УДК 539.3

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ И ЗАПРЕЩЕННЫЕ ЗОНЫ В СЛОИСТЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Фоменко С. И., Александров А. А.

WAVEFIELDS AND BAND-GAPS IN LAYERED PIEZOELECTRIC PHONONIC CRYSTALS

Fomenko S. I., Alexandrov A. A.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: sfom@yandex.ru

Abstract. The paper describes a mathematical model of plane wave propagation in elastic and piezoelectric layered phononic crystals with a finite number of unit-cells. Wave motion is excited by an incident plane P- or SV- wave coming from an outer elastic half-space. The wavefield is obtained by using the transfer matrix (T-matrix) method. The methods to construct a T-matrix of a piezoelectric layer and T-matrix of the periodic structure consisted of given number of unit-cells are developed. The transmitted wave field is expressed in terms of expansion in eigenvalues of the T-matrix unit-cell. A classification of band-gaps and pass-bands in layered phononic crystals is proposed. The classification relies on the analysis of the eigenvalues of T-matrix for a unit-cell and the asymptotics for the transmission coefficient, when the number of the unit cells tends to infinity. Two kinds of band-gaps, where the transmission coefficient decays exponentially with the number of unit-cells, are specified. The so-called low transmission pass-bands (LTPB) are introduced in order to identify frequency ranges where the wave transmission is very low, but it does not tend to zero exponentially. Very week conversion effects of modes are observed in the LTPB. The types of band-gaps and their transformation with a change of the incident angles are discussed with numerical examples. The influence of piezoelectric and dielectric constants on width and location of band-gaps is studied.

Keywords: piezoelectric phononic crystal, T-matrix method, band-gap, low transmission pass-band.

Введение

Композитные материалы широко используются в строительстве, автомобильной, космической и авиационной промышленностях. Многослойные материалы, в отличие от традиционных материалов, при определенном сочетании слоев имеют меньший вес, большую жёсткость и высокую удельную прочность. Материалы с периодической внутренней структурой проявляют весьма интересные для практических приложений спектральные характеристики. В рассматриваемых структурах в определённых частотных диапазонах, называемых запрещенными зонами, наблюдается эффект полного отражения падающей на периодическую структуру волны. Помимо запрещённых зон в периодических материалах наблюдаются явления локализации, «изгиб» волн, отрицательная рефракция и др. Данные явления проявляются как для электромагнитных колебаний в периодических структурах, получивших название фотонные кристаллы, так и для акустических и/или упругих колебаний в периодических материалах, называемых фононными кристаллами. Приложения фононных кристаллов включают в себя упругую или акустическую фокусировку, минимизацию вибрации, звуковую изоляцию, акустическую маскировку, опто-механические преобразования волн, снижение теплопроводности в полупроводниках и др. [1–4].

Использование композитных материалов с пьезоэлектрическими свойствами представ-

Фоменко Сергей Иванович, канд. физ.-мате. наук, старший научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: sfom@yandex.ru

Александров Андрей Анатольевич, аспирант, лаборант Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: alexandrovscience@gmail.ru

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента РФ (14.Z56.15.7154-МК), РФФИ (16-51-53043), РФФИ и Администрации Краснодарского края (16-41-230769)

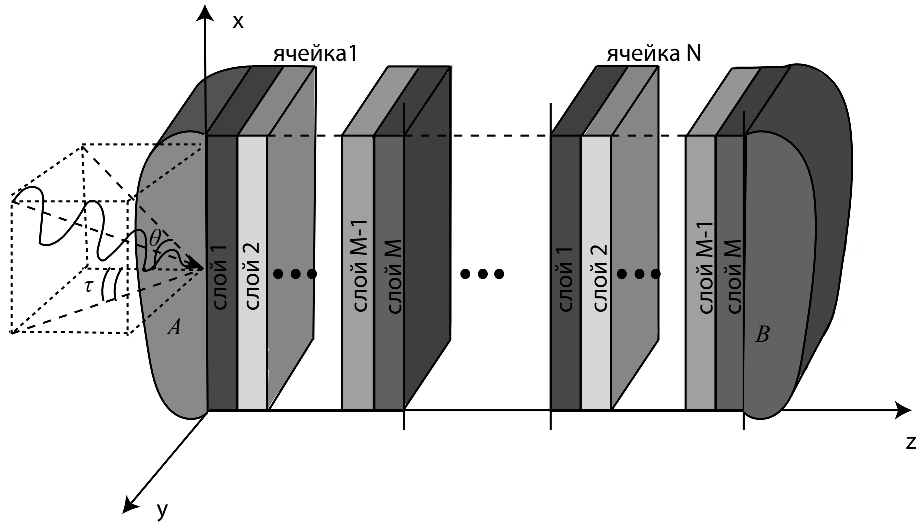


Рис. 1. Пьезоэлектрический фононный кристалл между двумя полупространствами

ляется крайне привлекательным, поскольку позволяет с помощью электричества воздействовать на процессы механических колебаний. Исследование волновых полей в пьезоэлектрических упругих структурах могут осуществляться на основе явных численных схем, даваемых конечно-элементными или конечноразностными методами [5], а также с помощью полуаналитических методов на основе интегральных преобразований волновых полей в слоистых структурах [6, 7]. Современные исследования механических колебаний фононных кристаллов с пьезоэлектрическими включениями берут свое начало с работы [8] и показывают, что с помощью пьезоэлектрического эффекта потенциально можно управлять запрещенными зонами [9–11].

Целью работы является развитие подхода, основанного на методе матрицы-переноса и хорошо зарекомендовавшего себя для слоистых изотропных и функционально-градиентных фононных кристаллов [12–14], и проведение на его основе численного параметрического исследования запрещенных зон в периодических и полупериодических пьезоэлектрических структурах.

1. Одномерный пьезоэлектрический фононный кристалл

Рассматривается слоистый фононный кристалл (ФнК), состоящий из N повторяющихся ячеек, каждая из которых содержит в себе M пьезоэлектрических слоёв заданной толщины. Структура находится между двумя упругими изотропными полупространствами A и B, как показано на рис. 1. Гармонические колебания в ФнК возбуждаются падающей из полупространства A плоской волной.

В рамках линейной теории пьезоупругости для каждого слоя ФнК справедливы следующие уравнения состояния:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = c_{ijmn}\varepsilon_{mn} - e_{nij}E_n,\\ D_i = \epsilon_{in}E_n + e_{imn}\varepsilon_{mn},\\ i, j, m, n = 1, 2, 3.\end{gathered} \qquad (1.1)$$

где тензоры упругих c_{ijmn}, пьезоупругих e_{imn} и диэлектрических ϵ_{mn} констант определяют свойства материалов слоев (для каждого слоя ячейки имеется свой собственный набор констант). В уравнениях (1.1) σ_{ij} — компоненты тензора упругих напряжений, D_i — электрические перемещения, а E_n — составляющие напряженности электрического поля. Связь между вектором упругих перемещений $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ и компонентами тензора деформаций ε_{mn}, а также связь между электрическим потенциалом φ и электрической напряженностью $\mathbf{E}_n = \{E_1, E_2, E_3\}$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(u_{m,n} + u_{n,m}),\\ E_n = -\varphi_{,n}, \quad m, n = 1, 2, 3.\end{gathered} \qquad (1.2)$$

В соотношениях (1.1), (1.2) используется традиционные обозначения для суммы по индексам и производных компонентов тензора.

Дифференциальные уравнения движения для рассматриваемого здесь случая пьезоэлектрических слоев складываются из обобщенного закона Ньютона, а также уравнения

Максвелла в отсутствии свободного заряда

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \qquad D_{i,i} = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{1.3}$$

Если рассмотреть вектор состояния

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3\}, \tag{1.4}$$

условия непрерывности перемещений, электрического потенциала, а также упругих напряжений и электрических перемещений на внутренних границах $z = z_i$ структуры записываются в виде:

$$\mathbf{v}(x,y,z_i - 0) = \mathbf{v}(x,y,z_i + 0). \tag{1.5}$$

На бесконечности при $|z| \to \infty$ выполняются условия излучения.

Волновой вектор $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ падающей на кристалл плоской гармонической волны, а следовательно, и волновой вектор прошедших волн представимы следующим образом

$$\mathbf{k} = k_0\{\sin\theta, \cos\theta\sin\tau, \cos\theta\cos\tau\}, \tag{1.6}$$

где k_0 — волновое число, а τ и θ — углы, указывающие направления падения приходящей P- или S-волны из полупространства A (рис. 1). За счет линейности задачи (1.1)–(1.3) векторы состояния $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}$ (1.4), описывающие падающее и генерируемое им волновые поля, могут быть записаны в следующей форме:

$$\mathbf{v}_0(x,y,z) = \mathbf{V}_0(z)e^{\mathrm{i}(k_1x + k_2y - \omega t)}, \qquad \mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{V}(z)e^{\mathrm{i}(k_1x + k_2y - \omega t)}, \tag{1.7}$$

в которой $\mathbf{V}_0(z)$ и $\mathbf{V}(z) = \{U_1, U_2, U_3, \Phi, \Sigma_{13}, \Sigma_{23}, \Sigma_{33}, \tilde{D}_3\}$ — комплексные амплитуды плоских волн, i — мнимая единица.

2. Метод матриц-переноса

2.1. Т-матрица пьезоэлектрического слоя

Подстановка (1.7) в уравнения движения (1.3), учитывая (1.1,1.2), приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть выписана в матричном виде

$$\mathbf{B}_2\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{W} = \mathbf{B}_1\frac{d}{dz}\mathbf{W} + \mathbf{B}_0\mathbf{W}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{W} = \{U_1, U_2, U_3, \Phi\}$ — вектор столбец комплексных амплитуд смещений и электрического потенциала, а матрицы $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ размера 4×4 имеют явный вид, элементы их $B_s(i,j)$ выражаются через свойства материала $c_{ijmn}, e_{imn}, \epsilon_{mn}$ и компоненты k_1, k_2 волнового вектора $\mathbf{k}$

$$B_0(i,j) = c_{imjn}k_mk_n - \rho\omega^2\delta_{ij},$$
$$B_0(i,4) = e_{nim}k_mk_n,$$
$$B_0(4,j) = e_{mjn}k_mk_n, \quad B_0(4,4) = -\epsilon_{mn}k_mk_n;$$
$$B_1(i,j) = -\mathrm{i}(c_{imj3} + c_{i3jm})k_m,$$
$$B_1(i,4) = -\mathrm{i}(e_{3im} + e_{mi3})k_m,$$
$$B_1(4,j) = -\mathrm{i}(e_{mj3} + e_{3jm})k_m,$$
$$B_1(4,4) = \mathrm{i}(\epsilon_{m3} + \epsilon_{3m})k_m;$$
$$B_2(i,j) = c_{i3j3}, \quad B_2(i,4) = e_{3i3},$$
$$B_2(4,j) = e_{3j3}, \quad B_2(4,4) = -\epsilon_{33}.$$

Здесь $i,j = 1,2,3$, а по индексам $m,n = 1,2$ производится суммирование.

Для решения уравнения (2.1) удобно ввести еще один вектор-столбец $\mathbf{Y} = \left\{\mathbf{W}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{W}\right\}$, состоящий из элементов $\mathbf{W}$ и его первых производных. Тогда относительно $\mathbf{Y}$ система (2.1) переписывается в виде

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \tag{2.2}$$

где матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_1 \end{pmatrix},$$

имеет блочную структуру, в которой $\mathbf{0}_4$ и $\mathbf{I}_4$ обозначают соответственно нулевую и единичную матрицы размера 4×4.

Пусть $\{\gamma_n\}$ — множество собственных значений $\mathbf{A}$, а $\mathbf{L}$ — матрица, составленная по столбцам из соответствующих собственных векторов $\boldsymbol{\ell}_n$, т.е.

$$|\mathbf{A} - \gamma_n\mathbf{E}| = 0, \quad (\mathbf{A} - \gamma_n\mathbf{E})\boldsymbol{\ell}_n = 0,$$
$$n = 1,2,\ldots,8.$$

Между векторами $\mathbf{V}$ и $\mathbf{Y}$ существует очевидная связь: $\mathbf{V} = \mathbf{K}\mathbf{Y}$, где матрица

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{P} & \mathbf{R}. \end{pmatrix},$$

имеет явное представление, следующее из (1.1), (1.2), (1.4) и (1.7). Элементы блоков $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ размера 4×4 определяются по формулам

$$P(i,j) = \mathrm{i}k_mc_{i3jm}, \quad P(i,4) = \mathrm{i}k_me_{mi3},$$

$$P(4,j) = \mathrm{i}k_m e_{3jm}, \quad P(4{,}4) = -\mathrm{i}k_m \epsilon_{3m},$$
$$R(i,j) = c_{i3j3}, \quad R(i{,}4) = e_{3i3},$$
$$R(4,j) = e_{ej3}, \quad R(4{,}4) = -\epsilon_{33},$$

где $i, j = 1, 2, 3$, $m = 1, 2$. Тогда вектор комплексных амплитуд $\mathbf{V}$ представим в следующей форме:

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{ME}(z)\mathbf{C}, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{KL}$; $\mathbf{E}(z) = \mathrm{diag}\{e^{\gamma_n z}\}$ — диагональная матрица из указанных экспонент $(n = 1, 2, \ldots, 8)$; $\mathbf{C}$ — вектор произвольных констант.

Соотношение (2.3) записано для произвольной пьезоэлектрической среды. Если рассмотреть слой под номером j, тогда $\mathbf{V}_j(z) = \mathbf{M}_j\mathbf{E}_j(z)\mathbf{C}_j$, где $\mathbf{V}_j$ — вектор состояния, а $\mathbf{M}_j$ и $\mathbf{E}_j$ рассчитываются согласно указанному алгоритму для конкретных значений параметров слоя, $\mathbf{C}_j$ — вектор констант, которые можно найти, удовлетворив условиям на границах.

Предположим, что для слоя j известно значение вектора состояния на его левой границе $\mathbf{V}_j(\zeta_j) = \mathbf{V}_j^\circ$, тогда поле в произвольной точке слоя ищется в форме

$$\mathbf{V}_j(z) = \mathbf{T}_j(z - \zeta_j)\mathbf{V}_j^\circ,$$

где матричная функция $\mathbf{T}_j(z)$ называется матрицей переноса слоя или просто Т-матрицей. Она, очевидно, находится по формуле

$$\mathbf{T}_j(z) = \mathbf{M}_j\mathbf{E}_j(z)\mathbf{M}_j^{-1}. \tag{2.4}$$

Таким образом, сформулирован алгоритм вычисления поля в произвольном слое ячейки ФнК.

2.2. Поле в периодической структуре

Матрица-переноса $\mathbf{T}_c$ ячейки кристалла, состоящей из M различных слоев, имеет вид

$$\mathbf{T}_c = \prod_{i=M}^{1} \mathbf{T}_i(h_i),$$

где h_i — толщина соответствующего слоя. Тогда общая Т-матрица ФнК, состоящего из N ячеек, может быть найдена как степень $\mathbf{T}_c$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_c^N = \mathbf{G}\boldsymbol{\Lambda}^N\mathbf{G}^{-1}. \tag{2.5}$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ — диагональная матрица из собственных значений $\mathbf{T}_c$, а $\mathbf{G}$ — матрица из соответствующих собственных векторов $\mathbf{g}_i$, компоненты которых расположены по столбцам матрицы:

$$|\mathbf{T}_c - \lambda_i\mathbf{E}| = 0, \quad (\mathbf{T}_c - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{g}_i = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, 8.$$

Вектор состояния $\mathbf{V}_s$ во внешних полупространствах $(s = A, B)$ находится аналогичным способом

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{M}_s\mathbf{E}_s(z)\mathbf{C}_s. \tag{2.6}$$

Пусть векторы $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ задают неизвестные амплитудные коэффициенты прохождения и отражения, а вектор $\mathbf{d}_{inc} = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, описывающий падающую волну, известен. Тогда, учитывая, что $\mathbf{C}_B = \{\mathbf{t}, 0, 0, 0, 0\}$, $\mathbf{C}_A = \{\mathbf{d}_{inc}, \mathbf{r}\}$, а также соотношения (2.5) и (2.6), имеет место уравнение $\mathbf{V}_B(z_B) = \mathbf{TV}_A(0)$ или

$$\begin{gathered}\mathbf{t} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 \end{pmatrix} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \mathbf{d}_{inc}, \\ \mathbf{r} = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 \end{pmatrix} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right] \mathbf{t}\end{gathered} \tag{2.7}$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{M}_A^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}_B$, а матрицы в квадратных скобках дают верхний и нижний левые блоки матрицы $\mathbf{D}$ размером 4×4 соответственно.

Полученное решение (2.7) позволяет в явном виде выделить в амплитудных коэффициентах $\mathbf{t}$ проходящего поля собственные значения $\lambda_j \geqslant 1$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ матрицы $\mathbf{T}_c$, упорядоченные по возрастанию их модулей

$$\mathbf{t} = \sum_{j=1}^{4} \mathbf{p}_j \lambda_j^{-N}. \tag{2.8}$$

Представление может быть получено в явном виде, если обратить матрицу в (2.7) для произвольных значений λ_j. При этом векторы $\mathbf{p}_j$ в (2.8) имеют достаточно сложный вид, но известно, что при $N \to \infty$ они ограничены [13].

Для анализа запрещенных зон эффективным средством является использование энергетических коэффициентов прохождения $(\kappa^+ = E^+/E_0)$ и отражения $(\kappa^- = E^-/E_0 = 1 - \kappa^+)$. Осредненные по времени потоки энергии падающего (E_0), отраженного (E^-) от плоской границы $z = 0$, а

Таблица 1. Параметры материалов

Обозначение	Название	Свойства
слой 1, A, B	Алюминий	$\rho = 2{,}7$, $\lambda = 51{,}1$, $\mu = 26{,}3$
слой 2	Титанат бария ($BaTiO_3$)	$\rho = 7{,}5$, $C_{11} = C_{22} = 166$, $C_{33} = 162$, $C_{44} = C_{55} = 43$, $C_{66} = 44$, $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 78$, $E_{13} = E_{23} = -4{,}4$, $E_{33} = 18{,}6$, $E_{42} = E_{51} = 11{,}6$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 11{,}2$, $\epsilon_{33} = 12{,}6$.

Размерности величин: $[\rho] = $ кг/м^3, $[\lambda] = [\mu] = [C_{ij}] = [E_{ij}] = [\epsilon_{ij}] = $ ГПа

также прошедшего (E^+) через нижнюю границу ФнК $z = NH$ волнового поля с плоским фронтом выражаются через соответствующие плотности потоков энергии по формуле

$$E = -\omega/2 \, \mathrm{Im}(u_i \sigma_{3i}^* + D_3 \phi^*) S,$$

где u_i, σ_{3i}, D_3 и ϕ — соответствующие компоненты волнового поля, * — операция комплексного сопряжения, а S — площадь верхней или нижней границы кристалла.

3. Запрещенные и разрешенные зоны в пьезоэлектрических фононных кристаллах

Анализ полуаналитического представления прошедшего волнового поля (2.8) и коэффициента прохождения κ^+ позволяет построить классификацию частотных диапазонов возбуждения сигналов в рассматриваемой структуре. Частотные диапазоны, в которых наблюдаются прохождение волновых пакетов, называются разрешенными зонами, как правило, в этих диапазонах $|\lambda_j| = 1$, а $\kappa^+ = O(1)$. В запрещенных зонах первого типа (или стоп-зона I, СЗ-I) для всех собственных значений выполняется равенство: $|\lambda_j| > 1$, $(j = \overline{1{,}4})$, амплитуда проходящего волнового поля экспоненциально убывает с ростом количества ячеек N, $\kappa^+ \sim \exp(-\gamma H N)$, где $\gamma = \min(\gamma_j)$ — коэффициент локализации, а $\gamma_j = \mathrm{Im}\,\zeta_j$, $\zeta_j = \mathrm{i}\ln\lambda_j / H$ — это соответственно коэффициент затухания и волновое число волны Флоке–Блоха. Запрещенные зоны второго типа (или стоп-зона II, СЗ-II) обладают теми же свойствами экспоненциального затухания коэффициента прохождения при увеличении числа ячеек, что и СЗ-I. Но в отличие от СЗ-I, в них некоторые волны Флоке–Блоха имееют действительные волновые числа ζ_k, однако фактически не распространяются за счет нулевой амплитуды ($\tilde{\mathbf{u}}_k = 0$). Поэтому результирующее поле в СЗ-II определяется только затухающими модами ζ_j, $\mathrm{Im}\,\zeta_j > 0$, поэтому коэффициент локализации в СЗ-II равен $\gamma = \min_{\{j:\,\gamma_j>0\}}(\gamma_j)$. Численные исследования показывают, что, как правило, затухающими являются волны Флоке–Блоха, соответствующие падающей P- или S-волне по типу поляризации. Кроме того, исследования показывают, что запрещенные зоны второго типа возможны только, если хотя бы один из углов θ или τ равен нулю. Даже при незначительном отклонении углов от нормального СЗ-II трансформируются в разрешенную зону, так как амплитуды $\tilde{\mathbf{u}}_k$ незатухающих волн Флоке–Блоха ζ_k становятся ненулевыми. Наблюдается эффект трансформации мод. Однако, как правило, он незначителен, так как общий коэффициент прохождения достаточно мал $\kappa^+ < 10^{-3}$. Данные частотные диапазоны будем называть разрешенными зонами малого прохождения (РЗМП).

Описанные типы разрешенных и запрещенных зон можно видеть на рис. 2, где приводятся зависимости от нормированной частоты $\Omega = \omega H/(2\pi c_H)$, c_H — скорость S-волны в полупространстве, вещественных волновых чисел Флоке–Блоха (а, г), коэффициентов затухания γ_n (б, д) и прохождения κ^+ (в,е) для ФнК, состоящего из 16 двухслойных ячеек, при нулевых (первый столбец) и ненулевых углах θ, τ падения плоской P или S-волны. Параметры материалов структуры приведены в табл. 1. Для тензоров упругих и пьезоэлектрических констант материала B (2 и 3 индексы) используется свертка индексов согласно нотации Фойгта. Неуказанные значения тензора приняты равными нулю. Толщины слоев ячеек равны 1.

Запрещенные зоны первого типа (СЗ-I), обозначенные на рис. 2 сплошной серой областью, не зависят от типа плоской волны (P или S), падающей из полупространства H_1 нормально к плоскости интерфейса. Однако СЗ-I для различного типа падающих волн

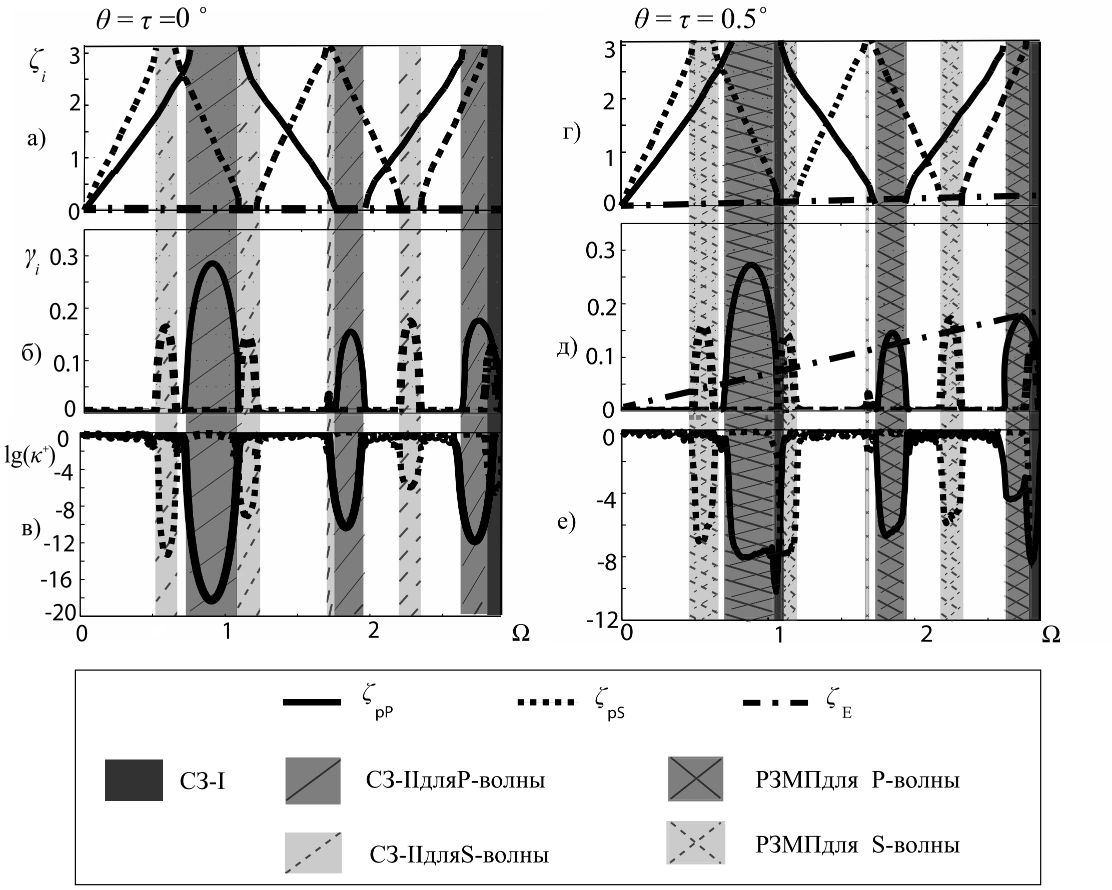
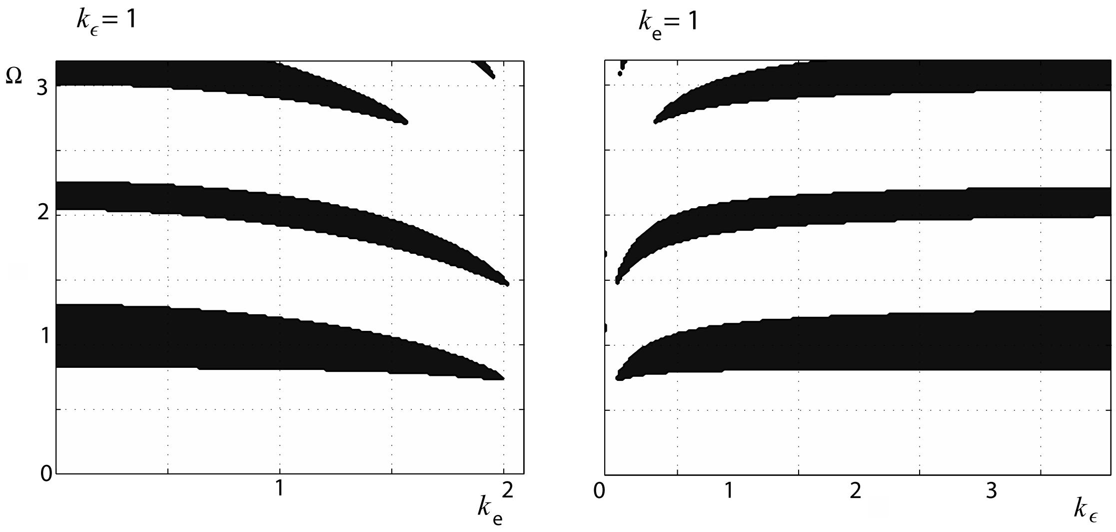


Рис. 2. Частотные зависимости волновых чисел (а, г), коэффициентов затухания мод Флоке–Блоха (б, д) и логарифма коэффициента прохождения κ^+ (в, е); трансформация СЗ-II в РЗМП при изменении углов падения волны с 0° (первый столбец) до 0,5° (второй столбец)

разделяются с увеличением угла. Зоны второго типа (СЗ-II), обозначенные на рис. 2а–2в заштрихованными прямоугольниками, уже для нормальных углов падения плоских P- и S-волн отличаются, а при отклонении углов от нормального они трансформируются в разрешенные зоны малого прохождения, показанные на рис. 2г–2е двойной штриховкой. Например, при возбуждении колебаний падающей P-волной с частотами колебаний из СЗ-II и РЗМП псевдо P-волна Флоке–Блоха (ζ_{pP}) фактически не распространяется из-за экспоненциального затухания (рис. 2б, 2д), в то время как псевдо S-волна (ζ_{pS}) не затухает, но может распространяться только для ненулевых углов. Аналогично волна ζ_E, связанная с электроупругими колебаниями, возбуждается только для ненулевого угла, но за счет высокой скорости оказывает слабое влияние на дисперсию.

На формирование запрещенных зон влияет не только тип падающих волн (источник колебаний), но и соотношение толщин слоев ячеек, а также свойства материалов, в частности, тензоры пьезоэлектрических e_{nij} и диэлектрических ϵ_{ij} констант. На рис. 3 в качестве примера приводятся зависимости запрещенных зон, обозначенные темной областью, от значений тензора пьезоэлектрических (а) и диэлектрических (б) констант при нормальных углах падения P-волны. При этом в качестве характеристики свойств рассматриваются переменные коэффициенты k_e и k_ϵ такие, что $e_{nij} = k_e e^{\text{o}}_{nij}$ и $\epsilon_{ij} = k_\epsilon \epsilon^{\text{o}}_{ij}$, где эталонные значения компонент тензоров e^{o}_{nij} и ϵ^{o}_{ij} взяты из таблицы 1 для второго в ячейке кристалла пьезоэлектрического слоя. Увеличение коэффициента k_e при постоянном значении диэлектрических констант (k_ϵ=1) приводит к тому, что запрещенные зоны сужаются и сдвигаются в сторону низких частот (рис. 3а). При увеличении диэлектрических констант (меняется коэффициент k_ϵ и $k_e = 1$) наблюдается противоположная тенденция: за-



а) б)

Рис. 3. Влияние а) тензора пьезоэлектрических констант $k_e e^{\text{o}}_{nij}$ и б) диэлектрических констант $k_\epsilon \epsilon^{\text{o}}_{ij}$ на формирование запрещенных зон в фононном кристалле

прещенные зоны расширяются и сдвигаются в сторону более высоких частот, насыщение наступает уже при $k_\epsilon = 2$.

Заключение

В работе рассмотрен численно-устойчивый метод построения волновых полей в слоистых пеьезоэлектрических фононных кристаллах. Получено представление матрицы переноса пьезоэлектрического слоя, разработан алгоритм вычисления коэффициентов прохождения и отражения. Численная устойчивость достигается за счет представления прошедшего волнового поля в форме разложения по собственным числам матрицы-переноса ячейки кристалла. Получена классификация запрещенных и разрешенных зон в зависимости от значений собственных чисел матрицы-переноса и компонент полученного разложения. Введено понятие запрещенной зоны второго типа и разрешенной зоны малого прохождения. На примере кристалла с двухслойной упруго-пьезоэлектрической ячейкой (алюминий–титанат бария) проанализировано распределение запрещенных и разрешенных зон различного типа для нулевых и ненулевых углов падения плоских P- и S-волн. Параметрический анализ влияния контрастности между пьезоэлектрическими и диэлектрическими константами на распределение запрещенных зон показал, что, чем больше диэлектрические константы по отношению к пьезоэлектрическим, тем меньше их влияние на запрещенные зоны.

Литература

1. *Голенищев-Кутузов А.В., Голенищев-Кутузов В.А., Калимуллин Р.И.* Фотонные и фононные кристаллы. Формирование и применение в опто- и акустоэлектронике. М.: Физ.-мат. лит., 2010. 160 с.
2. *Lucklum R., Li J., Zubtsov M.* D and 2D phononic crystal sensors // Procedia Engineering, 2010. Vol. 5. P. 436-–439.
3. *Deymier P.A.* Acoustic metamaterials and phononic crystals. Springer, 2013. 387 p.
4. *Khelif A., Adibi A.* Phononic crystals fundamentals and applications, Springer-Verlag, New York, 2016. 245 p.
5. *Янкин С. С., Талби А., Гербедоен Ж.-К., Преображенский В. Л., Перно Ф., Матар О. Бу* Распространение поверхностной акустической волны в двумерном фононном кристалле на пьезоэлектрической подложке // Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия Физика, 2014. Т. 14, Вып. 2. С. 5–12.
6. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
7. *Glushkov E., Glushkova N., and Zhang C.* Surface and pseudo-surface acoustic waves piezoelectically excited in diamond-based structures // J. Appl. Phys. 2012. No. 112. P. 064911.
8. *Laude V., Wilm M., Benchabane S., Khelif A.* Full band gap for surface acoustic waves in a piezoelectric phononic crystal // Physical

Review E. 2005. Vol. 71. No. 3. P. 036607.

9. *Ponge M.-F., Dubus B., Granger Ch., Vasseur J., Thi M.Ph., Hladky-Hennion A.-Ch.* Optimization of a tunable piezoelectric resonator using phononic crystals with periodic electrical boundary conditions // Physics Procedia. 2015. Vol. 70. P. 258–261.
10. *Darinskii A., Shuvalov A., Poncelet O., Kutsenko A.* Bulk longitudinal wave reflection/transmission in periodic piezoelectric structures with metallized interfaces // Ultrasonics. 2015. Vol. 63. P. 118–125.
11. *Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposian G.T.* Magneto-electro-elastic polariton coupling in a periodic structure // Journal of Physics D: Applied Physics. 2015. Vol. 48. No. 17. P. 175501.
12. *Golub M.V., Fomenko S.I., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S.* Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49, No. 2. P. 344–354.
13. *Фоменко С.И.* Волновые поля и запрещенные зоны в квазипериодических слоистых композитах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013. № 4, Т. 1. С. 120–126.
14. *Fomenko S.I., Golub M.V., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S.* In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals // International Journal of Solids and Structures. 2014, Vol. 51. No. 13. P. 2491–2503.

References

1. Golenischev-Kutuzov A.V., Golenischev-Kutuzov V.A., Kalimullin R.I. *Fotonnyie i fononnyie kristallyi. Formirovanie i primenenie v opto- i akustoelektronike* [Photonic and phononic crystals. Their engineering and application in opto- and acoustoelectronics], Moscow, Fiz.-Mat. lit. Publ., 2010. 160 p. (In Russian)
2. Lucklum R., Li J., Zubtsov M. 1D and 2D Phononic Crystal Sensors. *Procedia Engineering*, 2010, vol. 5. P. 436—439.
3. Deymier P.A. *Acoustic metamaterials and phononic crystals.* Springer, 2013, 387 p.
4. Khelif A., Adibi A. *Phononic Crystals Fundamentals and Applications.* Springer-Verlag, New York, 2016. 245 p.
5. Yankin S. S., Talbi A., Gerbedoen ZH.-K., Preobrazhenskij V. L., Perno F., Matar O. Bu Rasprostranenie poverhnostnoj akusticheskoj volny v dvumernom fononnom kristalle na p'ezoehlektricheskoj podlozhke [Surface acoustic wave propagation in two-dimensional phononic crystal on a piezoelectric substrate]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya Seriya. Seriya Fizika* [News of Saratov University. New series. Series Physics], 2014, vol. 14, no. 2, pp. 5–12. (In Russian)
6. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryahina O.D. *Dinamika massivnyih tel i rezonansnyie yavleniya v deformiruemyih sredah* [The dynamics of massive objects and resonance phenomena in deformable media]. Moscow: Nauchnyiy mir Publ., 1999, 246 p. (In Russian)
7. Glushkov E., Glushkova N., and Zhang C. Surface and pseudo-surface acoustic waves piezoelectically excited in diamond-based structures. *J. Appl. Phys.*, 2012, no. 112, pp. 064911.
8. Laude V., Wilm M., Benchabane S., Khelif A. Full band gap for surface acoustic waves in a piezoelectric phononic crystal. *Physical Review E.*, 2005, vol. 71, no. 3, pp. 036607.
9. Ponge M.-F., Dubus B., Granger Ch., Vasseur J., Thi M.Ph., Hladky-Hennion A.-Ch. Optimization of a tunable piezoelectric resonator using phononic crystals with periodic electrical boundary conditions. *Physics Procedia*, 2015, vol. 70, pp. 258–261.
10. Darinskii A., Shuvalov A., Poncelet O., Kutsenko A. Bulk longitudinal wave reflection/transmission in periodic piezoelectric structures with metallized interfaces. *Ultrasonics*, 2015, vol. 63, pp. 118–125.
11. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposian G.T. Magneto-electro-elastic polariton coupling in a periodic structure. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2015, vol. 48, no. 17, pp. 175501.
12. Golub M.V., Fomenko S.I., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S. Transmission and band gaps of elastic SH waves in functionally graded periodic laminates. *Int. J. of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, no. 2, pp. 344–354.
13. Fomenko S.I. Volnovyie polya i zapreschennyie zonyi v kvaziperiodicheskih sloistyih kompozitah [Wave fields and restricted areas in the quasi-layered composites]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnyih tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2013, No. 4, Vol. 1, pp. 120–126. (In Russian)
14. Fomenko S.I., Golub M.V., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 13), pp. 2491–2503.

Статья поступила 31 октября 2016 г.