УДК 517.54

ОБЛАСТЬ КЕБЕ В КЛАССЕ МОНТЕЛЯ

Гаврилюк М. Н.

KOEBE DOMAIN IN THE MONTEL CLASS

Gavrilyuk M. N.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: mngavril@gmail.com

Abstract. Study subclass of the well-known Montel class of regular simple functions, determinated by additional metric condition. Using the module method in form of general theorem of extreme partition of the plane on non-overlapping admissible domains, solve the problem of finding Koebe domain in the pointed class. In terms of moduli domains of extreme partition, which includes extremal configuration, inner and upper boundary of Koebe domain are described. These boundaries are determinated by special equations. For points of inner boundary obtained extreme mapping of the unit disc to the simply connected domain, associated with some quadratic differential. For upper boundary extremal mappings do not exist, but the boundary can not be improved.

Keywords: conformal mapping, quadratic differential, extremal decomposition, extremal mapping.

Одним из самых эффективных методов геометрической теории функций является метод экстремальных метрик [1,2]. В настоящее время разработаны различные формы этого метода.

В развитие метода экстремальных метрик, основателями которого были Альфорс и Берлинг, Дженкинс установил особую роль квадратичных дифференциалов и, частично реализовав принцип Тейхмюллера [1], доказал свою знаменитую «Общую теорему о коэффициентах» [1].

Еще одной формой метода экстремальных метрик является метод модулей семейств кривых или метод модулей. В основе его метода лежит работа Дженкинса [3]. Существенным продвижением в развитии этого метода послужила монография Кузьминой Г.В. [2], наиболее общая форма метода модулей получена Солыниным А.Ю. [4]. Метод модулей реализует экстремально-метрический принцип, устанавливающий эквивалентность проблемы модуля для нескольких семейств кривых задаче об экстремальном разбиении римановой поверхности на неналегающие области определенного типа. Метод модулей относится к интенсивно развивающемуся направлению и применяется также в комбинации с другими методами теории функций [1, 2, 4–6].

В работе методом модулей изучается подкласс известного класса Монтеля [5, 7]. Через $M(\omega)$ обозначен класс регулярных и однолистных в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функций $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ с дополнительным условием $f(\omega) = \omega$, $0 < \omega < 1$. Такая нормировка означает, что отображающая функция этого класса имеет две неподвижные точки. Это существенно осложняет решение даже стандартных экстремальных задач. Основные свойства класса $M(\omega)$ и связь с классом S приводятся, например, в [5].

Через $M_d(\omega)$ обозначим подкласс функций $w = f(z)$ из $M(\omega)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\operatorname{cap} f(U) \leqslant d, \quad d \geqslant d_0, \quad d_0 = \exp\frac{\pi}{2}\frac{K(\omega)}{K'(\omega)},$$

$K(\omega)$, $K'(\omega)$ — эллиптические интегралы 1 и 2 рода соответственно. Здесь $\operatorname{cap} E$ обозначает логарифмическую емкость континуума E. Ограничение на величину d_0 определяется леммой Гретша [1] и будет описано ниже. Рассмотрение классов регулярных функций, определенных некоторым метрическим условием, предложена Дженкинсом [1] и получила дальнейшее развитие в работах [1, 5, 6, 8].

При изучении классов конформных отображений одна из главных экстремальных за-

Гаврилюк Михаил Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: mngavril@gmail.com.

дач — отыскание константы Кебе, то есть наибольшего круга $U_R = \{w : |w| < R\}$, содержащегося в каждом множестве значений функции этого класса. В силу нормировки Монтеля в классе $M(\omega)$ такая задача заменяется на задачу описания области Кебе.

Определение. Областью Кебе в некотором классе регулярных и однолистных в круге U функций $w = f(z)$ называют множество $\bigcap f(U)$.

Пересечение берется по всем функциям данного класса.

В классе Монтеля область Кебе найдена Кжишем и Злоткевичем вариационным методом [7] и методом модулей [5]. В настоящей работе методом модулей находится внешняя и внутренняя граница области Кебе в классе $M_d(\omega)$.

Рассмотрим вначале задачу об отыскании внутренней границы области Кебе в классе $M_d(\omega)$. Для этого введем вспомогательную экстремальную задачу $P_1\ (tRe^{i\varphi})$, $R > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ об отыскании $\max\{m\,(D_1) + t^2 m(D_2, \infty)\}$ в семействе всех пар неналегающих областей D_1, D_2. Двусвязная область D_1 ассоциирована с гомотопическим классом кривых, отделяющих точки 0 и ω от $Re^{i\varphi}$ и ∞; D_2 — односвязная область, содержащая ∞ и не содержащая точки 0, ω, $Re^{i\varphi}$. Здесь $m(D_1)$ — модуль семейства замкнутых жордановых кривых, разделяющих граничные компоненты двусвязной области D_1 [1]. Будем называть здесь такой модуль модулем двусвязной области, а $m\,(D_2, \infty)$ — приведенным модулем односвязной области D_2 относительно ∞ [1].

При $t = 0$ решением задачи $P_1\left(0, Re^{i\varphi}\right)$ [2] служит пара $\{D_1, \varnothing\}$, D_1 — кольцевая область относительно квадратичного дифференциала [2],

$$Q\,(w)\,dw^2 = A\frac{dw^2}{w(w-\omega)(w-Re^{i\varphi})},$$

$$\log A = -i\arg\left(\frac{\omega^2}{Re^{i\varphi}}K^2\left(\frac{\omega}{Re^{i\varphi}}\right)\right).$$

При $t = 1$ решением задачи $P_1(1, Re^{i\varphi})$ служит пара областей [1] D_1, D_2 кольцевая и круговая относительно квадратичного дифференциала

$$Q_1\,(w)\,dw^2 = -\frac{dw^2}{w(w-\omega)},$$

D_1 — внутренность эллипса с фокусами в точках и ω, проходящего через точку $Re^{i\varphi}$, с разрезом по отрезку $[0, \omega]$; D_2 — односвязная область внешность указанного выше эллипса.

При $0 < t < 1$ задача $P_1(tRe^{i\varphi})$ является частным случаем общей экстремальной задачи о разбиении плоскости на неналегающие области специального вида [2]. Области D_1, D_2, соответственно, кольцевая и круговая относительно квадратичного дифференциала

$$Q\,(w)\,dw^2 = \frac{w - c_1}{w(w-\omega)(w-Re^{i\varphi})}dw^2 \quad . \quad (1)$$

Нуль квадратичного дифференциала $c_1 = c_1\,(R, \varphi)$ однозначно определяется условием [6, 9]: пусть дл$_Q\gamma$ — длина γ в метрике $|Q(w)|^{\frac{1}{2}}\,|dw|$, тогда

$$\frac{\text{дл}_Q\gamma_1}{\text{дл}_Q\gamma_2} = t, \quad \gamma_1 \in D_1, \gamma_2 \in D_2. \qquad (2)$$

Замечание 1. В работе Кузьминой Г.В. [9] решена экстремальная задача о разбиении плоскости на две неналегающие области специального вида.

Линейное преобразование $w = \frac{\omega}{2}(z+1)$ преобразует экстремальную конфигурацию задачи из [9] в экстремальную конфигурацию $D_1 D_2$ задачи $P_1(tRe^{i\varphi})$. В [9] в терминах эллиптических функций найдены экстремальные отображения, модули экстремальных областей, а также соотношение, определяющее неизвестный параметр задачи — нуль ассоциированного дифференциала.

Замечание 2. Для определения d_0 рассмотрим двусвязную область $U[\omega]$.

Модуль этой двусвязной области

$$m(U[\omega]) = \frac{1}{4}\frac{K'(\omega)}{K(\omega)}.$$

Рассмотрим двусвязную область, ограниченную эллипсом L_0 с фокусами $w = 0$ и $w = \omega$ и разрезом по отрезку $[0, \omega]$. Эллипс L_0 выбираем так, что модуль этой двусвязной области равен $\frac{1}{4}\frac{K'(\omega)}{K(\omega)}$. Логарифмическая емкость эллипса L_0 обозначим через d_0,

$$d_0 = \exp\frac{\pi}{2}\frac{K'(\omega)}{K(\omega)}.$$

Точка $R_0 e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, лежит на эллипсе L_0.

Для описания внутренней границы области Кебе в классе $M_d(\omega)$, а также для построения экстремальных отображений докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $D_1 D_2$ — экстремальная конфигурация задачи

$$P_1\left(1, Re^{i\varphi}\right), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} m\left(D_1\right) = \dfrac{1}{4}\dfrac{K(\omega)}{K'(\omega)}, \\ m\left(D_2, \infty\right) = -\dfrac{1}{2\pi}\log d \end{cases} \tag{3}$$

имеет единственное решение

$$\begin{cases} t_1 = t_1(\varphi, d), \\ R_1 = R_1(\varphi, d). \end{cases}$$

Доказательство. Величины, входящие в решение задачи $P_1(tRe^{i\varphi})$, являются непрерывными функциями входящих в задачу параметров, а также обладают рядом других дифференциальных свойств [2,4]. Это модули областей, нуль ассоциированного квадратичного дифференциала, отображающие функции.

Рассмотрим второе уравнение системы (3). Пусть R фиксировано, а t непрерывно изменяется. Из соотношения (2) имеем: при $t \to 0$ величина $c = c(t) \to +\infty$, значит $m\left(D_2, \infty\right) \to -\infty$.

Пусть теперь $t \to 1$, тогда по лемме Гретша [1]

$$m\left(D_2, \infty\right) \to -\frac{1}{2\pi}\log d_1, \quad d_1 < d_0.$$

Предполагается, что $R < R_0$ из определения d_0. Точка $R_0 e^{i\varphi}$ лежит на эллипсе, логарифмическая емкость которого d_0. Следовательно, существует $t = t(R)$ такое, что второе уравнение системы (3) верно. Пусть $t_1 < t_2$ и $D_1^{(k)} D_2^{(k)}$, $k = 1, 2$ — экстремальные конфигурации задач $P_1(t_k Re^{i\varphi})$, тогда

$$m(D_1^{(1)} + t_1^2 m\left(D_2^{(1)}\right) < \\ < m\left(D_1^{(1)}\right) + t_2^2 m\left(D_2^{(1)}\right) < \\ < m(D_1^{(2)} + t_2^2 m(D_2^{(2)}, \infty).$$

Из монотонности по t получаем единственность $t = t\left(R\right)$.

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (3).

Пусть $t = t\left(R\right)$ уже выбрано. Если $R \to +\infty$, то $m\left(D_1\right) \to +\infty$; если $R \to 0$, также $m\left(D_1\right) \to 0$. В работе [4] доказана непрерывная зависимость $M\left(t, Re^{i\varphi}\right) = m\left(D_1\right) + t^2 m\left(D_2, \infty\right)$ решения задачи $P_1\left(t, Re^{i\varphi}\right)$ от параметров, доказана также монотонность $M\left(t, Re^{i\varphi}\right)$ при изменении точки $Re^{i\varphi}$ в некоторых множествах [10].

При непрерывном изменении R, $R > 0$ точка $Re^{i\varphi}$ непрерывно двигается по лучу $\left(0, e^{i\varphi}\infty\right]$. Функция $M\left(t, Re^{i\varphi}\right)$ монотонна по R, $0 < \varphi < 2\pi$, $t = t\left(R\right)$ [10]. Таким образом, существует и единственно решение системы (3). Обозначим его через

$$\begin{cases} t_1 = t_1(\varphi, d), \\ R_1 = R_1(\varphi, d). \end{cases}$$

Лемма доказана. □

В теории квадратичных дифференциалов существует возможность конструктивного построения конформных отображений круговых областей относительно квадратичного дифференциала на круг и кольцевых областей относительно квадратичного дифференциала на кольцо [1]. Такие конформные отображения в терминах эллиптических функций найдены в [6, 9].

Пусть $D_1 D_2$ — экстремальная конфигурация задачи $P_1\left(1, Re^{i\varphi}\right)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

$$\begin{cases} t_1 = t_1(\varphi, d), \\ R_1 = R_1(\varphi, d) \end{cases}$$

— решение системы (3). Через $w = f(z\varphi d)$ обозначим конформное отображение круга U с разрезом по отрезку $[0, \omega]$ на D_1 — кольцевую область относительно квадратичного дифференциала (2) так, что $f\left(0, \varphi, d\right) = 0$, $f\left(\omega, \varphi, d\right) = \omega$. При этом окружность $|z| = 1$ переходит во внешнюю граничную компоненту D_1. По построению функции $w = f(z\varphi d)$ имеем

$$m(U[\omega]) = m(D_1),$$

$$m\left(f\left(U, \varphi, d\right), \infty\right) = -\frac{1}{2\pi}\log d.$$

При отображении функцией $w = f(z\varphi d)$ отрезок $[0, \omega]$ переходит в критическую траекторию квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$

(2), соединяющую точки $w = 0$ и $w = \omega$. Все точки отрезка $[0, \omega]$ являются устранимыми обобыми точками функции $w = f(z\varphi d)$. Следовательно, функция $w = f(z\varphi d)$ аналитически продолжается на весь круг U и конформно отображает его на внутреннее замыкание [1] области D_1, так что

$$f(z, \varphi, d) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \quad f(\omega, \varphi, d) = \omega,$$

$$m(f(U, \varphi, d), \infty) = -\frac{1}{2\pi}\log d.$$

Таким образом, $f(z\varphi d)$ принадлежит классу $M_d(\omega)$.

Теорема 1. Пусть $w = f(z) \in M_d(\omega)$, $d \geqslant d_0$. Внутренняя граница граница области Кебе $\gamma = \left\{w: \ w = re^{i\varphi}, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\right\}$ задается уравнением

$$r = R_1(\varphi d) \text{ и}$$

$$\begin{cases} t_1 = t_1(\varphi, d), \\ R_1 = R_1(\varphi, d) \end{cases}$$

— решение системы (2). Точке $R_1(\varphi d)e^{i\varphi}$ соответствует единственная функция $f(z\varphi d)$.

Доказательство. Пусть $w = f(z)$ произвольная функция класса $M_d(\omega)$, φ фиксировано, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Предположим, что некоторая функция $w = f(z)$ из класса $M_d(\omega)$ не принимает такое значения $Re^{i\varphi}$, что $R < R_1(\varphi d)$. Считаем при этом, что $\operatorname{cap} f(\bar{U}) = d$. Если это не так, требуемое условие достигается преобразованием растяжения kw, $k > 1$ и уменьшением R так чтобы

$$m(f(U)[\omega]) = \frac{1}{4}\frac{K(\omega)}{K^{,}(\omega)}.$$

Следовательно, конфигурация $\{f(U), \bar{C}f(U)\}$ допустима в задаче $P_1(t_1 R_1 e^{i\varphi})$, но не экстремальна. Поэтому $m(f(U)[\omega]) < m(D_1)$, где $D_1 D_2$ — экстремальная конфигурация задачи $P_1(t_1 R_1 e^{i\varphi})$. Но в силу конформности отображения $w = f(z)$ имеем

$$m(f(U)[\omega]) = m(D_1).$$

Полученное противоречие доказывает невозможность сделанного предположения. Теорема доказана. □

Для описания внешней границы области Кебе в классе $M_d(\omega)$ рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу $P_2(tRe^{i\varphi})$ [6, 9], состоящую в отыскании $\max\{t^2 m(D_1) + m(D_2, \infty)\}$ в семействе всех пар неналегающих областей $D_1 D_2$. Двусвязная область D_1 и односвязная область D_2 ассоциированы с гомотопическими классами кривых, определенными в экстремальной задаче $P_1(tRe^{i\varphi})$.

При $t = 0$ задача $P_2(0, Re^{i\varphi})$ является известной задачей Чеботарева [2] об отыскании континуума наименьшей емкости, содержащего три точки $w = 0$, $w = \omega$, $w = Re^{i\varphi}$. Следуя [2, 5, 6, 9], обозначаем такой континуум через $E(0, \omega Re^{i\varphi})$. Континуум Чеботарева $E(0, \omega Re^{i\varphi})$ представляет собой объединение замыканий трех критических траекторий квадратичного дифференциала (2), в котором нуль квадратичного дифференциала $c_0 = c_0(\omega Re^{i\varphi})$ единственным образом определяется условием связности и в терминах эллиптических функций найден в [2].

Пусть γ_1, γ_2, γ_3 обозначают длины рассматриваемых критических траекторий квадратичного дифференциала (2) с нулем $c_0 = c_0(\omega Re^{i\varphi})$ в Q-метрике [1, 2], соединяющих, соответственно, точки $w = 0$, $w = \omega$, $w = Re^{i\varphi}$ с нулем $c_0 = c_0(\omega Re^{i\varphi})$. Введем следующее обозначение:

$$t_0 = t_0\left(\omega, Re^{i\varphi}\right) = \frac{\gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}.$$

При $0 \leqslant t \leqslant t_0$ решением задачи $P_2(0, Re^{i\varphi})$ служит конфигурация $\{\varnothing, D_2\}$, $D_2 = \bar{C}E\left(0, \omega, Re^{i\varphi}\right)$ [6, 9].

При $t = 1$ задача $P_2(1, Re^{i\varphi})$ совпадает с задачей $P_1(1, Re^{i\varphi})$.

При $t_0 < t < 1$ задача $P_2(tRe^{i\varphi})$ является частным случаем общей экстремальной задачи о разбиении плоскости на неналегающе области специального типа [2]. Области D_1, D_2, соответственно, кольцевая и круговая области относительно квадратичного дифференциала (1). Нуль квадратичного дифференциала $c_2 = c_2(R\varphi)$ определяется из условия [6, 9]

$$\frac{\text{дл}_Q \gamma_2}{\text{дл}_Q \gamma_1} = t, \quad \gamma_1 \in D_1, \quad \gamma_2 \in D_2.$$

Для описания внешней границы области Кебе в классе $M_d(\omega)$ потребуется следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 2. Пусть $\{D_1, D_2\}$ — экстремальная конфигурация задачи $P_2\left(t, Re^{i\varphi}\right)$,

$t_0 < t < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $d > d_0$. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} m\left(D_1\right) = \dfrac{1}{4}\dfrac{K(\omega)}{K'(\omega)}, \\ m\left(D_2, \infty\right) = -\dfrac{1}{2\pi}\log d \end{cases} \qquad (4)$$

имеет единственное решение

$$\begin{cases} t_2 = t_2(\varphi, d), \\ R_2 = R_2(\varphi, d). \end{cases}$$

Через $w = F\left(z, \varphi, d\right)$ обозначим конформное отображение круга U с разрезом по отрезку $[0, \omega]$ на D_1 [1] — кольцевую область квадратичного дифференциала (1), экстремальную в задаче $P_2\left(t, Re^{i\varphi}\right)$ так, что $F\left(0, \varphi, d\right) = 0$, $F\left(\omega, \varphi, d\right) = \omega$. Окружность $|z| = 1$ переходит во внешнюю граничную компоненту. Также как и для $w = f(z\omega d)$ имеем: функция $w = F(z\omega d)$ конформно отображает U на внутреннее замыкание [1] D_1.

Используя монотонность решения задачи $P_2\left(t, Re^{i\varphi}\right)$ по R при фиксированном φ и экстремальность конфигурации $\{D_1, D_2\}$, получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $w = f\left(z\right) \in M_d\left(\omega\right) d \geqslant \geqslant d_0$. Внешняя граница области Кебе в классе $M_d(\omega)\gamma_2 = \{w : \ w = re^{i\varphi}, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ задается уравнением $r = R_2(\varphi d)$,

$$\begin{cases} t_2 = t_2(\varphi, d), \\ R_2 = R_2(\varphi, d) \end{cases}$$

— решение системы (4).

Замечание 3. Можно показать, что в классе $M_d(\omega)$ нет функции, принимающей значения $R_2e^{i\varphi}$. В то же время величину $R_2 = R_2(\varphi d)$ нельзя уменьшить. Можно построить последовательность функций, не принимающих значений, сходящихся к $R_2 = R_2(\varphi d)$. Подобные рассуждения систематически применялись при изучении нескольких классов регулярных и однолистных функций [6]. Таким образом, множество ограниченное кривой γ_2 является мажорантным для области Кебе в классе $M_d(\omega)$.

Литература

1. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. М.: Ин. лит-ра, 1962. 262 с.
2. *Кузьмина Г.В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т. 139. 240 с.
3. *Jenkins J.A.* On the existence of certain general extremal metrics 1, 11. // Ann. Math, 1957, Vol. 66. Iss. 2. P. 440-453; Tokoru Math. J., 1993, vol. 45, iss. 2. P. 249–257.
4. *Солынин А.Ю.* Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. Вып. 1. С. 3–86.
5. *Vasil'ev A.* Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings // Lecture Notes in Math. 2002. Vol. 1788. Springer-Verlag. Berlin.
6. *Гаврилюк М.Н., Солынин А.Ю.* Применение проблем модуля к некоторым экстремальным задачам //Деп. В ВИНИТИ, № 3072-83. 139 с.
7. *Krzyz J., Zlotkiewiez E.* Koebe sets for univalent functions with two preassigned points // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A Math. 1971. Vol. 487. P. 45–62.
8. *Кузьмина Г.В.* Метод модулей и экстремальные задачи в классе $\sum(r)$ // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2013. Т. 418. С. 136–152.
9. *Кузьмина Г.В.* Об одной проблеме модуля для семейств кривых // Препринт ЛОМИ Р-6-83, Л., 1983. 43 с.
10. *Солынин А.Ю.* Об экстремальных разбиениях плоскости или круга на две неналегающие области // Деп. в ВИНИТИ № 7800-84. 17 с.

References

1. Jenkins J. *Odnolistnye funktsii i konformnye otobrazheniya* [Univalent functions and conformal mappings]. Moscow, Inostrannaya literatura Pub., 1962, 262 p. (In Russian)
2. Kuzmina G.V. Moduli semeystv krivykh i kvadratichnye differentsialy [The modules of families of curves and quadratic differentials]. *Trudy Matematicheskogo instituta AN SSSR* [Proc. of the Institute of Mathematics of USSR Academy of Sciences], 1980, vol. 139, p. 240. (In Russian)
3. Jenkins J.A. On the existence of certain general extremal metrics 1,11. *Ann. Math*, 1957, vol. 66, iss. 2, pp. 440-453; *Tokoru Math. J.*, 1993, vol. 45, iss. 2, pp. 249–257.
4. Solynin A.Yu. Moduli i ekstremal'no-metricheskie problemy [Modules and Extreme-Metric Problems]. *Algebra i analiz* [Algebra and Analysis], 1999, vol. 11, no. 1, pp. 3–86.
5. Vasil'ev A. Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings. *Lecture Notes in Math.*, 2002, vol. 1788. Springer-Verlag, Berlin. doi: 10.1007/b83857
6. Gavrilyuk M.N., Solynin A.Yu. Primenenie problem modulya k nekotorym ekstremal'nym zadacham [Applications module problems for

certain extremal problems]. *Dep. VINITI*, no. 3072-83, 139 p. (In Russian).

7. Krzyz J., Zlotkiewiez E. Koebe sets for univalent functions with two preassigned points. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A Math.* 1971, vol. 487, pp. 45–62.
8. Kuzmina G.V. Metod moduley i ekstremal'nye zadachi v klasse $\sum(r)$ [Modules method and extremal problems in the class $\sum(r)$]. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI RAN* [Notes of scientific seminars of the St. Petersburg Department of the V.A. Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences], 2013, vol. 418, pp. 136–152. (In Russian)
9. Kuzmina G.V. *Ob odnoy probleme modulya dlya semeystv krivykh* [On a problem of a module for families of curves]. Preprint LOMI R-6-83, Leningrad, 1983, 43 p. (In Russian)
10. Solynin A.Yu. *Ob ekstremal'nykh razbieniyakh ploskosti ili kruga na dve nenalegayushchie oblasti* [On extremal partitions of a plane or a circle into two nonoverlapping domains]. Dep. in VINITI, no. 7800-84, 17 p. (In Russian)

Статья поступила 16 декабря 2016 г.