

УДК 539.3

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ОБЛАСТЕЙ

Вовк Л. П., Кисель Е. С.

ANALYSIS OF CHARACTERISTICS OF THE WAVE FIELD IN THE PROBLEM
DIAGNOSTICS OF HETEROGENEITIES THERMOELASTIC AREAS

Vovk L. P., Kisel E. S.

State Technical University "Donetsk National Technical University", Gorlovka, 84646, Ukraine
e-mail: e.s.kisel@gmail.com

Abstract. The main idea of this study is the creation of universal analytical selection's methods of singular components of solution in explicit form with obligatory subsequent account of these results for the effectiveness increase of numerical schemes and methods of investigation. The conducted analytically analysis of the impact of the temperature field on the resonance frequency spectrum for the sectionally heterogeneous rectangular area showed that the superposition method in this interpretation can be considered as common methodological approach, extending the opportunities of researches of the composite structures deflected mode. To test the validity of suggested analytical methods, the discrete problems with known analytical solutions and experimental results have been solved. The adequacy of developed technique and numerical results of research are compared with numerical results obtained by the finite elements method in ANSYS computer system. It can be insisted that the temperature field impact on the resonance frequency spectrum for the sectionally heterogeneous rectangular area is insignificant. It is confirmed by the conducted finite-element analysis for various combinations of geometric, elastic and temperature parameters of two-layer rectangular area, since resonance frequencies, calculated with and without temperature field, differ insignificantly.

Keywords: thermo-elastic region, local stress concentration, stress-strain state, strength calculation, singular points, section details, the natural frequencies.

Введение

Выбранный критерий прочности конструкционного элемента, он обязательно должен учитывать именно максимальные напряжения, возникающие в зонах локальной концентрации напряжений (ЛКН). И поскольку наличие ЛКН может быть причиной выхода элемента из строя, то качественное и количественное определение степени концентрации всегда важным и актуальным вопросом.

Расчет распределения напряжений в элементах конструкций связан со значительными трудностями, обусловленными сложностью формы и внутренней структуры области и условиями ее нагружения. Поэтому в приближенных расчетах чаще всего применяют упрощенные модели с экспериментальной оценкой их эффективности, что обычно приводит к неверным выводам. Погрешности расчетов еще более возрастают, если необходимо рассматривать динамическое деформи-

рование областей, поскольку интенсивность ЛКН в динамических задачах существенно возрастает. Кроме того, появляется необходимость учета возможности проявления резонансных эффектов. Важная особенность геометрии сечений, подвергнутых ЛКН, обусловлена существованием на границе их пересечения некоторых сингулярных угловых точек, напряженно-деформированное состояние (НДС) в окрестности которых и определяет прочность всей конструкции в целом. Здесь также имеет место появление новых волновых эффектов, связанных с концентрацией динамических напряжений.

Проведенный анализ научных публикаций показал, что наиболее эффективным и часто используемым методом решения связанных задач термоупругости остаётся МКЭ. Отмечается относительно небольшой (по сравнению с двумерными задачами теории упругости) объем исследований, посвященных аналити-

Вовк Леонид Петрович, д-р техн. наук, профессор кафедры высшей математики Автомобильно-дорожного института ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»; e-mail: lv777@list.ru

Кисель Екатерина Сергеевна, старший преподаватель кафедры высшей математики Автомобильно-дорожного института ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»; e-mail: e.s.kisel@gmail.com

ческим методам решения задач данного круга, в частности особенностям краевых и граничных эффектов в задачах термоупругости и анализу сингулярности напряжений в неоднородных термоупругих телах с негладкой границей.

Метод суперпозиции в решении осесимметричных задач о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах подробно изложен в [1] и развит в [2, 3]. На основе метода суперпозиции краевой резонанс исследовался в работах [4, 5]. К настоящему времени накоплен огромный объем информации, полученной с использованием экспериментальных, численных и численно-аналитических подходов, описывающий различные стороны проявления краевого резонанса. Значительная часть ранних публикаций по этой тематике обсуждалась в [5, 6], где для уравнений линейной теории упругости в окрестности угловых точек имеет место асимптотическое представление решения краевых задач.

Вопросам исследования решений задач теории упругости в окрестности угловых точек, принадлежащих линиям раздела разнородных сред, посвящено достаточно много публикаций. Обширная библиография по данному вопросу приведена в [7]. Так, в [8] для бесконечных клиновидных областей методом преобразования Меллина получены значения коэффициентов интенсивности напряжений в сингулярных точках.

В [9] выполнено построение модели связанной термоупругости для расчёта напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких прямоугольных и круглых пластин из изотропных разносопротивляющихся материалов, находящихся под действием механических нагрузок и температурных полей. В [10] была проведена разработка методов анализа плоских смешанных задач динамической теории упругости с разрывом граничных условий для однородных и неоднородных клиновидных областей на основе развития метода граничных интегральных уравнений (ГИУ). В [11] аналитически найдены решения основных краевых задач колебаний пластин с учетом температуры с использованием полученного И. Г. Филипповым уравнения и уточненных граничных условий, установлено влияние теплового фактора на собственные частоты колебания термоупругих пластин. Необходимо отметить также [12], где была проведена разработка аналитических и численных методов исследования напряженного состояния в окрестности сингулярных точек и поиск пу-

тей ликвидации сингулярности и существенного снижения концентрации напряжений. Граничные задачи связанной термоупругости для двумерных областей различных конфигураций в контексте построения однородных фундаментальных решений, рассматривались в [13].

Однако в отдельных работах названных выше авторов при исследовании ЛКН в прямоугольных термоупругих областях, во-первых, не введены параметры интенсивности ЛКН, аналогичные широко известным коэффициентам концентрации напряжений, во-вторых, нет анализа особенностей НДС с учётом сингулярности границы области и влияния температурных напряжений на ЛКН.

Это позволило определить круг вопросов, требующих дальнейшего развития и решения, в частности, о распространении усовершенствованного алгоритма метода суперпозиции для расчета термоупругих неоднородных прямоугольных областей с целью определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых/внутренних точек областей.

Главная идея развиваемого авторами подхода состоит в создании универсальных аналитических методов выделения сингулярных составляющих решения в явном виде с обязательным последующим учетом этих результатов для повышения эффективности численных схем и методов исследования.

1. Основная часть

Обобщение метода суперпозиции на случай кусочно-неоднородных термоупругих областей изложено при решении задачи о свободных постоянных симметричных колебаниях кусочно-однородной термоупругой области, сечение которой в безразмерных координатах представляет собой прямоугольную область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ (рис. 1).

Области $G^{(m)}$ ($m = 1, 2$) состыкованы друг с другом. Они являются изотропными и в общем случае имеют разные упругие константы, которые в безразмерных координатах определяются неравенствами

$$G^{(1)} = \{(x, y) : |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\},$$

$$G^{(2)} = \{(x, y) : x \in [-1, -\delta] \cup [1, \delta]; |y| \leq \eta\},$$

где x, y — отнесённые к половине большей стороны прямоугольника a , декартовы координаты; η, δ — безразмерные геометрические параметры.

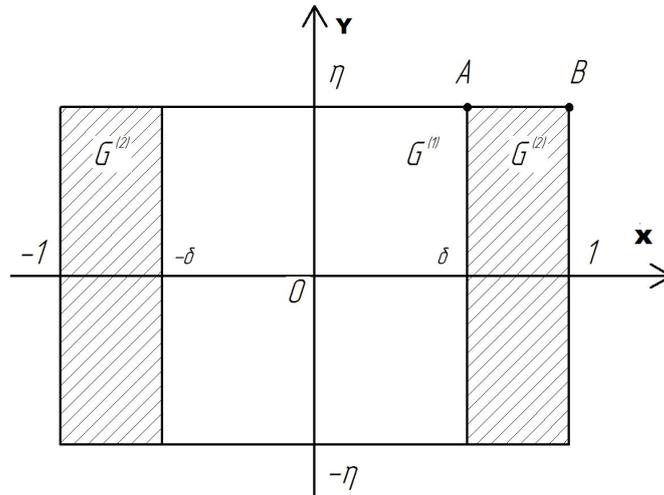


Рис. 1. Геометрия сечения тела

На границах области $x = \pm 1$, $y = \pm \eta$ задано нормальное нагружение интенсивности $q_1(x)$ и $q_2(y)$ соответственно, которое гармонично изменяется во времени с частотой ω . Предполагается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой. Безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i^{(m)}(x, y)$, $i = m = 1, 2$ и прироста температуры $\Theta(x, y)$ определяются системой уравнений связанной термоупругости в безразмерных координатах для областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ [14]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial y^2} + \\ & + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) = \\ & = \frac{\gamma^{(m)}}{\mu^{(m)}} T_0 \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial x} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & U_1^{(m)} \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \\ & + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) = \\ & = \frac{\gamma^{(m)}}{\mu^{(m)}} T_0 \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial y} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_2^{(m)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi^{(m)}} \Theta^{(m)} - \\ & - \frac{\delta^{(m)} a^2 i \omega}{T_0} \left(\frac{\partial U_1^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial U_2^{(m)}}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha^{(1)}}{a}; & y &= \frac{\alpha_2}{a}; \\ U_1^{(m)} &= \frac{\tilde{U}_1^{(m)}}{a}; & U_2^{(m)} &= \frac{\tilde{U}_2^{(m)}}{a}; \\ \Theta^{(m)} &= \frac{\tilde{\Theta}^{(m)}}{T_0}; & \sigma_{ij}^{(m)} &= \frac{\tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}}{\mu^{(m)}}; \\ \tilde{\Theta}^{(m)} &= T^{(m)} - T_0, \end{aligned}$$

$\tilde{U}_i^{(m)}$ ($i, m = 1, 2$) — компоненты вектора перемещений; $\tilde{\Theta}^{(m)}$ — прирост температуры; $T^{(m)}$ — абсолютная температура точек тела; T_0 — температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии; $\rho^{(m)}$ — плотность; $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}$ — параметры Ляме,

$$\gamma^{(m)} = (3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \cdot \alpha_t^{(m)};$$

$$\delta^{(m)} = \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\lambda_0^{(m)}}; \quad \chi^{(m)} = \frac{\lambda_0^{(m)}}{c_\varepsilon^{(m)}},$$

где $\alpha_t^{(m)}$ — коэффициент линейного термического расширения; $\lambda_0^{(m)}$ — коэффициент теплопроводности; $c_\varepsilon^{(m)}$ — удельная теплоемкость при постоянной деформации.

При формулировании граничных условий, учитывая симметрию области, рассмотрим

напряженное состояние части области, расположенной в первой четверти. Введем локальную безразмерную координату

$$\hat{x} = \frac{(\alpha_1 - c)}{a}, \quad \hat{x} \in [0, \delta_2];$$

$$\delta_2 = 1 - \delta, \quad \delta = \frac{c}{a}$$

и безразмерные амплитудные компоненты тензора напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$, связанные с перемещениями законом Гука [15].

На границах области формулируются в безразмерном виде соответствующие силовые и температурные граничные условия для областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ таким образом, чтобы были выполнены условия контакта областей с различными термоупругими свойствами:

– в области $\bar{G}^{(1)} = \{(x, y) : |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\}$:

$$\sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, y) = r_{21}\sigma_{1\beta}^{(2)}(0, y),$$

$$U_{\beta}^{(1)}(\delta, y) = U_{\beta}^{(2)}(0, y),$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q_2^{(1)}(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}}, \quad \Theta^{(1)} = \Theta^{(2)},$$

$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} \Theta^{(1)} = 0;$$

– в области $\bar{G}^{(2)} = \{(\hat{x}, y) : 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \eta\}$:

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q_1^{(2)}(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0,$$

$$\sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q_2^{(2)}(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0,$$

(1.2)

где

$$q_{\beta}^{(m)} = \frac{q_{\beta}}{\mu^{(m)}}, \quad \eta = \frac{b}{a},$$

$$r_{12} = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}}, \quad \beta = 1, 2,$$

$\lambda_1^{(m)}$ — приведенный коэффициент теплопроводности; $\alpha^{(m)}$ — коэффициент теплоотдачи.

Следуя предложенному в [8, 14, 15] алгоритму, общее решение $U_i^{(m)}$ и $\Theta^{(m)}$ конструируется в виде суммы двух частных решений системы для горизонтальных и вертикальных слоев, образующих в пересечении соответствующую область $\bar{G}^{(m)}$, $m = 1, 2$

$$U_1^{(1)} = \bar{H}^{(1)} \operatorname{sh} \left(t^{(1)} x \right) \cos \alpha^{(1)} (y - \eta) + \bar{R}^{(1)} \operatorname{ch} \left(r^{(1)} y \right) \sin \chi^{(1)} (x - \delta),$$

$$U_2^{(1)} = H^{(1)} \operatorname{ch} \left(t^{(1)} x \right) \sin \alpha^{(1)} (y - \eta) + R^{(1)} \operatorname{sh} \left(r^{(1)} y \right) \cos \chi^{(1)} (x - \delta),$$

$$\Theta^{(1)} = K^{(1)} \operatorname{ch} \left(t^{(1)} x \right) \cos \alpha^{(1)} (y - \eta) + L^{(1)} \operatorname{ch} \left(r^{(1)} y \right) \cos \chi^{(1)} (x - \delta),$$

$$U_1^{(2)} = \left(\bar{H}^{(2)} \operatorname{sh} \left(t^{(2)} \hat{x} \right) + \bar{Q}^{(2)} \operatorname{ch} \left(t^{(2)} \hat{x} \right) \right) \cos \alpha^{(1)} (y - \eta) + \bar{R}^{(2)} \operatorname{ch} \left(r^{(2)} y \right) \sin \chi^{(2)} (\hat{x} - \delta),$$

$$U_2^{(2)} = \left(H^{(2)} \operatorname{ch} \left(t^{(2)} \hat{x} \right) + Q^{(2)} \operatorname{sh} \left(t^{(2)} \hat{x} \right) \right) \sin \alpha^{(1)} (y - \eta) + R^{(2)} \operatorname{sh} \left(r^{(2)} y \right) \cos \chi^{(2)} (\hat{x} - \delta),$$

$$\Theta^{(2)} = \left(K^{(2)} \operatorname{ch} \left(t^{(2)} \hat{x} \right) + M^{(2)} \operatorname{sh} \left(t^{(2)} \hat{x} \right) \right) \cos \alpha^{(1)} (y - \eta) + L^{(2)} \operatorname{ch} \left(r^{(2)} y \right) \cos \chi^{(2)} (\hat{x} - \delta),$$

где $\bar{H}^{(m)}$, $H^{(m)}$, $\bar{R}^{(m)}$, $R^{(m)}$, $\bar{Q}^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $K^{(m)}$, $L^{(m)}$, $M^{(m)}$ — произвольные постоянные.

В качестве значений параметров $\alpha^{(1)}$, $\chi^{(m)}$ выбираем последовательности чисел

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\eta}, \quad \chi_j^{(1)} = \frac{j\pi}{\delta}, \quad \chi_j^{(2)} = \frac{j\pi}{\delta_2}, \quad k, j \in N.$$

При выборе формы этих частных решений необходимо учитывать возможность удовлетворения не только граничных условий на внешней границе области, но и условий сопряжения механических и температурных характеристик на границе раздела сред.

Подставляя данные выражения в системы уравнений движений и теплопроводности (1.1) и (1.2), получаем две системы однородных уравнений относительно вышеперечисленных постоянных.

Обозначим через $t_{\alpha k}^{(m)}$ и $r_{\alpha j}^{(m)}$ корни характеристических уравнений ($\alpha = 1, 2, 3$), полученные при условии существования нетривиального решения двух представленных однородных систем уравнений

$$t_1^{(m)2} = \frac{\Psi_1 + S^{(m)}}{2C_{11}^{(m)}},$$

$$t_2^{(m)2} = \alpha^{(1)2} - \Omega^{(m)2},$$

$$t_3^{(m)2} = \frac{\Psi_1 - S^{(m)}}{2C_{11}^{(m)}},$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + \\ & + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + \\ & + 2\alpha^{(1)2} \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right), \end{aligned}$$

$$r_1^{(m)2} = \frac{\Psi_2 + S^{(m)}}{2C_{11}^{(m)}},$$

$$r_2^{(m)2} = \chi^{(m)2} - \Omega^{(m)2},$$

$$r_3^{(m)2} = \frac{\Psi_2 - S^{(m)}}{2C_{11}^{(m)}},$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + \\ & + 2\chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + \\ & + 2\chi^{(m)2} \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{(m)2} = & \Omega^{(m)4} + \\ & + \Omega^{(m)2} \left(2\Omega_2^{(m)} + 2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} - \right. \\ & \left. - 2\Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) + \Theta_1^{(m)2} \Omega_1^{(m)2} + \\ & + 2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + \\ & + 2\Omega_2^{(m)} \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right)^2 \Omega_2^{(m)2} + \\ & + 2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)2} + \Omega_2^{(m)2}, \end{aligned}$$

где

$$C_{11}^{(1)} = 2 + \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \quad C_{12}^{(m)} = C_{11}^{(m)} - 2,$$

$$\Theta_1^{(1)} = \frac{\gamma^{(1)} T_0}{\mu^{(1)}}, \quad \Omega_1^{(1)} = \frac{\eta^{(1)} a^2 i \omega}{T_0}, \quad \Omega_2^{(1)} = \frac{a^2 i \omega}{\chi^{(1)}}.$$

Из анализа систем следует, что постоянные $\bar{H}^{(m)}, \dots, M^{(m)}$ связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{k\alpha}^{(m)} = & H_{k\alpha}^{(m)} P_{1\alpha k}^{(m)}, \quad K_{k\alpha}^{(m)} = H_{k\alpha}^{(m)} P_{2\alpha k}^{(m)}, \\ \bar{Q}_{k\alpha}^{(m)} = & Q_{k\alpha}^{(m)} P_{1\alpha k}^{(m)}, \quad M_{k\alpha}^{(m)} = Q_{k\alpha}^{(m)} P_{2\alpha k}^{(m)}, \\ \bar{R}_{j\alpha}^{(m)} = & R_{j\alpha}^{(m)} B_{1\alpha j}^{(m)}, \quad L_{j\alpha}^{(m)} = R_{j\alpha}^{(m)} B_{2\alpha j}^{(m)}, \end{aligned}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$,

$$P_{1\alpha k}^{(m)} = \frac{\Xi_{11}}{\Xi_{12}},$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_{11} = & \alpha^{(1)} t_{\alpha k} \left(-t_{\alpha k}^2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \right. \\ & + \alpha^{(1)2} \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \\ & \left. + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{12} = & t_{\alpha k}^4 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \left(-\alpha^{(1)2} \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \right. \\ & + \Omega^{(m)2} - t_{\alpha k}^2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} - \\ & \left. - \Omega_2^{(m)} - 2\alpha^{(1)2} - \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) + \\ & + \alpha^{(1)4} - \alpha^{(1)2} \Omega^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} \alpha^{(1)2} - \Omega_2^{(m)} \Omega^{(m)2}, \end{aligned}$$

$$P_{2\alpha k}^{(m)} = \frac{\Xi_{21}}{\Xi_{22}},$$

где

$$\Xi_{21} = \Omega_1^{(m)} \left(-t_{\alpha k}^2 + \alpha^{(1)2} - \Omega^{(m)2} \right),$$

$$\Xi_{22} = \alpha^{(1)} \left(-t_{\alpha k}^2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right),$$

$$B_{1\alpha j}^{(m)} = \frac{\Xi_{31}}{\Xi_{32}},$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_{31} = & 2r_{\alpha j}^2 \chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^4 + r_{\alpha j}^2 \Omega_2^{(m)} + \\ & + r_{\alpha j}^2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^4 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \\ & + r_{\alpha j}^2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} - \chi^{(m)4} - \\ & - \chi^{(m)2} \Omega_2^{(m)} + \Omega^{(m)2} \chi^{(m)2} - \\ & - \Omega^{(m)2} r_{\alpha j}^2 + \Omega^{(m)2} \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} r_{\alpha j}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{32} = & -r_{\alpha j} \chi^{(m)} \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \chi^{(m)2} - \right. \\ & \left. - r_{\alpha j}^2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \right. \\ & \left. + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right), \end{aligned}$$

$$B_{2\alpha j}^{(m)} = \frac{\Xi_{41}}{\Xi_{42}},$$

где

$$\Xi_{41} = \Omega_1^{(m)} \left(r_{\alpha j}^2 - \chi^{(m)2} + \Omega^{(m)2} \right),$$

$$\begin{aligned} \Xi_{42} = & r_{\alpha j} \left(\chi^{(m)2} \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) - \right. \\ & \left. - r_{\alpha j}^2 \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \right. \\ & \left. + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right). \end{aligned}$$

Общее решение краевой задачи строится отдельно для каждой области $\bar{G}^{(m)}$.

– для $\bar{G}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(x, y) = & \\ = & \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{1\beta k}^{(1)} H_{\beta k}^{(1)} \operatorname{sh} \left(t_{\beta k}^{(1)} x \right) \cos \alpha_k^{(1)} (y - \eta) + \\ & + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{1\beta j}^{(1)} R_{\beta j}^{(1)} \operatorname{ch} \left(r_{\beta j}^{(1)} y \right) \sin \chi_j^{(1)} (x - \delta) + \\ & + H_0^{(1)} \sin l_1^{(1)} x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2^{(1)}(x, y) = & \\ = & \sum_k \sum_{\beta=1}^3 H_{\beta k}^{(1)} \operatorname{ch} \left(t_{\beta k}^{(1)} x \right) \sin \alpha_k^{(1)} (y - \eta) + \\ & + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 R_{\beta j}^{(1)} \operatorname{sh} \left(r_{\beta j}^{(1)} y \right) \cos \chi_j^{(1)} (x - \delta) + \\ & + R_0^{(1)} \sin l_1^{(1)} y \Theta_1^{(1)}(x, y) = \\ = & \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{2\beta k}^{(1)} H_{\beta k}^{(1)} \operatorname{ch} \left(t_{\beta k}^{(1)} x \right) \cos \alpha_k^{(1)} (y - \eta) + \\ & + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{2\beta j}^{(1)} R_{\beta j}^{(1)} \operatorname{ch} \left(r_{\beta j}^{(1)} y \right) \cos \chi_j^{(1)} (x - \delta) + \\ & + B_0^{(1)} \cos l_1^{(1)} x + C_0^{(1)} \cos l_1^{(1)} y. \end{aligned}$$

– для области $\bar{G}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} U_1^{(2)}(\hat{x}, y) = & \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{1\beta k}^{(2)} \left(H_{\beta k}^{(2)} \operatorname{sh} \left(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x} \right) + \right. \\ & \left. + Q_{\beta k}^{(2)} \operatorname{ch} \left(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x} \right) \right) \cos \alpha_k^{(1)} (y - \eta) + \\ & + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{1\beta j}^{(2)} R_{\beta j}^{(2)} \operatorname{ch} \left(r_{\beta j}^{(2)} y \right) \sin \chi_j^{(2)} (\hat{x} - \delta) + \\ & + H_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} \hat{x} + Q_0^{(2)} \cos l_2^{(2)} \hat{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2^{(2)}(\hat{x}, y) = & \sum_k \sum_{\beta=1}^3 \left(H_{\beta k}^{(2)} \operatorname{ch} \left(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x} \right) + \right. \\ & \left. + Q_{\beta k}^{(2)} \operatorname{sh} \left(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x} \right) \right) \sin \alpha_k^{(1)} (y - \eta) + \\ & + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 R_{\beta j}^{(2)} \operatorname{sh} \left(r_{\beta j}^{(2)} y \right) \cos \chi_j^{(2)} (\hat{x} - \delta_2) + \\ & + R_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_1^{(2)}(x, y) = & \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{2\beta k}^{(2)} \left(H_{\beta k}^{(2)} \operatorname{ch} \left(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x} \right) + \right. \\ & \left. + Q_{\beta k}^{(2)} \operatorname{sh} \left(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x} \right) \right) \cos \alpha_k^{(1)} (y - \eta) + \\ & + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{2\beta j}^{(2)} R_{\beta j}^{(2)} \operatorname{ch} \left(r_{\beta j}^{(2)} y \right) \cos \chi_j^{(2)} (x - \delta_2) + \\ & + B_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} \hat{x} + C_0^{(2)} \cos l_2^{(2)} \hat{x}. \end{aligned}$$

Константы $H_{\beta k}^{(m)}$, $R_{\beta k}^{(m)}$, $H_0^{(m)}$, $R_0^{(m)}$, $B_0^{(m)}$, $C_0^{(m)}$, $Q_0^{(m)}$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Реализуя основной алгоритм метода суперпозиции, модифицированного для случая термоупругой области, с целью получения определяющей системы интегральных уравнений (СИУ), рассмотрим вспомогательную краевую задачу аналогично случаю однородной термоупругой области, рассмотренному в [14]. При заданных граничных условиях вид этой вспомогательной задачи значительно усложняется по сравнению с [14], поскольку при её формулировке необходимо не только добиться аналитического решения, но ввести и учесть граничные условия и условия сопряжения.

Итак, вспомогательная граничная задача характеризуется следующими условиями в окрестности границ прямоугольного сечения области:

– для области $\bar{G}^{(1)}$

$$U_1^{(1)}(\delta, y) = f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(1)}(\delta, y) = \phi_1(y), \quad \text{где}$$

$$\left. \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\delta} = f_5(y),$$

$$U_2^{(1)}(x, \eta) = f_2(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} = f_8(x), \quad (1.3)$$

– для области $\bar{G}^{(2)}$

$$U_1^{(2)}(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = r_{12}\phi_1(y),$$

$$\left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = f_5(y)$$

$$U_2^{(2)}(\hat{x}, \eta) = f_4(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} = f_7(\hat{x}), \quad (1.4)$$

$$U_1^{(2)}(\delta_2, y) = f_3(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=\delta_2} = f_6(y),$$

где $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\phi_1(y)$ — неизвестные вспомогательные функции.

Вспомогательная краевая задача (1.3), (1.4) не соответствует начальной граничной задаче, но допускает аналитическое решение и позволяет, во-первых, удовлетворить часть начальных и граничных условий, во-вторых, выразить все характеристики исходной задачи через коэффициенты Фурье неизвестных функций $f_1(y), \dots, \phi_1(y)$.

После определения констант $H_{\beta k}^{(m)}$ и $R_{\beta k}^{(m)}$, через коэффициенты Фурье $f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}, f_{5k}, f_{6k}, f_{7j}, f_{8j}, \phi_{1k}$ введенных функций получаем компоненты вектора перемещений U_1, U_2 и температуру Θ . Например, в области $\bar{G}^{(1)}$ они имеют следующий вид:

$$U_1^{(1)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + f_{5k}\kappa_5 + \phi_{1k}(\kappa_6 + \kappa_7 - \kappa_8)] \cos \alpha_k(y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j}(\kappa_9 - \kappa_{10} + \kappa_{11}),$$

$$\kappa_1 = \left(-\Delta_1^{(1)} \right) \frac{\text{sh} \left(t_1^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_1^{(1)} \delta \right)},$$

$$\kappa_2 = 2\Delta_2^{(1)} \frac{\text{sh} \left(t_2^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_2^{(1)} \delta \right)}, \quad \kappa_3 = \Delta_3^{(1)} \frac{\text{sh} \left(t_3^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_3^{(1)} \delta \right)},$$

$$\kappa_5 = \Delta_4^{(1)} \left(-\frac{\text{sh} \left(t_1^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_1^{(1)} \delta \right)} + \frac{\text{sh} \left(t_3^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_3^{(1)} \delta \right)} \right),$$

$$\kappa_6 = \Delta_6^{(1)} \frac{\text{sh} \left(t_1^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_1^{(1)} \delta \right)}, \quad \kappa_7 = \Delta_2^{(1)} \frac{\text{sh} \left(t_2^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_2^{(1)} \delta \right)},$$

$$\kappa_8 = \Delta_7^{(1)} \frac{\text{sh} \left(t_3^{(1)} x \right)}{\text{sh} \left(t_3^{(1)} \delta \right)},$$

$$\kappa_9 = \left(-\Delta_8^{(1)} \right) \frac{\text{ch} \left(r_1^{(1)} y \right)}{\text{sh} \left(r_1^{(1)} \eta \right)},$$

$$\kappa_{10} = 2\Delta_9^{(1)} \frac{\text{ch} \left(r_2^{(1)} y \right)}{\text{sh} \left(r_2^{(1)} \mu \right)}, \quad \kappa_{11} = \Delta_{10}^{(1)} \frac{\text{ch} \left(r_3^{(1)} y \right)}{\text{sh} \left(r_3^{(1)} \eta \right)};$$

$$U_2^{(1)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k}(\varpi_1 - \varpi_2 - \varpi_3) + f_{5k}(\varpi_4 + \varpi_5) + \phi_{1k}(\varpi_6 - \varpi_7 + \varpi_8)] \sin \alpha_k (y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{2j}(\varpi_9 + \varpi_{10} - \varpi_{11}) + f_{8j}\varpi_{12}) \times \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) + f_{20} \frac{\sin k_1^{(1)} y}{\sin k_1^{(1)} \eta},$$

где

$$\varpi_1 = \left(\Delta_{13}^{(1)} \right) \frac{\text{ch}(t_1^{(1)} x)}{\text{sh}(t_1^{(1)} \delta)}, \quad \varpi_2 = \Delta_{14}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_2^{(1)} x)}{\text{sh}(t_2^{(1)} \delta)},$$

$$\varpi_3 = \Delta_{15}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_3^{(1)} x)}{\text{sh}(t_3^{(1)} \delta)}, \quad \varpi_4 = -\Delta_{16}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_1^{(1)} x)}{\text{sh}(t_1^{(1)} \delta)},$$

$$\varpi_5 = \Delta_{17}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_3^{(1)} x)}{\text{sh}(t_3^{(1)} \delta)}, \quad \varpi_6 = -\Delta_{18}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_1^{(1)} x)}{\text{sh}(t_1^{(1)} \delta)},$$

$$\varpi_7 = \Delta_{19}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_2^{(1)} x)}{\text{sh}(t_2^{(1)} \delta)}, \quad \varpi_8 = \Delta_{20}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_3^{(1)} x)}{\text{sh}(t_3^{(1)} \delta)},$$

$$\varpi_9 = \Delta_{21}^{(1)} \frac{\text{sh}(r_1^{(1)} y)}{\text{sh}(r_1^{(1)} \eta)}, \quad \varpi_{10} = \Delta_{22}^{(1)} \frac{\text{sh}(r_2^{(1)} y)}{\text{sh}(r_2^{(1)} \mu)},$$

$$\varpi_{11} = \Delta_{23}^{(1)} \frac{\text{sh}(r_3^{(1)} y)}{\text{sh}(r_3^{(1)} \eta)},$$

$$\varpi_{12} = \Delta_{24}^{(1)} \left(\frac{\text{sh}(r_1^{(1)} y)}{\text{sh}(r_1^{(1)} \eta)} - \frac{\text{sh}(r_3^{(1)} y)}{\text{sh}(r_3^{(1)} \eta)} \right);$$

$$\Theta^{(1)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k}(\tau_1 - \tau_2) + f_{5k}(\tau_3 + \tau_4) + \phi_{1k}(\tau_5 + \tau_6)] \cos \alpha_k (y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{2j}(\tau_7 - \tau_8) + f_{8j}(\tau_9 - \tau_{10})) \times \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) - \tau_{11} - \tau_{12},$$

где

$$\tau_1 = \left(\Delta_{25}^{(1)} \right) \frac{\text{ch}(t_1^{(1)} x)}{\text{sh}(t_1^{(1)} \delta)}, \quad \tau_2 = \Delta_{26}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_3^{(1)} x)}{\text{sh}(t_3^{(1)} \delta)},$$

$$\tau_3 = -\Delta_{27}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_1^{(1)} x)}{\text{sh}(t_1^{(1)} \delta)}, \quad \tau_4 = \Delta_{28}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_3^{(1)} x)}{\text{sh}(t_3^{(1)} \delta)},$$

$$\tau_5 = -\Delta_{33}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_1^{(1)} x)}{\text{sh}(t_1^{(1)} \delta)}, \quad \tau_6 = \Delta_{34}^{(1)} \frac{\text{ch}(t_3^{(1)} x)}{\text{sh}(t_3^{(1)} \delta)},$$

$$\tau_7 = \Delta_{29}^{(1)} \frac{\text{ch}(r_1^{(1)} y)}{\text{sh}(r_1^{(1)} \eta)}, \quad \tau_8 = \Delta_{30}^{(1)} \frac{\text{ch}(r_3^{(1)} y)}{\text{sh}(r_3^{(1)} \eta)},$$

$$\tau_9 = \Delta_{31}^{(1)} \frac{\text{ch}(r_1^{(1)} y)}{\text{sh}(r_1^{(1)} \eta)}, \quad \tau_{10} = \Delta_{32}^{(1)} \frac{\text{ch}(r_3^{(1)} y)}{\text{sh}(r_3^{(1)} \eta)},$$

$$\tau_{11} = f_{30} \frac{\cos k_1^{(1)} x}{k_1^{(1)} \sin k_1^{(1)} \delta}, \quad \tau_{12} = f_{40} \frac{\cos k_1^{(1)} y}{k_1^{(1)} \sin k_1^{(1)} \eta}.$$

Здесь

$$\Delta_1^{(m)} = \frac{\Xi_{51}}{\Xi_{52}}, \quad \Delta_2^{(m)} = \frac{2\alpha_k t_{2k}}{\Omega^{(m)2}} \text{ и т.д.},$$

где

$$\Xi_{51} = \left(\alpha_k \left(\Omega^{(m)2} - 2\alpha_k^2 \right) \times \left(\Omega^{(m)2} - \alpha_k^2 + t_{3k}^{(2)2} \right) \times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \alpha_k^2 - \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) t_{1k}^{(2)2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right),$$

$$\Xi_{52} = \Omega^{(m)2} t_{1k}^{(2)} \left(t_{1k}^{(2)2} - t_{3k}^{(2)2} \right) \times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega^{(m)2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right).$$

Такой подход позволяет максимально упростить вид последующей системы интегральных уравнений, которая составляется

для определения введённых вспомогательных функций $f_1(y), \dots, f_8(x), \phi_1(y)$ с использованием неучтённых граничных условий и условий сопряжения областей $\bar{G}^{(m)}$

$$M_{k1}\phi_1 + \sum_{r=1}^8 L_{kr}f_r = Q_k, \quad (1.5)$$

где $Q_k = q_k, k = \overline{1,6}, r = \overline{1,8}$,

$$f_6 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0,$$

$$f_8 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0,$$

где

$$T^{(m)} = \frac{\alpha^{(m)}}{\lambda_1^{(m)}} a, \quad m = 1, 2.$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11}f_1 = & \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k} \left(\Delta_{13}^{(1)} \operatorname{cth} \left(t_{1k}^{(1)} \delta \right) + \right. \\ & + \Delta_{13}^{(2)} \operatorname{cth} \left(t_{1k}^{(2)} \delta_2 \right) - \Delta_{14}^{(1)} \operatorname{cth} \left(t_{2k}^{(1)} \delta \right) - \\ & - \Delta_{14}^{(2)} \operatorname{cth} \left(t_{2k}^{(2)} \delta_2 \right) - \Delta_{15}^{(1)} \operatorname{cth} \left(t_{3k}^{(1)} \delta \right) - \\ & \left. - \Delta_{15}^{(2)} \operatorname{cth} \left(t_{3k}^{(2)} \delta_2 \right) \right) \sin \alpha_k (y - \eta) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Для определения особенностей волнового поля в угловых точках областей $\bar{G}^{(m)}$ проводится исследование решения СИУ. В рассматриваемой задаче такими точками являются угловые точки стыка областей (A) и внешняя угловая точка сечения (B).

Проведём исследование решения СИУ в угловых точках областей $\bar{G}^{(m)}$. Это позволит определить асимптотику коэффициентов Фурье неизвестных функций в случае, когда $k \rightarrow \infty$ и $j \rightarrow \infty$. Согласно алгоритму, приведенному в [14], предположим, что функции $\phi_1(\xi), f_{5k}(y), f_{7j}(\hat{x}), f_{8j}(x)$ имеют особенность в угловой точке стыка областей A (δ, η)

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \Phi_1^A (\eta - \xi)^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\ f_5(\xi) &= F_5^A (\eta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \eta, \\ f_7(\xi) &= F_7^A \xi^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow 0; \\ f_8(\xi) &= F_8^A (\delta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \delta \end{aligned} \quad (1.6)$$

а функции $f_i(\xi)$ непрерывны в своих областях определения, но их производные имеют

разрыв в угловых точках. В окрестности точки A (δ, η)

$$\begin{aligned} f_1'(\xi) &= F_1^A (\eta - \xi)^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow \eta, \\ f_2'(\xi) &= F_2^A (\delta - \xi)^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow \delta, \\ f_4'(\xi) &= F_4^A \xi^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В окрестности точки B (δ_2, η) области $\bar{G}^{(2)}$

$$\begin{aligned} f_3'(\xi) &= F_3^B (\eta - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\ f_4'(\xi) &= F_4^B (\delta_2 - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2, \\ f_6(\xi) &= F_6^B (\eta - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\ f_7(\xi) &= F_7^B (\delta_2 - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\alpha, \lambda, \beta, \gamma$ — параметры локальной особенности (ПЛО) по напряжениям и температуре соответственно, что характеризует особенности функций $f_1(y), \dots, \phi_1(y)$, а F_1^A, \dots, F_8^A — произвольные постоянные.

Можно показать, что при $k \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \phi_{1k} &\cong \Phi_1 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\alpha}, \\ f_{1k} &\cong F_1 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\alpha-1}, \\ f_{2j} &\cong F_2 \delta^{-1} \left(\chi_j^{(1)} \right)^{-\alpha-1}, \\ f_{3k} &\cong F_3 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\lambda-1}, \\ f_{4j} &\cong F_4 \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\lambda-1}, \text{ если } \xi \rightarrow \delta_2, \end{aligned}$$

$$f_{4j} \cong \bar{F}_4 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\alpha-1}, \text{ если } \xi \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} f_{5k} &\cong F_5 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(1)} \right)^{-\beta}, \\ f_{6k} &\cong F_6 \eta^{-1} \left(\alpha_k^{(2)} \right)^{-\gamma}, \\ f_{7j} &\cong F_7 \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\gamma}, \text{ если } \xi \rightarrow \delta_2, \end{aligned}$$

$$f_{7j} \cong \bar{F}_7 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} \left(\chi_j^{(2)} \right)^{-\beta}, \text{ если } \xi \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

$$f_{8j} \cong F_8 \delta^{-1} \left(\chi_j^{(1)} \right)^{-\beta};$$

$$\Phi_1 = -2\Phi_1^A \Gamma_1(\alpha),$$

$$F_1 = 2F_1^A \Gamma_1(\alpha), \quad F_2 = 2F_2^A \Gamma_1(\chi),$$

$$F_3 = 2F_3^B \Gamma_1(\alpha), \quad \bar{F}_4 = 2F_4^A \Gamma_1(\chi),$$

$$F_4 = 2F_4^B \Gamma_1(\chi), \quad F_5 = 2F_5^A \Gamma_1(\alpha),$$

$$\begin{aligned} F_6 &= 2F_6^B \Gamma_1(\alpha), & \bar{F}_7 &= 2F_7^A \Gamma_1(\chi), \\ F_7 &= 2F_7^B \Gamma_1(\chi), & F_8 &= 2F_8^A \Gamma_1(\chi). \end{aligned}$$

Если подставить формулы (1.6)–(1.9) в выражения для линейных операторов системы интегральных уравнений, получим возможность исследовать асимптотическое поведение ее левых частей. Таким образом, для определения характера особенности вспомогательных функций в окрестности точки A имеем

$$\begin{aligned} U_2^{(1)}(\delta, y) &= U_2^{(2)}(0, y), \\ \Theta^{(1)}\Big|_{x=\delta} &= \Theta^{(2)}\Big|_{\hat{x}=0}, \\ \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) &= \sigma_{11}^{(2)}(0, y), \quad y \rightarrow \eta, \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) &= q, \quad f_8 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0, \\ & \quad x \rightarrow \delta, \\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0 \\ & \quad \hat{x} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В окрестности точки B получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) &= q, \quad f_6 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0 \\ & \quad y \rightarrow \eta, \\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0 \\ & \quad \hat{x} \rightarrow \delta_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

После подстановки асимптотических выражений для коэффициентов Фурье (1.9) в уравнения (1.10), (1.11) и суммирования рядов, учитывая асимптотическую значимость неизвестных функций, получаем следующую однородную систему алгебраических уравнений для определения параметров локальной особенности (ПЛО) по напряжениям и температуре:

$$\begin{aligned} & -m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + \\ & + 2 \left(n^{(1)} + r_{21} n^{(2)} \right) \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + 2n^{(1)} \alpha F_2 + \\ & \quad + 2n^{(2)} r_{21} \alpha \bar{F}_4 = 0, \\ & \left(n_{11}^{(1)} + r_{12} n_{11}^{(2)} \right) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + \\ & \quad + 2m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + 2 \left(1 - n^{(1)} \alpha \right) F_2 + \\ & \quad + 2 \left(1 - n^{(2)} \alpha \right) \bar{F}_4 = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(n^{(1)} \right)^{-1} + \alpha \right) \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_2 = 0, \\ & \left(\left(n^{(2)} \right)^{-1} + \alpha \right) r_{12} \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \bar{F}_4 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4F_5 \cos \frac{\pi\beta}{2} + 2F_8 + 2\bar{F}_7 = 0, \\ & \bar{F}_7(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0, \\ & F_8(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\sin \frac{\pi\lambda}{2} F_3 + \lambda F_4 = 0, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \lambda F_3 + \sin \frac{\pi\lambda}{2} F_4 = 0, \\ & F_6(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0, \\ & F_7(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь использованы обозначения:

$$m_{12} = \left(C_{11}^{(1)-1} + C_{11}^{(2)-1} \right),$$

$$n^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} - 1}{C_{11}^{(m)}}, \quad n_{11}^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} + 1}{C_{11}^{(m)}}.$$

Исследование решения СИУ проводится соответственно алгоритму, рассмотренному в [14] для однородной области, что приводит к характеристическим уравнениям для определения ПЛО: во внешней угловой точке (B) по напряжениям и температуре λ и γ , а также во внутренней точке (A) — α и β соответственно.

Особенность этой системы заключается в том, что она распадается на четыре части. Первые четыре уравнения, объединенные формулами (1.12), содержат неизвестные $\Phi_1, F_1, F_2, \bar{F}_4$. Они определяют значение α — ПЛО по напряжениям в точке A . Пятое, шестое и седьмое уравнения объединяют формулы (1.13). Они содержат неизвестные F_5, \bar{F}_7, F_8 и определяют значение β — ПЛО по температуре в точке A .

Уравнения (1.14) и (1.15) содержат неизвестные F_3, F_4 и F_6, F_7 соответственно и определяют особенность во внешней угловой точке B — ПЛО по напряжениям и температуре λ и γ . При условии существования нетривиального решения уравнений (1.12) и (1.14) данной системы получим два характеристических уравнения для определения параметра λ

$$\lambda^2 - \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2} = 0. \quad (1.16)$$

Характеристическое уравнение (1.16) имеет один действительный корень $\lambda_0 = 1$, и бесконечное число комплексных корней, $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [14]. Естественно, следует учитывать лишь те комплексные корни, для которых $\text{Re } \lambda_k > 1$. Уравнения (1.13) и (1.15) системы для определения ПЛО β и γ , дают основание говорить, что температура не имеет особенности в угловых и внутренних граничных точках области, поскольку из данных уравнений следует, что неизвестные F_5, F_7, F_8 и F_6, F_7 равны нулю.

ПЛО α по напряжениям в точке A , определяется из условия существования нетривиального решения системы (1.5)

$$\Delta(\alpha, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, r_{21}) = 0. \quad (1.17)$$

Это уравнение является симметричным относительно упругих констант областей $G^{(m)}$. Параметр же локальной особенности по напряжениям α играет достаточно важную роль в прочностном расчёте, поскольку именно он является определяющим фактором в вопросе интенсивности локальной концентрации напряжений в граничной точке сопряжения двух разнородных сред $A(\delta; \eta)$. Определяя значения ПЛО как корни характеристического уравнения, из получаемого множества корней следует исключить значения, приводящие к неограниченности энергии. Отметим, что значение ПЛО зависит от упругих констант стыкуемых сред.

При определенных соотношениях термоупругих свойств материалов стыкуемых областей уравнение (1.17) имеет вещественный корень $0 < \alpha < 1$, что характеризует возникновение локальных особенностей в значениях напряжений в точке A . Применим для решения СИУ метод Бубнова–Галеркина, учитывая при выборе координатных функций характер особенностей решения. В результате приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений с известной асимптотикой искомым функций, которая определяется корнями уравнений (1.16), (1.17). Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим частотное уравнение для определения значений резонансных частот (РЧ), что дает возможность численно исследовать и собственные формы колебаний.

Таким образом, проведенный аналитический анализ влияния температурного поля на спектр РЧ для кусочно-неоднородной прямоугольной области свидетельствует о том,

что это влияние незначительно для рассматриваемых сочетаний геометрических, упругих и температурных параметров, а метод суперпозиции в данной интерпретации можно рассматривать как общий методологический подход, расширяющий возможности исследований НДС составных конструкций.

Акценты на сингулярные сечения кусочно-неоднородных областей при выполнении численного анализа были сделаны не случайно, поскольку, как показывают результаты экспериментальных исследований, наиболее уязвимыми в плане прочности участками составных областей являются именно границы соединений составных частей области, обладающих различными термомеханическими свойствами.

В качестве величины, определяющей меру повреждения (прочности), можно использовать энергию термоупругой деформации, следовательно, целесообразно проведение сравнительного анализа энергетической характеристики (\bar{E}) средней за период, накопленной во внутренней области сечения детали, для интегрального описания влияния особенностей волнового поля на вибродинамическое поведение составных деталей. Данная безразмерная величина вычисляется аналогично [5].

Результаты анализа распределения средней за период энергии по площади прямоугольника, в частности, в особых областях прямоугольного сечения деталей для различных форм колебаний отражены в сравнительной табл. 1, где представлены результаты аналитических и численных расчетов для сечений с наплавками различной ширины: узкой — при $\delta_2 = 0,17$; средней ширины — при $\delta_2 = 0,5$; широкой — $\delta_2 = 0,9$. Введем обозначения Тi — титан, Рb — свинец. Тогда каждое из рассмотренных сечений приведено для сочетания материалов Тi–Рb–Тi и Рb–Тi–Рb (сечения с так называемыми «жесткими» и «мягкими» присоединенными областями, материалы указаны в порядке чередования для данного сечения) при наличии и отсутствии влияния термоупругой составляющей.

На найденных 15-ти собственных частотах авторами исследуется проявление эффектов граничного («ГР») и краевого резонанса («КР») для термоупругого («т») и упругого («у») сечений. Ярко выраженная ЛКН отмечается знаком «+» в соответствующей ячейке таблицы, слабо выраженная ЛКН — «±». При отсутствии ЛКН ячейка таблицы остается пустой. Внешние геометрические размеры

Таблица 1. Проявление резонанса для различных значений параметра δ_2

№ Ω	$\delta_2 = 0,17$								$\delta_2 = 0,5$								$\delta_2 = 0,9$								
	Ti-Pb-Ti				Pb-Ti-Pb				Ti-Pb-Ti				Pb-Ti-Pb				Ti-Pb-Ti				Pb-Ti-Pb				
	ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		ГР		КР		
	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	
1		±								±		±	±	±		±							±		
2		±								±			±	±			±				+	±			
3		±								±			+	±		±	±				+				
4					±					±			+	+			+				+	+			
5					+				±	±			+	+			±	+			+	+			
6					+					+			+	+			+	+			+	±			
7					+		±	±	+	±				±	+			+	+			±	±		
8					+		±	±	+	±				±			+	±							
9					+				+	+				+	±		+	±			+				
10					+			±	±	+					+	+	+	+			+	+			
11					+		±									+	+				±	+			
12	±	±			+			±		±			+	+		±	+	+				±	±	±	
13	±		±		+			±	+	±							±						±	±	
14		±			+			±	±	+							±	+			+		±	±	
15					+		+	±		+				±	+		±	±							

исследуемого составного сечения определяет параметр $L = 3,25$.

Основываясь на результатах проведенных аналитических и численных исследований [14], можно сформулировать следующие выводы относительно особенностей ЛКН в сингулярных зонах составного сечения области.

1. Наличие неоднородности в сечении резко уменьшает интенсивность краевого резонанса. Это следует из данных табл. 1 и в дальнейшем подтверждается результатами программного анализа, представленными на рис. 1–4 эпюрами распределения энергии по сечению тела. Он представлен слабо только при узких «жестких» наплавках и только на высоких частотах. Наличие же «мягких» наплавков резко уменьшает интенсивность краевого резонанса при любых значениях δ_2 .

2. Основные признаки локализации волновых движений наблюдается на меньших частотах в окрестности границы раздела сред (граничный резонанс). Наиболее ярко он представлен при узких «мягких» и широких «жестких» присоединенных областях. То есть, как было указано ранее, наличие граничного резонанса и его интенсивность прямо пропорционально площади части сечения, занимаемого «жестким» материалом (Ti).

В частности, в подтверждение полученных результатов были проведены расчеты

с использованием программного комплекса ANSYS. Задачей программного анализа стала проверка полученной зависимости явления граничного и краевого резонанса от параметра δ_2 для различных сочетаний материалов термоупругой области. Рассмотрены сечения с наплавками при $\delta_2 = 0,17$ для сочетания материалов Ti-Pb-Ti и Pb-Ti-Pb. Сечение представляет собой прямоугольную область G с «жесткими» («мягкими») крайними областями. На найденных 15-ти собственных частотах проанализируем распределение напряжений и проявление эффектов граничного и краевого резонанса.

На интенсивность и локализацию, а также ПЛО напряжений существенное влияние оказывает сочетание материалов. Для области с сочетанием материалов Ti-Pb-Ti (с «жесткими» крайними областями) интенсивность напряжений гораздо выше на границах области при приближении к угловой точке B , что обосновывает ярко выраженный краевой резонанс. Так, на рис. 2 изображено распределение напряжения σ_x вдоль верхней составной границы сечения $(x; \eta)$ для восьмой собственной частоты (часть области G , расположенная в 1-ой координатной четверти). Очевидно, что σ_x принимает максимальное значение в угловой точке B на 8-ой собственной частоте. На рис. 2 кривыми (1) и (2) обозначены распределения напряжений σ_x для низких

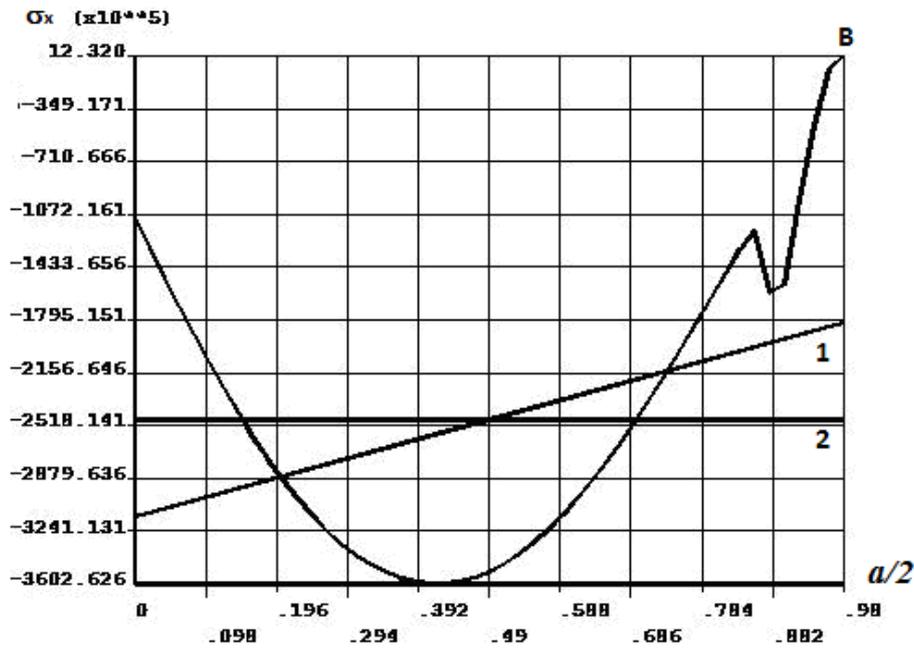


Рис. 2. Изменение значений σ_x для некоторых собственных частот вдоль составной границы сечения ($L = 3,25$, Ti-Pb-Ti)

собственных частот Ω_1, Ω_2 . В данном случае значительного изменения по длине сечения не наблюдается. Кривая (8) соответствует 8-ой собственной частоте.

Рассматривая распределение напряжений в сечении Pb-Ti-Pb (с «мягкими» внешними областями) по длине сечения, отметим, что интенсивность напряжений гораздо выше на границе раздела центральной «мягкой» и внешней «жесткой» крайней области, особенно при приближении к точке А, что обосновывает ярко выраженный граничный резонанс.

Подтверждением данного факта можно считать данные рис. 3, 4, на которых изображено распределение напряжений σ_x вдоль границы стыка двух различных материалов для девятой и десятой собственных частот. Очевидно, что σ_x принимает максимальное значение в точке А. Причем, данное явление наблюдается практически на всех частотах в большей или меньшей степени.

Уровень σ_y поперечных напряжений изменяется аналогично уровню продольных, оставаясь значительно ниже на соответствующих частотах.

Как и предполагалось, интенсивность локальной концентрации напряжений в особых точках сечения напрямую зависит от размера площади сечения, занимаемой более «жестким» материалом. Если внешние области бо-

лее «мягкие», имеем признаки граничного резонанса, если же «жесткие» — слабо выраженный краевой резонанс. Результаты анализа рис. 2–4 практически полностью совпадают с данными табл. 1.

Таким образом, для данной работы справедливы следующие выводы:

1. Наличие неоднородности в сечении резко уменьшает интенсивность краевого резонанса. Он представлен слабо только при узких «жестких» внешних областях и только на высоких частотах. Наличие же «мягких» внешних областей резко уменьшает интенсивность краевого резонанса при любых значениях δ_2 .

2. Основные признаки локализации волновых движений наблюдается на меньших частотах в окрестности границы раздела сред (граничный резонанс). Наиболее ярко он представлен при узких «мягких» и широких «жестких» наплавках. Наличие граничного резонанса и его интенсивность прямо пропорционально площади части сечения, занимаемого «жестким» материалом (Ti). Термоупругость «смазывает» краевой и граничный эффекты. Отмечается гораздо меньше частот, на которых происходит локализация исследуемых явлений. Например, для (Ti-Pb-Ti, $\delta_2 = 0,5$) граничный эффект отмечается на 14-ти частотах, а для термоупругой — на семи. Аналогично для упругой области (Pb-Ti-Pb,

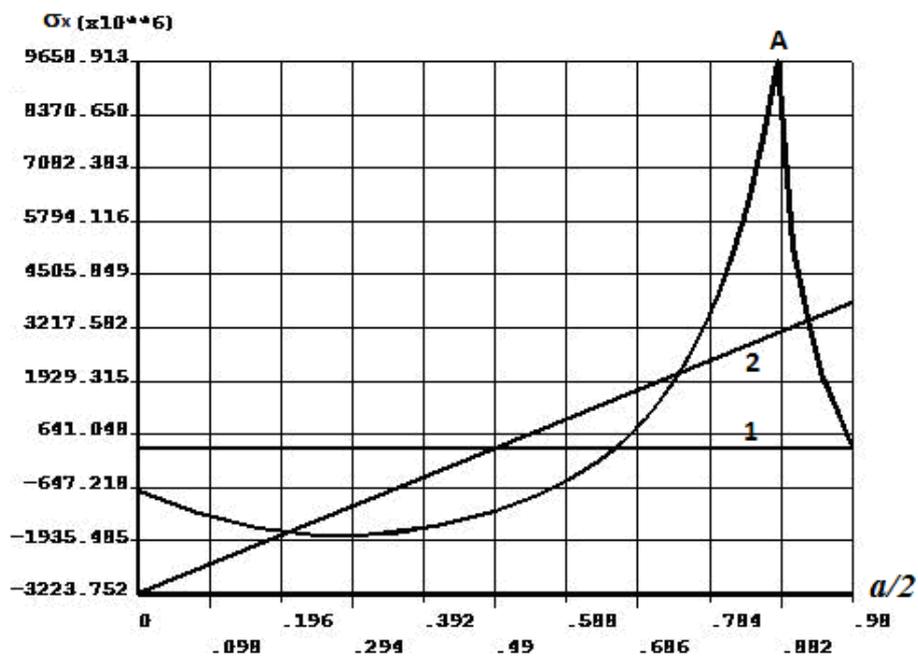


Рис. 3. Изменение значений σ_x для девятой частоты вдоль составной границы сечения ($L = 3,25$, Pb-Ti-Pb)

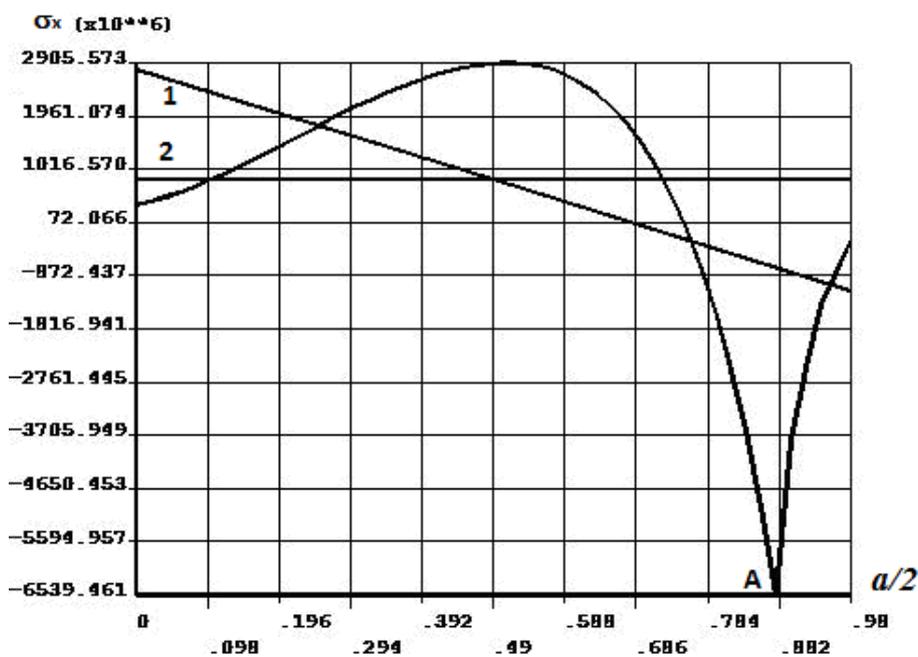


Рис. 4. Изменение значений σ_x для десятой частоты вдоль составной границы сечения ($L = 3,25$, Pb-Ti-Pb)

$\delta_2 = 0,17$) краевой эффект присутствует на семи частотах, а для термоупругой — на четырёх.

3. Наблюдается гораздо меньшее влияние геометрии неоднородности на интенсивность краевого резонанса в упругом и термоупругом расчете. Локализация во внешних угловых точках и на внешней границе сечения происходит гораздо реже, чем на границе раздела сред.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Таким образом, метод суперпозиции в данной интерпретации можно рассматривать как общий методологический подход, расширяющий возможности исследований НДС составных конструкций, что подтверждается теоретико-экспериментальным анализом и приведенным решением рассматриваемой связанной задачи термоупругости для кусочно-неоднородных тел в окрестности нерегулярных точек или внутренних линий раздела сред. Для проверки достоверности предложенных аналитических методов выполнено решение отдельных задач, имеющих известные аналитические решения и экспериментальные результаты. Адекватность разработанной методики и численные результаты, полученные в работе с использованием построенных решений граничных задач, сопоставлены с численными результатами, полученными при помощи МКЭ в вычислительном комплексе ANSYS.

Дополнительным контролем достоверности в каждой рассматриваемой задаче служила точность удовлетворения граничных условий и условий сопряжения. Можно утверждать, что влияние температурного поля на спектр резонансных частот для кусочно-неоднородной прямоугольной области незначительно, что и подтверждает проведенный КЭ анализ для различных сочетаний геометрических, упругих и температурных параметров двухслойной прямоугольной области: резонансные частоты, рассчитанные с учетом и без учета температурного поля, различаются незначительно.

В анализе прочностных характеристик учёт ПЛО по напряжениям и влияния температурных эффектов, может оказать положительное влияние на рекомендации по подбору материалов, составляющих сечение детали, а также оптимизировать геометрические параметры составного сечения.

Дальнейшим перспективным направлением исследований может быть обобщение полученных результатов на детали с другой формой сечения, а также содержащие более двух слоёв неоднородности.

Литература

1. Мелешко В.В. Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах // Прикладная механика. 2005. Т. 41, № 9. С. 101–117.
2. Беркович В.Н. Нестационарная смешанная задача динамики неоднородно упругой клиновидной среды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 3. С. 14–20.
3. Белоконь А.В., Маликов Е.П. Метод интегральных уравнений в задачах осесимметричной деформации трансверсально-изотропного цилиндра // Изв. АН Арм. ССР. Серия Механика. 1982. Т. 35. № 2. С. 17–26.
4. Беркович В.Н. О локализации волнового процесса в кусочно-однородной клиновидной среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. № 2. С. 26–32.
5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
6. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
7. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-н/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2008. 176 с.
8. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Построение канонических решений для угловых точек пространственных упругих тел // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 47–50.
9. Чигинский Д.С. Расчёт НДС тонких прямоугольных пластин из разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения. V-я молодёжная научно-практическая конференция Тульского государственного университета «Молодёжные инновации»: сб. докладов / Под ред. Е.А. Ядыкина. В 2 ч. Ч. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 217 с.
10. Беркович В.Н. Нестационарная смешанная задача динамики неоднородно упругой клиновидной среды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 3. С. 14–20.
11. Егорычев О.А., Егорычев О.О., Федосова А.Н. Влияние граничных условий на решение задачи о термоупругом колебании пластины //

- Вестник гражданских инженеров. 2011. № 4. С. 26–30.
12. Зорнина Н.А., Федоров А.С. Концентрация напряжения в особых точках / В сб. «Труды научно-технической конференции “Старт в будущее”». С.-Пб.: ОАО «КБСМ», 2011. С. 193–197.
 13. Фильштинский Л.А. Граничная задача связанной термоупругости для двумерных областей / В сб. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. С. 198–201.
 14. Вовк Л.П., Кисель Е.С. Решение краевых задач термоупругих областей с негладкой границей // Вестник Тернопольского государственного технического университета. 2009. Т. 14. № 4. С. 176–180.
 15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 299 с.

References

1. Meleshko V.V. Metod superpozitsii v zadachah o teplovyih napryazheniyah v pryamougolnyih plastinah [Method of superposition the problems of thermal stresses in rectangular plates]. *Prikladnaya mehanika* [Applied mechanics], 2005, vol. 41, no. 9, pp. 101–117. (In Russian)
2. Berkovich V.N. Nestatsionarnaya smeshannaya zadacha dinamiki neodnorodno uprugoy klinovidnoy sredy [Nonstationary mixed problem of the dynamics of inhomogeneous elastic wedge-shaped medium]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2005, no. 3, pp. 14–20. (In Russian)
3. Belokon A.B., Malikov E.P. Metod integralnykh uravneniy v zadachah osesimmetrichnoy deformatsii transversalno-izotropnogo tsilindra [The method of integral equations in the problems of the axisymmetric deformation of a transversely isotropic cylinder]. *Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Seriya Mekhanika* [News of Academy of Sciences of the Armenian SSR. Series Mechanics], 1982, vol. 35, no. 2, pp. 17–26. (In Russian)
4. Berkovich V.N. O lokalizatsii volnovogo protsessa v kusochno-odnorodnoy klinovidnoy srede [On the localization of the wave process in a piecewise-uniform wedge-shaped environment]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2010, no. 2, pp. 26–32. (In Russian)
5. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah* [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1981. 283 p. (In Russian)
6. Kondratev V.A. Kraevyye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s konicheskimi ili uglovyimi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or corner points]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Proc. of the Moscow Mathematical Society], 1967, vol. 16, pp. 209–292. (In Russian)
7. Vatulyan A.O., Solovov A.N. *Pryamyie i obratnyie zadachi dlya neodnorodnykh i neodnorodnykh uprugih i elektrouprugih tel* [Direct and inverse problems for homogeneous and inhomogeneous elastic and electric bodies]. Rostov-on-Don, Yuzhnyy federal'nyy universitet Publ, 2008, 176 p. (In Russian)
8. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Postroenie kanonicheskikh resheniy dlya uglovykh tochek prostranstvennykh uprugih tel [The construction of canonical solutions for the corner points of a spatial elastic bodies]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [Proc. of the Universities. North-Caucasian region. Natural Sciences], 2001, Spec. Iss., pp. 47–50. (In Russian)
9. Chiginskiy D.S. Raschyot NDS tonkih pryamougolnykh plastin iz raznosoprotivlyayuschihsya materialov v usloviyah termomechanicheskogo nagruzheniya [Calculation of stress-strain state of thin rectangular plates of different resist materials under thermomechanical loading]. In Yadyikin E.A. (ed.). *V-ya molodezhnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta “Molodezhnye innovatsii”: sbornik dokladov. Ch. 1.* [Proc. of 5th youth scientific and practical conference, Tula State University “The Youth innovation”. Pt. 1]. Tula, Izd-vo TulGU Publ., 2011, pp. 217. (In Russian)
10. Berkovich V.N. Nestatsionarnaya smeshannaya zadacha dinamiki neodnorodno uprugoy klinovidnoy sredy [Nonstationary mixed problem of the dynamics of inhomogeneous elastic wedge-shaped medium]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2005, no. 3, pp. 14–20. (In Russian)
11. Egoryichev O.A., Egoryichev O.O., Fedosova A.N. Vliyanie granichnykh usloviy na reshenie zadachi o termouprugom kolebanii plastiny [The influence of boundary conditions on the solution of the problem of thermoelastic vibration of a plate]. *Vestnik grazhdanskih inzhenerov* [Bulletin of civil engineers], 2011, no. 4, pp. 26–30. (In Russian)
12. Zornina N.A., Fedorov A.S. Kontsentratsiya napryazheniya v osobykh tochках [Concentration of stress at specific points]. In *Trudy nauchno-tehnicheskoy konferentsii “Start v budushee”* [Proc. of the scientific-technical conference “Start into the future”], Sankt-Peterburg, ОАО “КБСМ” Publ., 2011, pp. 193–197. (In Russian)
13. Filshtinskiy L.A. Granichnaya zadacha svyazan-

- noy termouprugosti dlya dvumernyih oblastey [The associated boundary-value problem of thermoelasticity for two-dimensional regions]. In *Sovremennyye problemy mehaniki sploshnoy sredy* [Modern problems of continuum mechanics]. Rostov-on-Don, OOO "TsVVR" Publ., 2005. pp. 198–201. (In Russian)
14. Vovk L.P., Kisel E.S. Reshenie kraevyih zadach termouprugih oblastey s nekladkoy granitsey [The solution of boundary value problems of thermoelastic fields with nonsmooth boundary]. *Vestnik Ternopolskogo gosudarstvenogo tehnikeskogo universiteta* [Bulletin of Ternopil state technical University], 2009, vol. 14, no. 4, pp. 176–180. (In Russian)
15. Lehnitskiy S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow, Lenongrad, Gostehizdat Publ., 1950, 299 p. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2017

© Вовк Л. П., Кисель Е. С., 2017

Статья поступила 12 апреля 2016 г.