УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА

Азаров Д. А.

THE IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF THE MECHANIC-GEOMETRICAL MODEL UNDER UNIAXIAL TENSION OF THE HIGHLY ELASTIC MATERIAL

Azarov D. A.

Don State Technical University, Rostov-On-Don, 344010, Russia
e-mail: danila_az@mail.ru

Abstract. The method of construction and identification of the mechanical-geometrical model is presented. The model is used in order to obtain new constitutive assumption for nonlinear elastic materials under severe deformations.

According to the proposed method, the deformation of the elementary volume of the elastic continuum in the form of a cube is determined by the force interactions between the faces of the cube. These interactions are modeled by a system of bonds, which reacts an exterior load by and then transfer them to each face of the elementary volume. The bonds in this construction have different mechanical properties, characterized by stiffness (or elasticity) coefficients. These bonds are the generalized estimations of internal force interactions within the material, but not the real forces of interatomic or intermolecular interactions, studied by physicochemical methods. Thus, the model, describing the deformations of the continuous medium, is a geometry construction from the deformed rods (built in the elementary volume) providing corresponding bonds. Constitutive assumptions of the elastic model in the main axes for the case of triaxial deformation are formed up in the article.

The general procedure of the identification of the model's parameters under triaxial deformation and the identification procedure based on the experimental data for uniaxial stretching of the elastomers, taking into account there incompressibility are worked out. The characteristics of the model's bonds rigidities were restored for two types of experimental curves of elastomers' stretching (monotonically increasing and S-type curves). Polynominal dependences of the bond hardness from the elongation of the corresponding bond were selected for purposes of testing of the corresponding method of the identification. The obtained stretching curves for a model accord well with the experimental data. The graphs demonstrating the behavior of the identified functions of the bonds' rigidities and the inner reactions of the bonds depending on the size of its elongation are also included.

The graphs of the specific potential energy of the straining of a nonlinear media correspondent with two types of elastomers mentioned above are presented as well. The 3D surface graphs relate to the case of flat deformation of the incompressible material, and the 2D curves — to uniaxial stretching of the same material. The graphs of the energy are convex and this is the evidence of the physically reasonable basis of the method of a modelling.

Keywords: mechanical-geometric model, constitutive assumptions, nonlinearity, elasticity, model identification, uniaxial stretching, elastomer, incompressibility, specific strain energy.

В работах [1–4] была представлена модель для описания свойств высокоэластичных материалов при разных видах деформаций. Согласно изложенному в этих работах подходу деформирование элементарного объема упругой сплошной среды (в общем случае параллелепипеда) определяется взаимодействиями между гранями, моделируемыми с помощью системы связей, воспринимающих внешние нагрузки и передающих их к каждой грани элементарного объема. Эта система может быть представлена в виде механической конструкции (рис. 1), узлы которой $A_1, A_2, \ldots, A_6$ шарнирно прикреплены к цен-

Азаров Даниил Анатольевич, старший преподаватель кафедры «Математика» Донского государственного технического университета; email: danila_az@mail.ru

трам граней параллелепипеда. Связи передают только растягивающие и сжимающие нагрузки. Такую конструкцию будем называть механико-геометрической моделью. Связям модели можно приписать механические свойства: упругость, вязкость, пластичность и т.п.

Необходимо особо подчеркнуть, что механические характеристики связей модели не являются характеристиками реальных физико-химических взаимодействий между отдельными материальными частицами. Они являются обобщенными аппроксимирующими выражениями, выбираемыми так, чтобы наилучшим образом описывать экспериментальные зависимости между внешними силами и изменениями размеров элементарного объема.

1. Общие положения

Модель имеет два типа характеристик: геометрические и механические. К геометрическим характеристикам относятся расстояния между узловыми точками (длины связей) и углы (рис. 2а). Механические характеристики — параметры жесткости (упругости) связей. Приложение внешних сил к узлам влечет за собой изменение длин связей и углов между ними, а также появление внутренних сил реакций растянутых или сжатых связей (рис. 2б). Основными размерами модели являются длины продольных связей a, b, c до деформации и соответствующие им длины A, B, C после деформации, которые определяют форму элементарного объема сплошной среды.

Предлагается путем выбора параметров модели описывать поведение сплошной среды, основываясь на поведении конструкции, «встроенной» в элементарный объем. Модель обладает широкими возможностями для описания различных случаев анизотропии материала. Далее в работе будем предполагать изначальную изотропию модели и описываемого ею материала. Для такого изотропного материала выбран элементарный объем в виде куба.

В процессе деформирования при растяжении (или сжатии) по одному направлению в первоначально изотропной модели развивается анизотропия, обусловленная изменением углов между диагональными и продольно-поперечными связями. Модель начинает демонстрировать различные отклики на одну и ту же дополнительную силу, приложенную по продольному и по перпендикулярным ему направлениям, приобретая свойство трансверсальной анизотропии. Такое поведение модели вполне согласуется с поведением реальных высокоэластичных каучукоподобных материалов. Приобретаемая при растяжении деформационная анизотропия эластомеров, называемая эффектом Муллинса, рассматривалась в статьях об экспериментальных наблюдениях этого эффекта [5] и моделировании таких материалов [6]. Эффект Муллинса традиционно объясняют переориентацией сложных полимерных молекул вдоль линии действия растягивающих напряжений. В модели при растяжении конструкции (рис. 2) диагональные связи L и P поворачиваются вдоль линии действия растягивающей нагрузки и берут на себя все большую часть этой нагрузки.

Растяжение–сжатие модели по трем направлениям позволяет моделировать определяющие соотношения нелинейного упругого материала в главных осях.

В недеформированном состоянии справедливы зависимости

$$l = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad p = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad n = \sqrt{b^2 + c^2},$$

а в деформированном состоянии

$$A = a + \Delta_a, \quad B = b + \Delta_b, \quad C = c + \Delta_c,$$

$$L = l + \Delta_l, \quad P = p + \Delta_p, \quad N = n + \Delta_n,$$

где Δ_i — абсолютное изменение длины i-ой связи.

Также выполняются очевидные геометрические условия

$$L = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad P = \sqrt{A^2 + C^2},$$

$$N = \sqrt{B^2 + C^2}.$$

$$\cos\phi = \frac{A}{L} = \frac{a + \Delta_a}{l + \Delta_l},$$

$$\cos\psi = \frac{B}{N} = \frac{b + \Delta_b}{n + \Delta_n}, \qquad (1.1)$$

$$\cos\theta = \frac{A}{P} = \frac{a + \Delta_a}{p + \Delta_p}.$$

В статьях [1,3,4] было рассмотрено поведение механико-геометрической модели при различных видах напряженно-деформированных состояний (одноосное растяжение, сдвиг) в условиях постоянных жесткостей связей. Это наиболее простая линейная зависимость силы

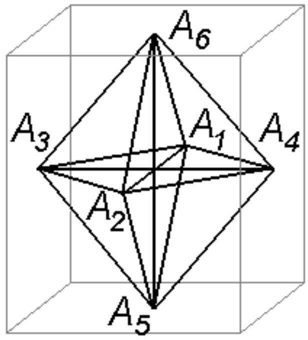


Рис. 1. Общий вид модели ($A_1A_2 = 2b$, $A_3A_4 = 2c$, $A_5A_6 = 2c$)

реакции связи от соответствующего удлинения

$$R_i = k_i\Delta_i, \quad i = a, b, c, l, p, n. \tag{1.2}$$

Здесь R_i сила реакции i-ой связи, а коэффициент k_i определяет жесткость (упругость) этой связи. Размерность сил R_i [Н], а параметров k_i [Н/м].

Условие равновесия внешних и внутренних сил, например, для узла A_6 имеет вид

$$F_a = R_a + 2R_l\cos\phi + 2R_p\cos\theta.$$

Если считать модель изотропной, коэффициенты жесткостей связей в недеформированном состоянии должны быть одинаковыми для продольных $k_a = k_b = k_c$ и диагональных $k_l = k_p = k_n$ связей. В качестве начальной геометрии элементарного объема выбран куб с размерами:

$$A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = 2,$$
$$a = b = c = 1, \quad l = p = n = \sqrt{2}.$$

Тогда из условий равновесия внешних и внутренних сил в узлах $A2$, $A4$, $A6$ (рис. 2б) с учетом (1.1), (1.2) аналогично [1, 4] можно получить определяющие соотношения

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{k_a(A-1)}{4} + \dfrac{k_lA(1-lL^{-1})}{2} + \\ \qquad + \dfrac{k_pA(1-lP^{-1})}{2}, \\ \sigma_b = \dfrac{k_b(B-1)}{4} + \dfrac{k_lB(1-lL^{-1})}{2} + \\ \qquad + \dfrac{k_nB(1-lN^{-1})}{2}, \\ \sigma_c = \dfrac{k_c(C-1)}{4} + \dfrac{k_pC(1-lP^{-1})}{2} + \\ \qquad + \dfrac{k_nC(1-lN^{-1})}{2}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Инженерные напряжения σ_a, σ_b, σ_c получены делением сил F_a, F_b, F_c на начальные площади граней элементарного объема. Здесь представлен случай разных свойств жесткостей связей k_i, $i = a, b, c, l, p, n$.

Полученные выражения модели (1.3) представляют собой главные напряжения при трехосном растяжении–сжатии в зависимости от главных кратностей удлинений $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = B$, $\lambda_3 = C$ (равенства справедливы в силу условия $a = b = c = 1$). Далее равным образом используются обозначения как λ_i, так и A, B, C.

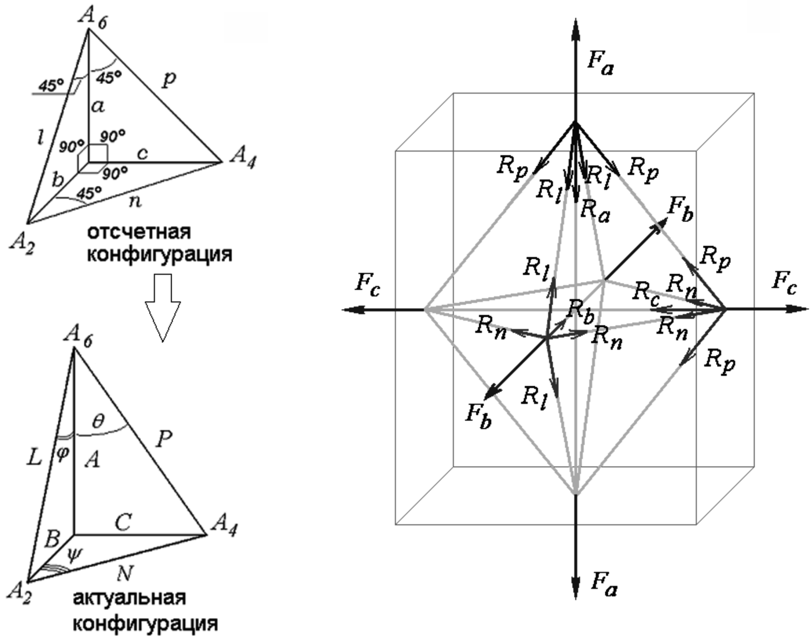
Модель, полученная при условии постоянных коэффициентов жесткостей связей (1.2), обладает простотой, но не позволяет описывать сложное механическое поведение, например, форму S-образной кривой зависимости напряжение-деформация при одноосном растяжении образцов из каучука. В [2] была показана возможность построения зависимости напряжение–деформация, когда коэффициенты жесткости каждой связи модели зависят от удлинения этой же связи.

Для описания больших деформаций выберем характеристики жесткости (упругости) каждой i-ой связи в виде функции $K_i(\Delta_i)$ от удлинения соответствующей связи Δ_i. В этом случае силы реакций связей равны

$$R_i = K_i(\Delta_i)\Delta_i, \quad i = a, b, c, l, p, n. \tag{1.4}$$

Поскольку при бесконечно малых деформациях свойства материала изотропны, необходимо обеспечить выполнение условий равенства жесткостей трех продольных и трех диагональных связей в отсчетной конфигурации при отсутствии деформаций

$$\begin{gathered} K_a(0) = K_b(0) = K_c(0), \\ K_p(0) = K_l(0) = K_n(0). \end{gathered} \tag{1.5}$$



а) б)

Рис. 2. Геометрические и силовые характеристики модели: а) геометрия модели (размеры и углы), б) схема действия внешних сил и реакций связей

Определяющие соотношения модели можно записать в следующем виде:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sigma_a &= \frac{K_a(\Delta_a)(A-1)}{4} + \\
&\quad + \frac{K_l(\Delta_l)A(1-lL^{-1})}{2} + \\
&\quad\quad + \frac{K_p(\Delta_p)A(1-lP^{-1})}{2}, \\
\sigma_b &= \frac{K_b(\Delta_b)(B-1)}{4} + \\
&\quad + \frac{K_l(\Delta_l)B(1-lL^{-1})}{2} + \\
&\quad\quad + \frac{K_n(\Delta_n)B(1-lN^{-1})}{2}, \\
\sigma_c &= \frac{K_c(\Delta_c)(C-1)}{4} + \\
&\quad + \frac{K_p(\Delta_p)C(1-lP^{-1})}{2} + \\
&\quad\quad + \frac{K_n(\Delta_n)C(1-lN^{-1})}{2}.
\end{aligned}
\right.
\tag{1.6}
$$

2. Идентификация параметров модели в общем виде

Для определения параметров модели необходимо проведение экспериментов в условиях различных напряженно-деформированных состояний: одноосное растяжение, объемное сжатие, плоская деформация и т.д.

От функций вида $K_i(\Delta_i)$ перейдем к зависимостям от A, B, L, N, например, $K_a(\Delta_a) = K_a(A-1) = \widehat{K}_a(A)$. Определяющие соотношения (1.6) запишем в форме

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sigma_a &= \widehat{K}_a(A-1)q_{a_1}(A) + \\
&\quad + \widehat{K}_l(L-l)q_{a_2}(A,L) + \\
&\quad\quad + \widehat{K}_p(P-l)q_{a_3}(A,P), \\
\sigma_b &= \widehat{K}_b(B-1)q_{b_1}(B) + \\
&\quad + \widehat{K}_l(L-l)q_{b_2}(B,L) + \\
&\quad\quad + \widehat{K}_n(N-l)q_{b_3}(B,N), \\
\sigma_c &= \widehat{K}_c(C-1)q_{c_1}(C) + \\
&\quad + \widehat{K}_p(P-l)q_{p_2}(C,P) + \\
&\quad\quad + \widehat{K}_n(N-l)q_{n_3}(C,N),
\end{aligned}
\right.
\tag{2.1}
$$

где введены базисные функции

$$
q_{a_1}(A) = (A-1)/4, \quad q_{a_2}(A,L) = A(1-lL^{-1})/2,
$$
$$
q_{a_3}(A,P) = A(1-lP^{-1})/2
$$

$$q_{b_1}(B) = (B-1)/4, \quad q_{b_2}(B,L) = B(1-lL^{-1})/2, \quad q_{b_3}(B,N) = B(1-lN^{-1})/2$$

$$q_{c_1}(C) = (C-1)/4, \quad q_{c_2}(C,L) = C(1-lL^{-1})/2, \quad q_{c_3}(C,N) = C(1-lN^{-1})/2$$

Если известны главные кратности удлинений A, B, C (а с учетом (1.1) и L, P, N) и соответствующие значения напряжений $\sigma_a = \tilde{\sigma}_a$, $\sigma_b = \tilde{\sigma}_b$, $\sigma_c = \tilde{\sigma}_c$ (знак тильды обозначает экспериментально измеренные значения) на гранях куба, можно определить соответствующие функции модели $K_i(\Delta_i)$ (в общем случае $K_a \neq K_b \neq K_c$, $K_l \neq K_p \neq K_n$) из условия минимума квадратичной невязки $\Phi(K_i)$ при выполнении ограничений (1.5)

$$\Phi(K_i) = \\ = \sum_{A,B,C} \left[(\sigma_a - \tilde{\sigma}_a)^2 + (\sigma_b - \tilde{\sigma}_b)^2 + (\sigma_c - \tilde{\sigma}_c)^2\right].$$

3. Задача об одноосном растяжении

Рассмотрим задачу об одноосном растяжении изотропного материала продольной силой F_a, когда $F_b = F_c = 0$. Сначала получим решение для случая с постоянными коэффициентами упругости связей. Поскольку при деформировании возникает свойство трансверсальной анизотропии, то справедливы равенства $k_b = k_c$, $k_l = k_p$. Остальные обозначения коэффициентов упругости для наглядности сохраняем разными, даже при равных значениях параметров $k_a = k_b$, $k_n = k_l$. Геометрические соотношения сводятся к условиям $B = C$, т.е. угол $\psi = 45°$, $L = P$, т.е. угол $\theta = \phi$; $L = \sqrt{A^2 + B^2}$, $N = lB$.

Уравнения (1.3) при одноосном растяжении принимают вид

$$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{k_a(A-1)}{4} + k_l A(1 - lL^{-1}), \\ \sigma_b = \dfrac{k_b(B-1)}{4} + \dfrac{k_l B(1-lL^{-1})}{2} + \\ \qquad + \dfrac{k_n B(1 - l \cdot l^{-1} B^{-1})}{2}. \end{cases}$$

На боковой поверхности напряжение σ_b должно быть равно нулю

$$0 = B\left[\frac{k_b + 2k_n}{4} + \frac{k_l(1-lL^{-1})}{2}\right] - \frac{k_b + k_n}{2}.$$

При одноосном растяжении с ростом A изменяется и B, т.е. имеет место зависимость $B(A)$. Тогда, с учетом геометрических соотношений, для каждого значения A

$$L(A) = \sqrt{A^2 + B(A)^2}, \\ N(A) = lB(A), \tag{3.1}$$

численно можно получить зависимость $B(A)$, затем напряжение $\sigma_a(A)$, а также восстановить обратную зависимость $A(\sigma_a)$.

Важным условием, обеспечивающим эффективность численного определения $B(A)$, является геометрическая ограниченность неизвестной поперечной деформации $|B| < 1$, несмотря на то, что A может быть большой величиной.

В более сложной модели реакции связей (1.4) нелинейно зависят от удлинений. В качестве функций, аппроксимирующих зависимости сил реакций от удлинений, выберем кубические полиномы.

$$\begin{aligned} \widehat{K}_a(A) &= a_1 + a_2 A + a_3 A^2 + a_4 A^3, \\ \widehat{K}_b(B) &= a_1 + a_2 B + a_3 B^2 + a_4 B^3, \\ \widehat{K}_l(L) &= e_1 + e_2 L + e_3 L^2 + e_4 L^3, \\ \widehat{K}_n(N) &= e_1 + e_2 N + e_3 N^2 + e_4 N^3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Следует отметить, что коэффициенты в парах функций $\widehat{K}_a(A)$, $\widehat{K}_b(B)$ и $\widehat{K}_l(L)$, $\widehat{K}_n(N)$ одинаковы. Размеры A и L увеличиваются, т.е. связи растягиваются, а B и N уменьшаются — связи сжимаются. Выбранные функциональные зависимости (3.2) содержат информацию как о растяжении $\lambda_i > 1$, так и о сжатии связей $0 < \lambda_i < 1$.

В этом варианте модели получаем два уравнения для напряжений при одноосном растяжении в виде

$$\sigma_a = (a_1 + a_2 A + a_3 A^2 + a_4 A^3) q_1(A) + \\ + (e_1 + e_2 L + e_3 L^2 + e_4 L^3) q_2(A); \tag{3.3}$$

$$\sigma_b = (a_1 + a_2 B + a_3 B^2 + a_4 B^3) r_1(A) + \\ + (e_1 + e_2 L + e_3 L^2 + e_4 L^3) r_2(A) + \\ + (e_1 + e_2 N + e_3 N^2 + e_4 N^3) r_3(A), \tag{3.4}$$

где с учетом (3.1)

$$q_1(A) = \frac{A-1}{4}, \quad q_2(A) = \frac{A(1 - l/L(A))}{2},$$

$$r_1(A) = \frac{B(A)-1}{4},$$

$$r_2(A) = \frac{B(A)(1 - l/L(A))}{2},$$

$$r_3(A) = \frac{B(A) - 1}{2}.$$

Неизвестные параметры a_i и e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ входят в выражения напряжений σ_a и σ_b линейным образом, что позволяет их определить, используя метод наименьших квадратов при минимизации функции и $\tilde{\sigma}_b = 0$

$$\Phi(a_i, e_i) = \sum_{A,B} \left[(\sigma_a - \tilde{\sigma}_a)^2 + \sigma_b^2\right], \qquad (3.5)$$

но при условии выполнения ограничений (1.5).

4. Случай несжимаемого материала

Несжимаемость означает постоянство объема в ходе деформирования, т.е. в терминах модели $ABC = 1$. Несжимаемость как упрощенная физическая модель широко используется в механике сплошных сред при описании высокоэластичных (каучукоподобных) материалов. При одноосном растяжении условие несжимаемости принимает вид $AB^2 = 1$, откуда следуют формулы $B(A) = \sqrt{A^{-1}}$, $L(A) = \sqrt{A^2 + A^{-1}}$.

В задаче об одноосном растяжении неизвестные параметры a_i и e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ определяются так, чтобы на боковой поверхности напряжение σ_b было равно нулю, а σ_a — экспериментально измеренному.

Для демонстрации возможностей изложенного метода идентификации параметров механико-геометрической модели были взяты экспериментальные данные [7, 8] по одноосному растяжению каучуков (резин). Для таких эластомеров характерны два основных типа диаграмм растяжения:

1) монотонно возрастающая выпуклая кривая [7] (рис. 3),

2) более сложная S-образная кривая, имеющая участки убывания и возрастания касательного модуля упругости [8] (рис. 4).

Как правило, диаграмма растяжения ненаполненных каучуков соответствует первому типу кривой, а наполненных — второй.

По этим данным на основе приведенных выше формул и из условия минимизации функционала (3.5) получены параметры a_i и e_i функций жесткостей связей (1.4), (3.2) для каждого типа кривой. Результаты идентификации для двух типов диаграмм растяжения эластомеров представлены на рис. 3, 4. На них приняты обозначения:

– кривая с символами ● — исходные экспериментальные данные $\tilde{\sigma}_a$,

– кривая с символами ▲ — аппроксимирующая кривая σ_a (3.3), полученная с помощью метода наименьших квадратов,

– пунктирная — зависимость, рассчитанная по внутренним силам модели (практически совпадает с аппроксимирующей кривой σ_a),

– две кривые с символами ⧫ и **x** — аппроксимирующая кривая σ_b (3.4) и рассчитанные по внутренним силам модели напряжения на боковой поверхности (практически совпадающие и близкие к нулю).

Нестрогое равенство нулю напряжений σ_b на боковой поверхности, а также нестрогое соответствие σ_a и $\tilde{\sigma}_a$ объясняется естественными проблемами выбора вида функций $K_i(\Delta_i)$ модели и неточностями экспериментальных данных.

Для точного определения параметров модели необходимы данные эксперимента, в котором были бы получены синхронизированные (по удлинению) диаграмма растяжения напряжение-деформация и диаграмма зависимости функции поперечной деформации от продольной деформации. При этом должна быть обеспечена достаточная точность измерения этих функций. Ввиду отсутствия таких экспериментальных данных были использованы имеющиеся в литературе диаграммы растяжения напряжение–деформация с дополнительным условием постоянства объема при деформировании.

Нужно отметить, что аппроксимирующие кубические полиномы более адекватны материалу с монотонной кривой первого типа, чем материалу с S-образной кривой второго типа. Средний квадрат невязки функционала (3.5), деленный на число точек измерений, в первом случае равен $\varepsilon_1 = 4{,}9 \cdot 10^{-5}$, а во втором $\varepsilon_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$.

В результате численных экспериментов установлено, что повышение степени полиномов (3.2) неизвестных функций жесткостей связей выше третьей не улучшает качество аппроксимации. Это может свидетельствовать о необходимости выбора других, не полиномиальных, а более физически обоснованных видов функциональных зависимостей жесткостей связей от удлинения.

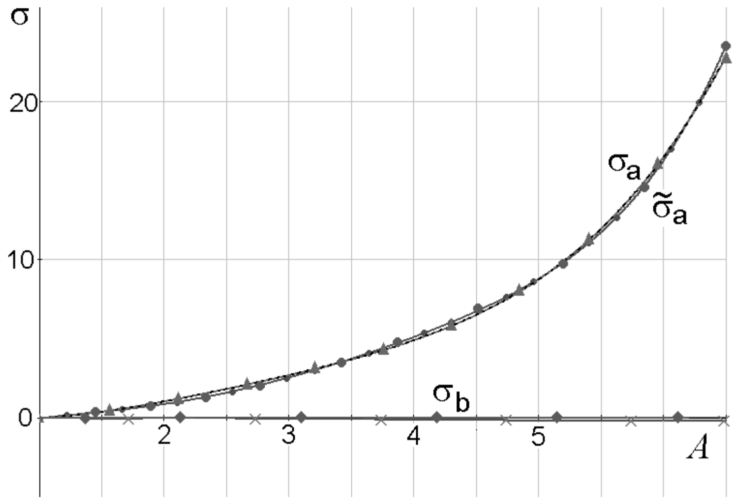


Рис. 3. Зависимости напряжения–деформации для эластомера 1 типа

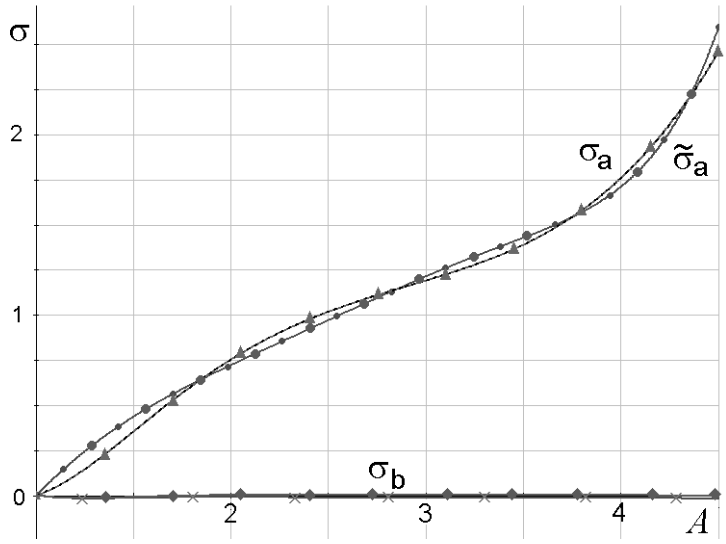


Рис. 4. Зависимости напряжения–деформации для эластомера 2 типа

Функции (3.2), полученные после обработки экспериментальных данных (восстановления параметров a_i и e_i ($i = 1, 2, 3, 4$)), определяющие характер нелинейности связей, представлены на рис. 5.

Здесь и всюду далее варианты рисунков а) относятся к эластомеру первого типа, а варианты б) — к эластомеру второго типа.

Зависимости (1.4) и (3.2) позволяют получить силы реакции связей модели, изменяющиеся с ростом продольного удлинения A (рис. 6).

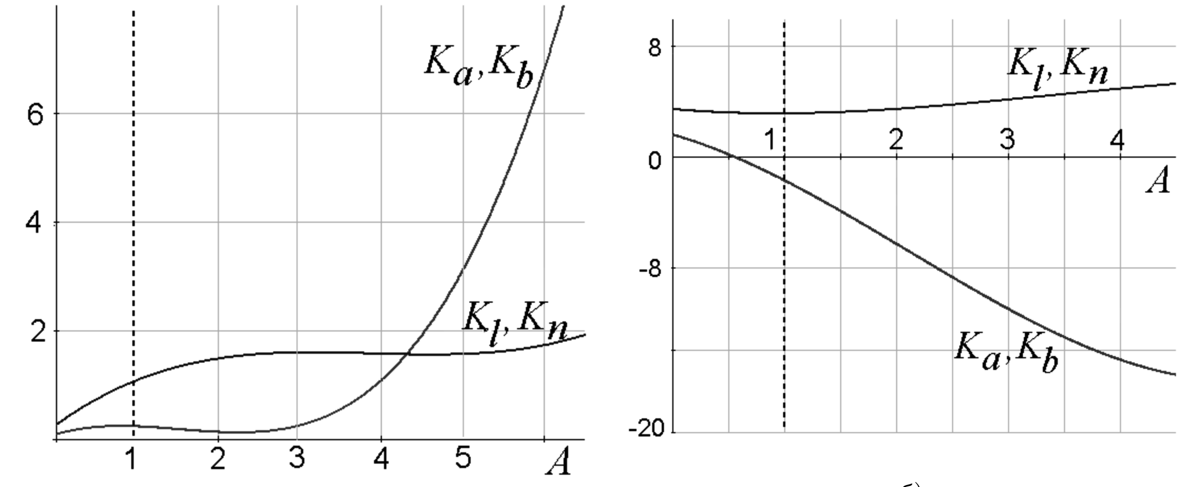
На рис. 7 приведен график этой же зависимости внутренних реакций связей модели от продольного удлинения, но в меньшем масштабе.

Из соотношений

$$\sigma_a = \frac{\partial Э}{\partial A}; \quad \sigma_b = \frac{\partial Э}{\partial B}; \quad \sigma_c = \frac{\partial Э}{\partial C}$$

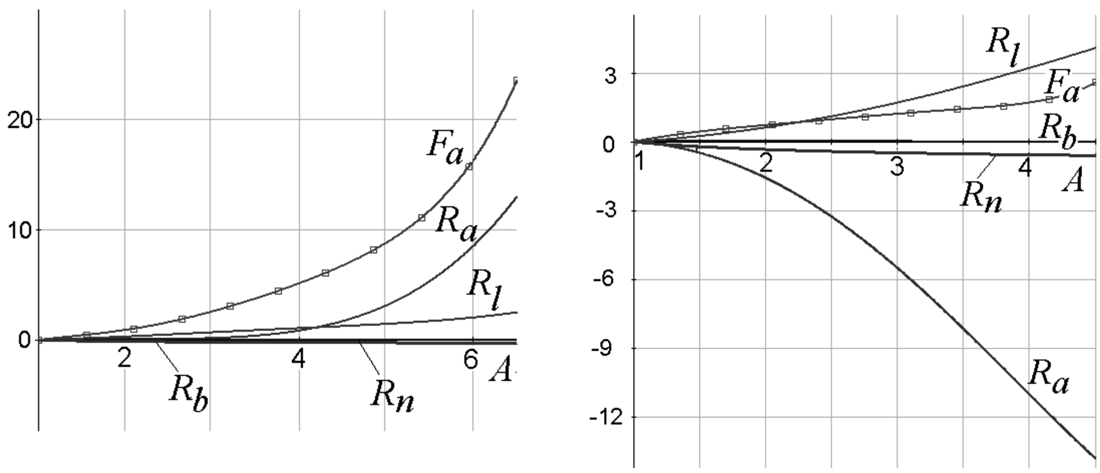
аналитически была восстановлена функция удельной потенциальной энергии деформирования $Э(A, B, C)$. Знание этой функции определяет поведение материалов при всех видах деформаций.

Для параметров модели, полученных в результате расчетов, построены трехмерные графики энергии, отвечающие случаю несжимаемого материала $Э(A, B)$ во всем диапазоне деформаций A и B (деформация $C = 1/AB$) (рис. 8).



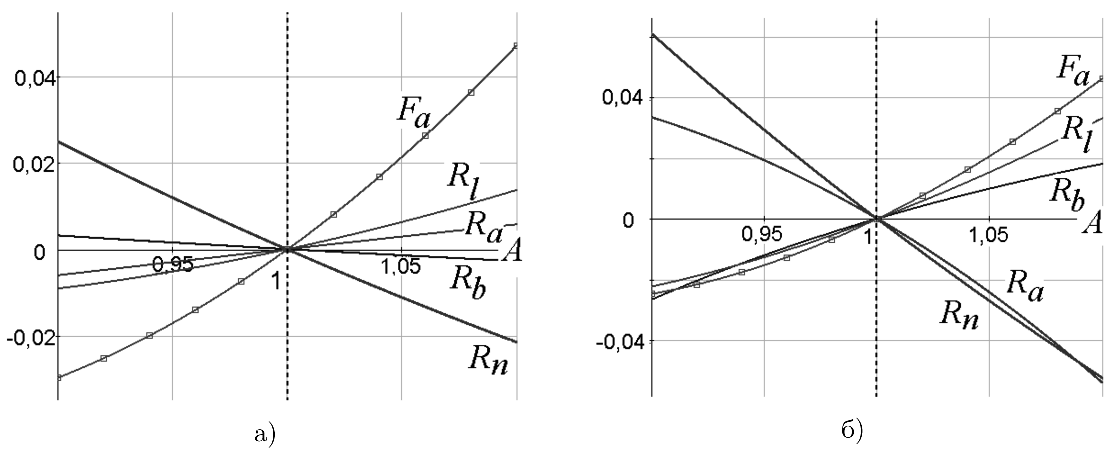
а) б)

Рис. 5. Зависимости жесткостей связей от удлинений



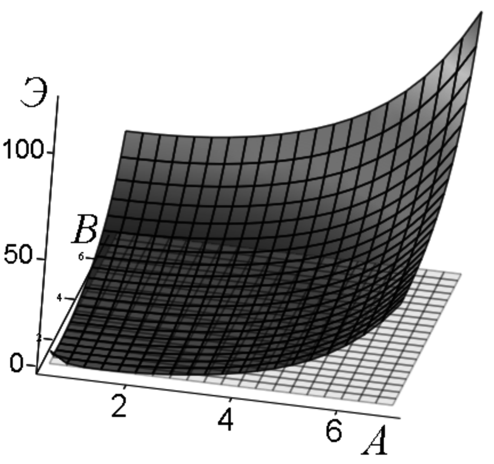
а) б)

Рис. 6. Зависимости сил реакций от продольного удлинения в области малых деформаций

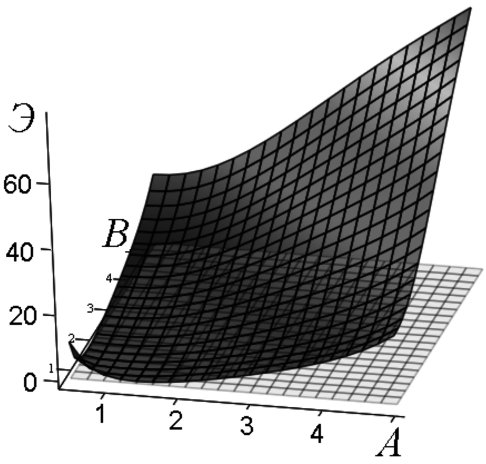


а) б)

Рис. 7. Зависимости сил реакций от продольного удлинения в области малых деформаций

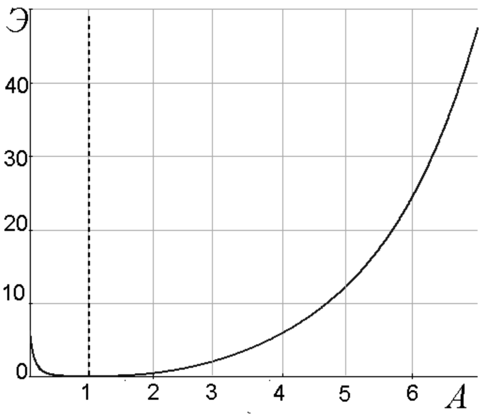


а)

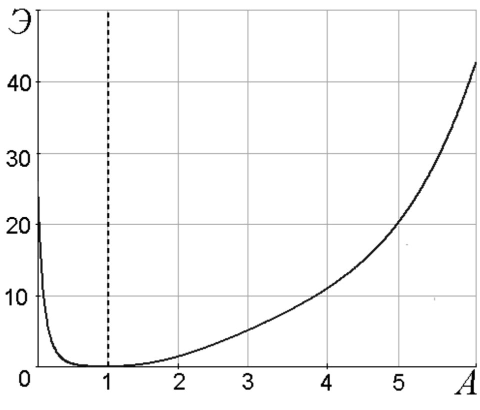


б)

Рис. 8. Графики энергии



а)



б)

Рис. 9. Зависимости энергии от удлинения

На рис. 9 приведены двумерные графики энергии модели для случая одноосного растяжения несжимаемого материала.

Из графиков (рис. 8, 9) видно, что как для первого, так и для второго типов эластомеров полученные в результате аппроксимации функции потенциальной энергии деформирования являются выпуклыми, по крайней мере, в той области, где производилась аппроксимация.

Автор благодарит проф. Зубова Л.М. за полезные советы и поддержку работы.

Литература

1. *Азаров А.Д., Азаров Д.А.* Трехмерная механическая модель для описания больших упругих деформаций при одноосном растяжении // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11. № 2 (53). С. 147–156.
2. *Азаров А.Д., Азаров Д.А.* Сопоставление трехмерной механической модели с законом состояния Мурнагана // Тр. XVI Межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 16–19 октября 2012. Ростов-н/Дону: ЮФУ, Т. I. С. 5–9.
3. *Азаров А.Д., Азаров Д.А.* Описание больших сдвиговых деформаций упругой среды с помощью трехмерной механической модели // Тр. VII Всероссийской (с междунар. участием) конф. по механике деформируемого твердого тела, г. Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2013 г.: в 2 т. Т. I., Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2013. С. 17–21.
4. *Azarov A.D., Azarov D.A.* Description of nonlinear viscoelastic deformations by the 3D mechanical model / Ch. 49 in Proceedings

of the 2015 International Conference on "Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications", devoted to the 100th Anniversary of the Southern Federal University / Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung, Vitaly Yu. Topolov (Eds.). New York: Nova Science Publishers. 2016. PP. 367–375.

5. *Diani J., Brieu M., Gilormini P.* Observation and modeling of the anisotropic visco-hyperelastic behavior of a rubberlike material. // Int. J. Solids Struct. 2006, Vol. 43. P. 3044–3056.
6. *Dorfmann A., Ogden R.W.* A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber. // Int. J. Solids Struct. 2004. Vol. 41. P. 1855–1878.
7. *Белозеров Н.В.* Технология резины. М.: Химия, 1967. 470 с.
8. *Yuko Ikeda, Takeshi Murakami, Kanji Kajiwara.* Cascade model for physically cross-linked elastomer: morphological characteristics of nonionic elastomers and microcrystalline ionene elastomer // J. of macromolecular science, Part B. 2001. Vol. 40. Iss. 2. P. 171–188.

References

1. Azarov A.D., Azarov D.A. Trekhmernaya mekhanicheskaya model dlya opisaniya bol'shikh uprugikh deformaciy pri odnoosnom rastyazhenii [3D mechanical model for description of large elastic deformations under uniaxial tension]. *Vestnik DGTU* [Bull. of Don State Technical University], 2011, vol. 11, no. 2 (53), pp. 147–156. (In Russian)
2. Azarov A.D, Azarov D.A. Sopostavlenie trekhmernoy mekhanicheskoy modeli s zakonom sostoyaniya Murnagana [Comparison of 3D mechanical model with Murnaghan's constitutive law]. *Trudy XVI mezhdunarodnoy konferencii "Sovremennye problem mekhaniki sploshnoy sredy"* [Proc. of the XVI Int. conf. "Modern Problems of Solid Mechanics"], Oct 16–19 2012. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., vol. I. pp. 5–9. (In Russian)
3. Azarov A.D, Azarov D.A. Opisaniye bol'shikh sdvigovykh deformaciy uprugoy sredy s pomoshiyu trekhmernoy mekhanicheskoy modeli [Description of large shear deformations of the elastic continuum by 3D mechanical model]. *Trudy VII Vserossiyskoy (s mezhdunarodnym uchastiem) conf. po mechanike deformiruemogo tverdogo tela* [Proc. of the VII All-Russian (with international participation) conf. on mechanics of deformable hard body], Rostov-on-Don, Oct. 15–18 2013, vol. I, Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2013, pp. 17–21. (In Russian)
4. Azarov A.D., Azarov D.A. Description of nonlinear viscoelastic deformations by the 3D mechanical model. Ch. 49 in *Proc. of the 2015 International Conference on "Physics, Mechanics of New Materials and Their Applications", devoted to the 100th Anniversary of the Southern Federal University.* Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung, Vitaly Yu. Topolov (Eds.). New York, Nova Science Publishers, 2016, pp. 367–375.
5. Diani J., Brieu M., Gilormini P. Observation and modeling of the anisotropic visco-hyperelastic behavior of a rubberlike material. *Int. J. Solids Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 3044-–3056.
6. Dorfmann A., Ogden R.W. A constitutive model for the Mullins effect with permanent set in particle-reinforced rubber. *Int. J. Solids Struct.*, 2004, vol. 41, pp. 1855-–1878.
7. Belozerov N.V. *Tekhnologiya reziny* [Technology of the rubber]. Moscow, Khimiya, 1967, 470 p. (In Russian)
8. Yuko Ikeda, Takeshi Murakami, Kanji Kajiwara. Cascade model for physically cross-linked elastomer: morphological characteristics of nonionic elastomers and microcrystalline ionene elastomer. *Journal of macromolecular science, Part B.*, 2001, vol. 40, iss. 2, pp. 171–188.

Статья поступила 21 сентября 2016 г.