, в) $\omega = 2$, г) $\omega = 2{,}5$, д) $\omega = 3$, е) $\omega = 4$, ж) $\omega = 5$, з) $\omega = 10$



ж)



з)

Рис. 1. Вид $\operatorname{Re} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (пунктирная линия), $\operatorname{Im} u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)$ (штрих-пунктирная линия), $|u_{33}(\tilde{x}, \omega, v)|$ (сплошная линия), скорость $v = v_r/2$, безразмерные частоты: а) $\omega = 0{,}1$, б) $\omega = 1$, в) $\omega = 2$, г) $\omega = 2{,}5$, д) $\omega = 3$, е) $\omega = 4$, ж) $\omega = 5$, з) $\omega = 10$

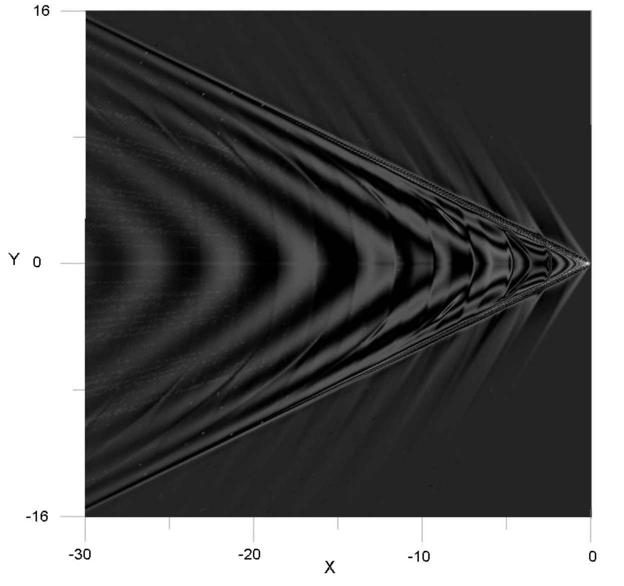


Рис. 2. Вертикальные смещения $u_3(\tilde{x}, y, v)$ при скорости $v = 2{,}4 = 2{,}17v_r = 2v_s = 1{,}159v_p$. Пространственная задача, $\omega = 0$

Workshop WAVE2000: Moving Load – Wave Propagation – Vibration Reduction. Rotterdam: Balkema, 2000. P. 131–148.

2. *Бабешко В.А., Зинченко Ж.Ф., Глушков Е.В.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 240 с.
4. *Белоконь А.В., Наседкин А.В.* Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
5. *Kirillova E., Syromyatnikov P., Didenko A.* Wave fields generated by an oscillating mechanical source moving on the surface of an elastic semibounded medium // Proc. of IC-SCCE – 6th Int. Conf. from Scientific Computing to Computational Engineering, Athens, Greece, 9–12 July, 2014, vol. 2. P. 536–544.
6. D01AKF Subroutine. NAG Fortran Library. Режим доступа: http://www.nag.co.uk/numeric/FL/FLdescription.asp. (дата обращения 09.12.2016).

References

1. Pflanz G., Garcia J., Schmid G. Vibrations due to loads moving with sub-critical and super-critical velocities on rigid track. *Proc. Intern. Workshop WAVE2000 Moving Load – Wave Propagation – Vibration Reduction.* Rotterdam, Balkema, 2000, pp. 131–148.
2. Babeshko V.A, Zinchenko J.F, Glushkov E.V. *Dinamika neodnorodnih lineino-uprugih sred* [The dynamics of inhomogeneous linear-elastic media]. Moscow, Nauka Pub., 1989, 344 p. (In Russian)
3. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamika poverhnosti neodnorodnih sred* [The dynamics of the surface of inhomogeneous media]. Moscow, FIZMATLIT Pub., 2009, 240 p. (In Russian)
4. Belokon A.V., Nasedkin A.V. Vzaimodeistvie dvijushihsya shtampov s uprugimi i vyazkouprugimi telami [Interaction moving punches with elastic and viscoelastic bodies]. In *Mehhanika kontaktnih vzaimodeistvii* [Contact mechanics]. Moscow, FIZMATLIT Pub., 2001, 672 p. (In Russian)
5. Kirillova E., Syromyatnikov P., Didenko A. Wave fields generated by an oscillating mechanical source moving on the surface of an elastic semibounded medium. *Proc. of IC-SCCE – 6th Int. Conf. from Scientific Computing to Computational Engineering, Athens, Greece, 9–12 July,* 2014, vol. 2, pp. 536–544.
6. D01AKF Subroutine. NAG Fortran Library. Available at: http://www.nag.co.uk/numeric/FL/FLdescription.asp. (accessed 09.12.2016)

Статья поступила 9 декабря 2016 г.