УДК 539.3

СКРЫТЫЕ ДЕФЕКТЫ В ПОКРЫТИЯХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ И СТАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ И ЖЕСТКОМ ИХ СЦЕПЛЕНИИ С ПОДЛОЖКОЙ

Бабешко О. М., Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Хрипков Д. А., Горшкова Е. М., Мухин А. С.

HIDDEN DEFECTS IN COVERINGS FOR HARMONIC AND STATIC ACTIONS AND RIGID CONTACT WITH BASE

Babeshko O. M.[*], Babeshko V. A.[*,**], Evdokimova O. V.[**], Khripkov D. A.[*], Gorshkova E. M.[*], Mukhin A. S.[*]

[*] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[**] Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. In earlier works of the authors related to the investigation of the properties of hidden defects in materials with coverings, a number of features was established for defects and coverings, differently bonded to the substructure or substrate. In particular, it should be pointed out that on a number of occasions a contact of covering with the substrate can be rigid, though the nature of the loading of the covering is such that some components of contact straining in the interaction zone of the covering with the substructure can be neglected. So, if the covering is loaded, as a rule, by forces normal to the covering standards, then in the area of the contact of the covering with the substrate, tangential straining, very accurately, can be neglected. Then you can take into consideration the boundary problem in simplified position the contact of the covering with the substrate without friction. If the covering is thin enough in thickness, then if there are significant tangential effects and in the absence of normal forces, we can consider the boundary problem under the assumption of flexible contact, that is, with neglect of normal components. The mentioned types of the boundary problems were studied in many works of authors. At the same time, in connection with the complexity, the tridimensional boundary problem for the object with rigid bonded covering has not studied before. In this setting, in the contact area of the covering with the substrate all three components of the contact straining arise, none of which can be neglected. The covering experiences a general type of the impact, as normal, and tangent. It is this type of formulation of the boundary problem for an object with covering that is considered in this article.

Keywords: block element, factorization, topology, integral and differential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems, bodies with coverings, hidden defects.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: vestnik@kubsu.ru.

Горшкова Елена Михайловна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru.

Мухин Алексей Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: muhin@mail.kubsu.ru

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ, 0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088 по 0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323).

1. Случай гармонических колебаний

Рассматривается граничная задача о разнотипных покрытиях, моделируемых пластинами Кирхгофа, расположенных на трехмерной деформируемой слоистой среде. Считаем, что количество пластин равно B и каждая обладает индивидуальными механическими свойствами. Примем оси координат x_1ox_2 лежащими в плоскости пластин, а ось x_3 — направленной по внешней нормали к подложке. Рассмотрим случай гармонических воздействий на их поверхность пластин, жестко сцепленных с основанием. Тогда, сократив параметр гармонических колебаний, уравнения граничной задачи для пластин представимы в виде [1,2]

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b = \mathbf{s}_b(x_1, x_2), \quad b = 1, 2, \ldots, B. \tag{1.1}$$

Здесь каждая пластина рассматривается как многообразие с краем, где $\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}$ — вектор перемещения точек пластин по горизонтальным и вертикальным направлениям срединной поверхности. Имеет место обозначение

$$\mathbf{s}_b(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{pmatrix},$$

$$\eta_{11} = -\varepsilon_{5b}s_{1b}(x_1, x_2), \quad \eta_{22} = -\varepsilon_{5b}s_{2b}(x_1, x_2),$$
$$\eta_{33} = \varepsilon_{53b}s_{3b}(x_1, x_2),$$
$$s_{nb}(x_1, x_2) = (t_{nb} + g_{nb}),$$

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$$\rho_{12} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)u_{2b},$$

$$\rho_{21} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)u_{1b},$$

$$\rho_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{43b}\right)u_{1b},$$

$$\rho_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{43b}\right)u_{2b},$$

$$\rho_{33} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \varepsilon_{43b}\right)u_{3b}.$$

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений имеет вид

$$\mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b = -\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\xi_{12} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b}, \quad \xi_{21} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b},$$
$$\xi_{11} = (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2 - \varepsilon_{43b})U_{1b},$$
$$\xi_{22} = (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2 - \varepsilon_{43b})U_{2b},$$
$$\xi_{33} = (-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 + \varepsilon_{43b})U_{3b},$$
$$\mathbf{U} = F\mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = F\mathbf{g}, \quad \mathbf{s}_b = \{s_{1b}, s_{2b}, s_{3b}\},$$
$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{g}_b,$$
$$\mathbf{T}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{t}_b, \quad \mathbf{s}_b = \{s_{1b}, s_{2b}, s_{3b}\}.$$

Здесь

$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1 - \nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1 + \nu_b),$$

$$g_{1b} = \mu_b\left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}\right),$$

$$g_{2b} = \mu_b\left(\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}\right), \quad x_3 = 0,$$

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} = \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}\right]U_{3b},$$
$$U_{3b} = \mathbf{F_2}u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F_2}g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F_2}t_{3b},$$
$$b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right) = f_{3b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

$$Q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b),$$

$$\frac{\partial u_{3b}}{H\partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b), \quad D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)},$$

$$\varepsilon_{43b} = \omega^2\rho_b\frac{(1 - \nu_b^2)12H^4}{Eh_b^2},$$

$$\varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2)12H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu)H}{\mu}.$$

Здесь нормальные напряжения t_{3b} действует на плиту сверху и g_{3b} — снизу.

Аналогично напряжения g_{1b}, g_{2b} и t_{1b}, t_{2b} действуют в касательной плоскости, причем

g_{2b} и t_{2b} — в направлении по нормалей к торцам литосферных плит.

Ограничиваясь двумя полуплоскостями на деформируемом основании, следуя принятым в [1,2] обозначениям, придадим параметрам левой и правой полуплоскости соответственно обозначения $b = \lambda, r$.

Приняты также следующие обозначения: μ_b — модуль сдвига, ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{t}_b$ — векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных, g_{1b}, g_{2b}, t_{1b}, t_{2b} и вертикальных, g_{3b}, t_{3b} воздействий соответственно, действующих по касательной к границе основания и по нормали к ней в областях Ω_b. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Описанные в [2] граничные условия здесь сохраняются. Выражения для нормальной N_{x_2} и касательной $T_{x_1x_2}$ составляющих напряжений к срединной плоскости на торцах пластин даются соответственно соотношениями

$$T_{x_1x_2} = \varepsilon_7 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

$$N_{x_2} = \varepsilon_8 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right),$$

$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1+\nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1-\nu^2)H}.$$

2. Случай статической постановки

Считаем, что дефекты [3,4] представляют собой полубесконечные пластины Кирхгофа в форме полуплоскостей, границы которых параллельны и находятся на дистанции 2θ, $\theta \geqslant 0$, причем каждая обладает индивидуальными механическими свойствами. Примем оси координат $x_1 o x_2$ лежащими в плоскости пластин, а ось x_3 — направленной по внешней нормали к подложке. Рассмотрим случай статических воздействий на поверхность пластин, жестко сцепленных с основанием. Тогда уравнения граничной задачи для пластин представимы в виде

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)\, \mathbf{u}_b - \mathbf{s}_b(x_1, x_2) = 0, \quad b = \lambda, r.$$

Здесь каждая пластина рассматривается как многообразие с краем, где $\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}$ — вектор перемещения точек пластин по горизонтальным u_{1b}, u_{2b} и вертикальным u_{3b} направлениям срединной поверхности, а $b = \lambda$ для левой плиты и $b = r$ — для правой. Имеют место обозначения

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)\, \mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\psi_{12} = (\varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}) u_{2b},$$

$$\psi_{21} = (\varepsilon_{2b} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}) u_{1b},$$

$$\psi_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_{1b},$$

$$\psi_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) u_{2b},$$

$$\psi_{33} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b}.$$

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений (1.1) имеет вид

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b = - \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\phi_{12} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b}, \quad \phi_{21} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b},$$

$$\phi_{11} = (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2) U_{1b},$$

$$\phi_{22} = (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2) U_{2b},$$

$$\phi_{33} = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F}\mathbf{g}_b \quad \mathbf{T}_b = \mathbf{F}\mathbf{t}_b,$$

$$\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}, \quad \mathbf{g}_b = \{g_{1b}, g_{2b}, g_{3b}\},$$

$$\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}, t_{3b}\}.$$

Для деформируемого основания, описываемого граничной задачей, применимы различные модели, даваемые соотношениями

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \\ = \varepsilon_6^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times e^{-i\langle \alpha, x \rangle}\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta,$$

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda\big(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant -\theta\big),$$
$$\Omega_r\big(|x_1| \leqslant \infty;\ \theta \leqslant x_2\big),$$
$$\Omega_\theta\big(|x_1| \leqslant \infty;\ -\theta \leqslant x_2 \leqslant \theta\big),$$
$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m,n = 1,2,3,$$
$$\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \to \infty,$$
$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}, \quad \mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{g},$$

$\mathbf{g}$ — вектор касательных и нормальных напряжений под плитами на границе основания. Некоторые типы матриц-функций $\mathrm{K}(\alpha_1,\alpha_2)$ оснований, называемые символом системы интегральных уравнений, приведены в [5–7]. Например, для упругого слоя с закрепленной нижней гранью в динамическом случае она имеет вид

$$\mathrm{K} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2\mathrm{M}+\alpha_2^2\mathrm{N} & \alpha_1\alpha_2(\mathrm{M}-\mathrm{N}) & i\alpha_1 P \\ \alpha_1\alpha_2(\mathrm{M}-\mathrm{N}) & \alpha_1^2\mathrm{N}+\alpha_2^2\mathrm{M} & i\alpha_2 P \\ -i\alpha_1 P & -i\alpha_2 P & \mathrm{K} \end{pmatrix}.$$

В случае колебания слоя с закрепленной нижней гранью элементы матрицы-функции имеют представление

$$\mathrm{M}(u) = \chi_2^2\big(\sigma_2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1 - \\ - \sigma_1^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2\big)\left(2u^2\Delta(u)\right)^{-1},$$

$$\mathrm{N}(u) = \frac{2\operatorname{sh} 2\sigma_2}{u^2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_2}, \tag{2.1}$$

$$K(u) = \chi_2^2\big(\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 - \\ - \sigma_2^{-1}u^2 \operatorname{sh} 2\sigma_2 \operatorname{ch} 2\sigma_1\big)\left(2\Delta(u)\right)^{-1},$$

$$\mathrm{P}(u) = \Big(\big(2u^2 - 0{,}5\chi_2^2\big)\left(1 - \operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2\right) + \\ + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\big[2u^4 - u^2\left(1{,}5\chi_2^2+\chi_1^2\right) + \\ + \chi_2^2\chi_1^2\big] \operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2\Big)(\Delta(u))^{-1},$$

$$\Delta(u) = u^2\left(2u^2-\chi_2^2\right) - \\ - \left(2u^4 - u^2\chi_2^2 + 0{,}25\chi_2^4\right)\operatorname{ch} 2\sigma_1 \operatorname{ch} 2\sigma_2 + \\ + \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}u^2\big[2u^4 - u^2\left(2\chi_2^2+\chi_1^2\right) + \\ + \chi_1^2\chi_2^2 + 0{,}25\chi_2^4\big]\operatorname{sh} 2\sigma_1 \operatorname{sh} 2\sigma_2,$$

$$\chi_1^2 = \rho(\lambda+2\mu)^{-1}\omega^2, \quad \chi_2^2 = \rho\mu^{-1}\omega^2,$$
$$\sigma_n = \sqrt{u^2-\chi_n^2}, \quad u = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \quad n = 1,2.$$

Статический случай этой же задачи приводит к элементам вида

$$M(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u + 4u)}{u^2\Delta}, \\ N(u) = \frac{2\operatorname{sh} 2u}{u^3 \operatorname{ch} 2u}, \tag{2.2}$$

$$P(u) = -\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u - 4u^2}{u\Delta},$$

$$K(u) = \frac{(1-\nu)(3-4\nu)(\operatorname{sh} 4u - 4u)}{\Delta},$$

$$\Delta = u\left[(3-4\nu)\operatorname{sh}^2 2u + 4u^2 + 4(1-\nu)^2\right].$$

Матрица (1.2) граничной задачи является блочно-диагональной, состоящей из расположенной на диагонали матрицы второго порядка, представляющей матричный оператор или векторный оператор, и отдельного на диагонали скалярного оператора. Поскольку операторы независимы, это существенно облегчает исследование граничной задачи на этапе внешнего анализа [8], позволяя воспользоваться результатами, выполненными в работах [1–4].

3. Внешний анализ граничной задачи

Граничные задачи для каждого блока блочной структуры погружаются в топологическое пространство, индуцированное трехмерным евклидовым пространством, после чего применением формулы Стокса в топологическом пространстве, сводятся к функциональным уравнениям. Приведем представления функциональных уравнений, отвечающих перечисленным операторам граничной задачи. Функциональные уравнения скалярного оператора имеют вид [1, 3]

$$R_{3b}(-i\alpha_1,-i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2 U_{3b} = \\ = -\int_{\partial\Omega_b} \omega_{3b} + S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2) = \varepsilon_{53b}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)(t_{3b}+g_{3b}),$$

$$b = \lambda, r.$$

Здесь ω_{3b} — участвующие в представлении внешние формы, имеющие для левой (λ) и правой (r) литосферной плиты выражение

$$\omega_\lambda = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Big\{-\Big[\frac{\partial^3 u_{3\lambda}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3\lambda}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + $$
$$+ i\alpha_2^3 u_{3b} + 2\frac{\partial^3 u_{3\lambda}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3\lambda}}{\partial x_1^2}\Big]\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+\Big[\frac{\partial^3 u_{3\lambda}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1\frac{\partial^2 u_{3\lambda}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3\lambda}\Big]\,\mathrm{d}x_2\Big\},$$

$$\omega_r = -e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Big\{-\Big[\frac{\partial^3 u_{3r}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3r}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + $$
$$+ i\alpha_2^3 u_{3r} + 2\frac{\partial^3 u_{3r}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3r}}{\partial x_1^2}\Big]\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+\Big[\frac{\partial^3 u_{3r}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1\frac{\partial^2 u_{3r}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3r}\Big]\,\mathrm{d}x_2\Big\}.$$

Функциональные уравнения граничной задачи для векторного случая, представленные для каждой плиты, являются матричными и имеют вид

$$\mathbf{R}_{12b}(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})\mathbf{U}_{12b} = $$
$$= -\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_{12b} + \mathbf{S}_{12b}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{U}_{12b} = \{\, U_{1b}, U_{2b}\,\}, \quad \omega_{12b} = \{\omega_{1b}, \omega_{2b}\},$$

$$\mathbf{S}_{12b}(\alpha_1, \alpha_2) = $$
$$= -\varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(\alpha_{1b}, \alpha_{2b})(\mathbf{g}_b + \mathbf{t}_b), \quad (3.1)$$
$$b = \lambda, r,$$
$$\mathbf{S}_{12b}(\alpha_1, \alpha_2) = \{S_{1b}, S_{2b}\},$$

$$\mathbf{R}_{12b}(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b}) = $$
$$= -\begin{pmatrix} (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2) & \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 \\ \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 & (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2)\end{pmatrix}.$$

Здесь ω_b — вектор внешних форм, имеющих представление

$$\omega_{1\lambda} = -e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Big\{-\Big(\varepsilon_{1\lambda}\frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial x_2} + \varepsilon_{2\lambda}\frac{\partial u_{2\lambda}}{\partial x_1} - $$
$$- i\varepsilon_{1\lambda}\alpha_2 u_{1\lambda}\Big)\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \Big(\frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_{1\lambda} - i\varepsilon_{2\lambda}\alpha_2 u_{2\lambda}\Big)\,\mathrm{d}x_2\Big\},$$

$$\omega_{2\lambda} = -e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Big\{-\Big(\varepsilon_{2\lambda}\frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2\lambda}}{\partial x_2} - $$
$$- i\alpha_2 u_{2\lambda}\Big)\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \Big(\varepsilon_{1\lambda}\frac{\partial u_{2\lambda}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1\lambda}\alpha_1 u_{2\lambda} - i\varepsilon_{2\lambda}\alpha_2 u_{1\lambda}\Big)\,\mathrm{d}x_2\Big\},$$

$$\omega_{1r} = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Big\{-\Big(\varepsilon_{1r}\frac{\partial u_{1r}}{\partial x_2} + \varepsilon_{2r}\frac{\partial u_{2r}}{\partial x_1} - $$
$$- i\varepsilon_{1r}\alpha_2 u_{1r}\Big)\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \Big(\frac{\partial u_{1r}}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_{1r} - i\varepsilon_{2r}\alpha_2 u_{2r}\Big)\,\mathrm{d}x_2\Big\},$$

$$\omega_{2r} = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Big\{-\Big(\varepsilon_{2r}\frac{\partial u_{1r}}{\partial x_1} + \frac{\partial_{2r}}{\partial x_2} - $$
$$- i\alpha_2 u_{2r}\Big)\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \Big(\varepsilon_{1b}\frac{\partial u_{2r}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1b}\alpha_1 u_{2r} - i\varepsilon_{2r}\alpha_2 u_{1r}\Big)\,\mathrm{d}x_2\Big\}.$$

Дальнейшее исследование поставленной задачи требует привлечения средств внешнего анализа, алгоритм которого разработан авторами и детально изложен в [8].

Чтобы осуществить сопряжение литосферных плит с трехмерным основанием, имеющим на границе трехмерные векторы перемещений и напряжений, необходимо в такой же форме представить параметры напряженно-деформированного состояния литосферных плит. Для этого введем в рассмотрение объединенный вектор внешних форм и параметра внешних нагрузок

$$\begin{aligned}\omega_b &= \{\omega_{1b}, \omega_{2b}, \omega_{3b}\}, \\ \mathbf{S}_b &= \{S_{1b}, S_{2b}, S_{3b}\}.\end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда решения в каждой плите можно представить в виде

$$\mathbf{u}_\lambda\,(x_1, x_2, 0) = $$
$$= \mathbf{F}_2^{-1}\,(x_1, x_2)\,[\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \times$$
$$\times\Big(-\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \mathbf{S}_\lambda\Big),$$

$$\mathbf{u}_r\left(x_1, x_2{,}0\right) = \\ = \mathbf{F}_2^{-1}\left(x_1, x_2\right)\left[\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left(-\int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r + \mathbf{S}_r\right).$$

Сопрягая все три компоненты перемещений литосферной плиты, как нормальные, так и касательные, с перемещениями верхней границы основания, получаем соотношения вида

$$\mathbf{P}_\lambda \mathbf{u}\left(x_1, x_2{,}0\right) + \mathbf{P}_\theta \mathbf{u}\left(x_1, x_2{,}0\right) + \\ + \mathbf{P}_r \mathbf{u}\left(x_1, x_2{,}0\right) = \\ = \varepsilon_6^{-1}\mathbf{F_2^{-1}K}\left(\alpha_1, \alpha_2{,}0\right) \times \\ \times \left[\mathbf{G}_\lambda\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + \mathbf{G}_r\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\right],$$

$$\mathbf{G}_\lambda\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_\lambda\mathbf{g}\left(x_1, x_2\right),$$

$$\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_r\mathbf{g}\left(x_1, x_2\right),$$

$$\mathbf{P}_p\mathbf{u} = \mathbf{F}_2^{-1}\left[\mathbf{R}_p(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_p} \omega_p + \mathbf{S}_b(\alpha_1, \alpha_2)\right\rangle,$$

$$p = \lambda, r.$$

Здесь $\mathbf{P}_\lambda$, $\mathbf{P}_r$, $\mathbf{P}_\theta$ — проекторы на левую, правую полуплоскости и на срединный промежуток, являющиеся носителями соответствующих плит и описывающего промежуток $|x_2| \leqslant \theta$. Внося соотношения (2.2) в левые части (3.1) и применив преобразования Фурье, получим соотношения вида

$$\left[\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1}\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \mathbf{S}_\lambda\right\rangle + \mathbf{U}_\theta + \\ + \left[\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1}\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r + \mathbf{S}_r\right\rangle - \\ -\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2{,}0)\left[\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)\right] = 0,$$

$$\mathbf{U}_\theta = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_\theta\mathbf{u}\left(x_1, x_2\right).$$

Вектор-функции $\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)$, являющиеся преобразованиями Фурье функций с носителями в полуплоскостях, есть регулярные функции параметров α_2 при фиксированном α_1 в нижней и верхней полуплоскостях соответственно. В связи с этим можем обозначить вектор-функции, регулярные по параметру α_2 в нижней, знак минус, и в верхней, знак плюс, полуплоскостях, положив

$$\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_-(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

Внося эти обозначения в предыдущее соотношение, приходим к матричному функциональному уравнению Винера–Хопфа

$$\mathbf{MG}_+ = \mathbf{G}_- + \mathbf{V} + \mathbf{K_1^{-1}U}_\theta, \quad \mathbf{M} = \mathbf{K_1^{-1}K}_2,$$
$$\mathbf{K}_2 = \varepsilon_r\mathbf{R}_r^{-1} - \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_1 = \varepsilon_6^{-1}\mathbf{K} - \varepsilon_\lambda\mathbf{R}_\lambda^{-1},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_1^{-1}\left(\mathbf{R}_\lambda^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda + \mathbf{R}_r^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r - \right. \\ \left. - \varepsilon_\lambda\mathbf{R}_\lambda^{-1}\mathbf{T}_\lambda - \varepsilon_r\mathbf{R}_r^{-1}\mathbf{T}_r\right),$$

$$\mathbf{U}_\theta = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_\theta\mathbf{u}\left(x_1, x_2\right),$$

которое, наряду с наличием неизвестных $\mathbf{G}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$, содержит в качестве неизвестных также и их функционалы вида $\mathbf{G}_\pm(\alpha_1, \alpha_{2\pm})$, нуждающиеся в последующем определении из некоторой системы алгебраических уравнений [1–4]. В этих же работах изложены способы определения функционалов, входящих во внешние формы. Для исследования особенностей решения функционального уравнения был использован факторизационный подход, изложенный в [5–7]. Исследование свойств решений этого матричного функционального уравнения привело к наряду с изложенным в [1–7] результатам, также к новым, не встречавшимся ранее.

При $\theta > 0$, то есть, когда торцы плит удалены на расстояние 2θ, контактные напряжения на краях пластин имеют представление [3] вида

$$\mathbf{g}_\lambda(x_1, x_2) = \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-0{,}5+i\gamma} + \\ +\sigma_{2\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-0{,}5-i\gamma}, \\ x_2 < -\theta,$$
$$\mathbf{g}_r(x_1, x_2) = \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-0{,}5+i\gamma} + \\ +\sigma_{2r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-0{,}5-i\gamma}, \\ x_2 > \theta, \quad \gamma > 0.$$

Векторы $\sigma_{1\lambda}$, σ_{1r} непрерывны по обоим параметрам. Параметр γ определяется механическими характнристиками основания, способ его нахождения описан в [3]. Например, для случая (2.1), (2.2) имеем $\gamma = \operatorname{arcth}\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$, где

ν — коэффициент Пуассона материала основания. Представление (3.2) показывает, что контактные напряжения по мере приближения к торцу литосферной плиты начинают сильно осциллировать по закону, описываемому функцией

$$|x_2 - \theta|^{-0,5} \cos\left(\gamma \ln |x_2 - \theta|\right), \quad |x_2 - \theta| \to 0.$$

Последнее означает, что только края литосферных плит склонны к разрушению при требовании в условиях линейной упругости обеспечить полное сцепление с основанием.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О скрытых дефектах в наноструктурах, телах с покрытиями и сейсмологии // ДАН. 2014. Т. 457. № 1. С. 45–49.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологические методы в теории скрытых дефектов и некоторые аномалии // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 650–655.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О разнотипных покрытиях с дефектами в статических задачах сейсмологии и наноматериалах // ДАН. 2014. Т. 459. № 6. С. 41–45.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об особенностях скрытых дефектов в разнотипных тонкостенных покрытиях // ДАН. 2015. Т. 460. № 4. С. 403–407.
5. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
7. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Внешний анализ в проблеме скрытых дефектов и прогнозе землетрясений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 2. С. 19–28.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O skrytykh defektakh v nanostrukturakh, telakh s pokrytiyami i seysmologii [On hidden defects in nanostructures, bodies with coatings and seismology]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Science], 2014. vol. 457, no 1, pp. 45–49. (In Russian)
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskie metody v teorii skrytykh defektov i nekotorye anomalii [Topological methods in the theory of hidden defects and some anomalies]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Science], 2014, vol. 457, no. 6, pp. 650–655. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O raznotipnykh pokrytiyakh s defektami v staticheskikh zadachakh seysmologii i nanomaterialakh [On various types of coatings with defects in static seismology and nanomaterials]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Science], 2014, vol. 459, no. 6, pp. 41–45. (In Russian)
4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob osobennostyakh skrytykh defektov v raznotipnykh tonkostennykh pokrytiyakh [On the features of hidden defects in various types of thin-walled coatings]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Science], 2015, vol. 460, no. 4, pp. 403–407. (In Russian)
5. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey.* Moscow, Nauka Pub., 1979, 320 p. (In Russian)
6. Babeshko V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of the theory of elasticity]. Moscow, Nauka Pub., 1984, 256 p. (In Russian)
7. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Nonclassical mixed problems of the theory of elasticity]. Moscow, Nauka Pub., 1974, 456 p. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Vneshniy analiz v probleme skrytykh defektov i prognoze zemletryaseniy [External analysis in the problem of hidden defects and the forecast of earthquakes]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 2, pp. 19–28. (In Russian)

Статья поступила 18 марта 2017 г.