УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ С МНОЖЕСТВОМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОЛОСТЕЙ

Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Бабешко О. М., Лозовой В. В., Уафа Г. Н., Плужник А. В., Мухин А. С.

ESTIMATION OF THE STATE OF CONSTRUCTIONS AND UNDERGROUND STRUCTURES WITH A NUMBER OF THE PARALLEL CONNECTIONS

Evdokimova O. V.*, Babeshko V. A.*,**, Babeshko O. M.**, Lozovoy V. V.*, Uafa G. N.*, Pluzhnik A. V.**, Mukhin A. S.**

* Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
** Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. Methods for assessing the strength properties of objects such as underground structures, in particular mines, containing parallel tunnels, are being developed, the partitions between which are formed by the material of the seams. Such block constructions made from the metal contained cavities, which are lightening the weight of the object, are used in the branches of machinery, also in aircraft industry for airfoil of power generator. Traditionally the researchers are held for the one fix and then the collected characteristics are accepting for the other objects. At the same time, multiplicity of such objects can lead to the appearance one more fact of offence of resistance connected with the possibility of localization of the stress-strain state in one of the zones of the structure, which leads to exceeding the planned strength parameters.

In this study the calculating theory mechanical strength characteristics of such objects is built on the examples of underground constructions. The foundation of the study is the theory of block-level element, basing on factorizing approaches. The problem leads to the research of the system of integral equations of first kind with difference kernel, which is listed to the system of Fredholm integral equations of second kind. With the way of integral evaluation, describing kernels of these equations according to the theory residues, integral equations are managed to be listed to algebraic equations, available for analytical analysis, allowing finding out location of strain and displacement.

Keywords: stress-strain state, drifts, factorization, deformable layers, interface layer, Kirchhoff plates, block elements differential and integral equations.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru.

Уафа Галина Николаевна, инженер-исследователь Южного научного центра РАН; e-mail: uafa70@mail.ru.

Плужник Андрей Валерьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

Мухин Алексей Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: muhin@mail.kubsu.ru

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ, 0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323, 16-08-00191_а).

1. Постановка задачи

В работах [1, 2] рассмотрены постановки задач с параллельными штольнями, намечен алгоритм построения решения и получения возможности оценивать концентрацию напряжений в блочной структуре. В настоящей работе излагается более детально этот подход, приводятся необходимые для реализации алгоритма соотношения, а также выполнены предварительные построения для реализации нового способа учета множественности полостей.

Объектом исследования является совокупность параллельных подземных сооружений как блочная структура, состоящая из верхнего линейно упругого слоя толщиной H_1 и пласта толщины h, моделируемого пластиной Кирхгофа. Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики среды которого грунтоподобные и позволяют моделировать его постелью Винклера. Предполагается, что толщина h пласта много меньше H_1 что имеет место в реальных условиях добычи многих полезных ископаемых.

Расположим систему координат $ox_1x_2x_3$ таким образом, что плоскость ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось ox_3 направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси ox_1, перпендикулярно оси ox_2, расположено N протяженных параллельных между собой штолен, которые считаются бесконечными. Штольни находятся в рудном пласте и ширина каждой из них равна $b_{2n+1} - b_{2n}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, где (b_{2n}, b_{2n+1}) — координаты на оси ox_2 штольни с номером $2n$. Пласт сверху накрыт верхним деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями $t(x_1, x_2)$ и перемещениями $u_{32}(x_1, x_2)$ верхней границы основания задается соотношением $u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \upsilon t(x_1, x_2)$, $\varepsilon_6^{-1}\upsilon > 0$. Здесь υ — коэффициент постели Винклера. Области между штольнями с координатами $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$ шириной, $b_{2n} - b_{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $b_1 = -\infty$, $b_{2N} = \infty$, являются опорами, имеющими номера $2n - 1$. Допускается, что верхний упругий слой со свободной от напряжений верхней границей и плотностью материала ρ вертикально воздействует сверху на пласт напряжением $q_0 = \rho g H_1$, где g — ускорение свободного падения, вызывая пренебрежимо малые касательные напряжения в сравнении с нормальными.

2. Определяющие уравнения

Уравнение пластин Кирхгофа, описывающих поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяженными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \\ \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \\ + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv \\ \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b},$$

$$T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b} \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{H_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H_1^3},$$

$$Q_b = -D_{b2} \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = \\ = f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H_1 \partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H_1^4}{E_b h_b^3},$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H_1}{\mu}.$$

Здесь для опор, сформированных из фрагментов пласта между штольнями, введено условное обозначение индексом b, которому в будущем будут приданы текущие номера. Опоры занимают области Ω_b с границами $\partial\Omega_b$, при вертикальных статических воздействиях напряжением g_{3b} сверху и t_{3b} — снизу. Используются общепринятые обозначения механических параметров в выбранной системе координат: M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат $x_1 o x_2$; h_b — толщины пластин, H_1 — размерная толщина верхнего слоя. Обозначения заимствованы из [1,2]. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счет веса верхнего слоя и описывается соотношением [3–5]

$$u_{31}(x_1, x_2) = \mathrm{K}_{31} g =$$
$$= \varepsilon_6^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2) \times$$
$$\times [g(\xi_1, \xi_2) - g_0] \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2,$$

$$k_{31}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2) \times$$
$$\times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \, \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2.$$

Здесь $g(\xi, \eta)$ — воздействия на нижнюю границу верхнего слоя со стороны пласта, то есть контактные напряжения, действующие на верхний пласт от опор. Функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$, называемая символом интегрального уравнения, представляет собой для линейно-упругого слоя мероморфную функцию двух комплексных переменных. Полюса функции по одному из комплексных переменных $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ при фиксированном вещественном втором переменном являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах. Воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается $t(\xi_1, \xi_2)$, вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях есть $u_{32}(x_1, x_2)$.

3. Внешний анализ граничной задачи

В основе решения граничной задачи лежит метод блочного элемента в сочетании с факторизационными подходами [1–5]. Следуя им, функциональные уравнения граничной задачи для каждой опоры можно представить в виде [1, 2]

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} =$$
$$= -\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3.1)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}),$$
$$b = \lambda, r.$$

Здесь ω_b — участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha, x\rangle} \Bigg\{ -\Bigg[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} +$$
$$+ i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \Bigg] \mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \Bigg[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \Bigg] \mathrm{d}x_2 \Bigg\},$$
$$b = \lambda, r.$$

Интеграл вычисляется по границе опоры в направлении против часовой стрелки. Для прямолинейной границы внешняя форма принимает выражение

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha, x\rangle} \Bigg\{ -\Bigg[i\alpha_1 M_b D_b^{-1} - Q_b D_b^{-1} -$$
$$- (\alpha_2^2 + \nu_b \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} +$$
$$+ i\alpha_2 \left[\alpha_2^2 + (2 - \nu_b)\alpha_1^2 \right] u_{3b} \Bigg] \Bigg\} \mathrm{d}x_1,$$

Вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи, с учетом принятых обозначений, можем представить отдельно для каждой стороны опоры λ и r, где λ — левая сторона опоры, а r — правая. Пусть пластина занимает область $\Omega_n(|x_1| \leqslant \infty,\ b_{2n-1} \leqslant x_2 \leqslant b_{2n})$. Тогда для правой стороны имеем псевдодифференциальные уравнения

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \Bigg\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \Bigg\{ i\alpha_{2-} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_r -$$
$$- (\alpha_{2-}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} +$$
$$+ i\alpha_{2-} \left[\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2 \right] u_{3r} \Bigg\} \times$$
$$\times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n}} \, \mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \Bigg\{ i\alpha_{2-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda -$$
$$- (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} +$$
$$+ i\alpha_{2-} \left[\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda)\alpha_1^2 \right] u_{3\lambda} \Bigg\} \times$$

$$\times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \varepsilon_{53b} S_3(\alpha_1, \alpha_{2-}) \Big\rangle = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Big\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \Big\{ iD_{r1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2-} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \\ + i\left[3\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r} \Big\} \times \\ \times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \Big\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2-} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\left[3\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda} \Big\} \times \\ \times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \varepsilon_{53} S_3'(\alpha_1, \alpha_{2-}) \Big\rangle = 0.$$

На левой стороны пластины псевдодифференциальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Big\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \Big\{ i\alpha_{2+} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - \\ - (\alpha_{2+}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda} \Big\} \times \\ \times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_r} \Big\{ i\alpha_{2+} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_r - \\ - (\alpha_{2+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r} \Big\} \times \\ \times e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \varepsilon_{53} e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} S_3(\alpha_1, \alpha_{2+}) \Big\rangle = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Big\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \Big\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\left[3\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda} \Big\} \times \\ \times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_r} \Big\{ iD_{r1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \\ + i\left[3\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r} \Big\} \times \\ \times e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \varepsilon_{53} S_3'(\alpha_1, \alpha_{2+}) \Big\rangle = 0.$$

В подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2}.$$

Введем следующую систему обозначений, основываясь на (3.2) и (3.3),

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y_r} = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z_r} = \{z_{1r}, z_{2r}\},$$

$$\mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1) g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g,$$

$$y_{1\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 Q_\lambda,$$

$$y_{1r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 Q_r,$$

$$z_{1\lambda} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda,$$

$$z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2^r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r,$$

$$\mathbf{K}_\lambda = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K_r} = \{k_{1r}, k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2-})(t_\lambda - g_\lambda) = \\ = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}),$$

$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}'(\alpha_1, \alpha_{2-}),$$

$$k_{1r} = \varepsilon_{53r}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2+})(t_\lambda - g_\lambda) = \\ = \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}),$$

$$k_{2r} = \varepsilon_{53r} S_{3r}'(\alpha_1, \alpha_{2+}).$$

Будем считать, что боковые границы опор штолен свободны от напряжений, то есть $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y_r} = 0$. Тогда, введя обозначения,

$$\mathbf{Z}_{\lambda r} = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}, z_{1r}, z_{2r}\},$$

$$\mathbf{K}_{\lambda\mathbf{r}} = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}, k_{1r}, k_{2r}\},$$

с учетом направлений дифференцирования получим для каждой опоры систему уравнений для решения псевдодифференциальных уравнений вида

$$(-1+\nu_\lambda)\alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2+}\left[(1-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} - \\ - \left\{(-1+\nu_r)\alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2+}\left[(1-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r}\right\} \times \\ \times e^{i\alpha_{2+}b_{2n-1}} = -k_{1\lambda},$$

$$2\alpha_{2+} z_{1\lambda} + i\left[(1+\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} - \\ - \left\{2\alpha_{2+} z_{1r} + i\left[(1+\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r}\right\} e^{i\alpha_{2+}b_{2n}} = \\ = -k_{2\lambda}.$$

$$(-1+\nu_r)\alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2-}\left[(1-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} - \\ - \left\{(-1+\nu_\lambda)\alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2-}\left[(1-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda}\right\} \times \\ \times e^{i\alpha_{2-}b_{2n-1}} = -k_{1r},$$

$$2\alpha_{2-} z_{1r} + i\left[(1+\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} - \\ - \left\{2\alpha_{2-} z_{1\lambda} + i\left[(1+\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda}\right\} e^{i\alpha_{2-}b_{2n}} = \\ = -k_{2r}.$$

Матричное представление позволяют записать решение системы

$$\mathbf{A_{\lambda r} Z_{\lambda r}} = -\mathbf{K_{\lambda r}}, \quad \mathbf{Z_{\lambda r}} = -\mathbf{A_{\lambda r}^{-1} K_{\lambda r}}.$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений

$$-i\alpha_{2-} y_{1\lambda} + y_{2\lambda} + (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) z_{1\lambda} - \\ - i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} + k_{1\lambda} = 0,$$

$$-iy_{1\lambda} + 2\alpha_{2-} z_{1\lambda} - \\ - i\left[3\alpha_{2-}^2 + 2(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} + k_{2\lambda} = 0,$$

$$-i\alpha_{2+} y_{1r} + y_{2r} + (\alpha_{2+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) z_{1r} - \\ - i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} + k_{1r} = 0,$$

$$-iy_{1r} + 2\alpha_{2+} z_{1r} - \\ - i\left[3\alpha_{2+}^2 + 2(2-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} + k_{2r} = 0.$$

В матричной форме система имеет вид

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{Y}_\lambda + \mathbf{B}_\lambda \mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{K}_\lambda = 0, \\ \mathbf{A_r Y_r} + \mathbf{B_r Z_r} + \mathbf{K_r} = 0,$$

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} a_{11\lambda} & a_{12\lambda} \\ a_{21\lambda} & a_{22\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\lambda = \begin{pmatrix} b_{11\lambda} & b_{12\lambda} \\ b_{21\lambda} & b_{22\lambda} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} a_{11r} & a_{12r} \\ a_{21r} & a_{22r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} b_{11r} & b_{12r} \\ b_{21r} & b_{22r} \end{pmatrix},$$

$$a_{11\lambda} = -i\alpha_{2-}, \quad a_{12\lambda} = 1, \quad a_{21\lambda} = -i,$$

$$a_{22\lambda} = 0, \quad b_{11\lambda} = (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2),$$

$$b_{12\lambda} = -i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$b_{21\lambda} = 2\alpha_{2-}, \quad b_{22\lambda} = -i\left[3\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$a_{11r} = -i\alpha_{2+}, \quad a_{12r} = 1, \quad a_{21r} = -i,$$

$$a_{22r} = 0, \quad b_{11r} = (\alpha_{2+}^2 + \nu_r \alpha_1^2),$$

$$b_{12r} = -i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right],$$

$$b_{21r} = 2\alpha_{2+}, \quad b_{22r} = -i\left[3\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right].$$

Решив эти псевдодифференциальные уравнения для избранной граничной задачи и внеся найденные неизвестные во внешние формы, преобразование Фурье решения для пластин можно представить для левой полуплоскости, $b = \lambda$, и для правой, $b = r$, в однотипном виде в локальных системах координат

$$U_{3b} = \left[R_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}) \right\rangle.$$

Дальнейшее использование этого представления для сопряжения с подложкой детально описано в [1,2]. В результате получается система интегральных уравнений. Для ее исследования и решения разрабатывается поход, который позволит строить приближенные решения граничной задачи, не прибегая к уравнениям, построенным в [1,2]. Он основан на сведении проблемы к краевой задаче Римана для нескольких пар функций.

4. Сопряжение пласта со слоями

Внеся решения этой системы в псевдодифференциальные уравнения, получим полный набор граничных условий на каждой границе. После этого они вносятся в правые части функциональных уравнений (3.1). В результате соотношения для опор могут быть представлены в следующем виде:

$$U_{2n-1} = -R^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\times \times \left[\int\limits_{\partial\Omega_n} \omega_{2n-1} + \varepsilon_{53}\mathbf{F}_2(t_{2n-1} - g_{2n-1}) \right].$$

Приняв теперь во внимание, что число опор равно $N+1$ с обозначениями сторон опор $\lambda = 2n-1$, $r = 2n$, получим в результате сопряжения блочных элементов опор с верхним и нижним слоями следующую систему уравнений:

$$U_{31}(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_6^{-1}K_{31}\left(\sum_{n=1}^{N} G_{2n-1} - G_0\right),$$

$$U_{32}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_6^{-1}\upsilon\sum_{n=1}^{N} T_{2n-1}.$$

Здесь $U_{32}(\alpha_1, \alpha_2)$ — перемещения нижнего основания по закону постели Винклера [2]. Можно также использовать другую модель основания, принятую в [1]. Справедливы соотношения

$$U_{2n-1} = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}\left\langle \int\limits_{\partial\Omega_{\lambda 2n-1}} \omega_{\lambda 2n-1} - \right. \left. - \int\limits_{\partial\Omega_{r2n-1}} \omega_{r2n-1} + \varepsilon_{53}S_{312n-1}(\alpha_1, \alpha_2)\right\rangle,$$

$$\omega_{\lambda 2n-1} = = e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n-1}}\left\{ -\left[(\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{\lambda 2n-1}}{\partial x_2} + \right.\right. \left.\left. + i\alpha_2\left[\alpha_2^2 + (2-\nu)\alpha_1^2\right] u_{\lambda 2n-1}\right]\right\} \mathrm{d}x_1,$$

$$\omega_{r2n-1} = = e^{i\,\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n}}\left\{ -\left[(\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{r2n-1}}{\partial x_2} + \right.\right. \left.\left. + i\alpha_2\left[\alpha_2^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{r2n-1}\right]\right\} \mathrm{d}x_1,$$

$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

В результате ряда преобразований приходим к следующему функциональному уравнению, описывающему поведение отдельно выбранной опоры:

$$\big[\varepsilon_6^{-1}K_{31} + + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}(1 + \upsilon^{-1}K_{31})\big]G_{2n-1} = = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}\Big\langle \Big[Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}}\Big] + + \varepsilon_6^{-1}K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53}\upsilon^{-1})G_0\Big\rangle.$$

Значение $t_{2n-1}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1}T_{2n-1}$ находится из соотношения

$$t_{2n-1}(x_1, x_2) = \upsilon^{-1}\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}\mathbf{F}_2^{-1}K_{31}(G_0 - G_{2n-1}).$$

Здесь $\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}$ — проектор на область Ω_{2n-1}. Последнее соотношение можно приближенно представить в виде

$$t_{2n-1}(x_1, x_2) = \upsilon^{-1}\mathbf{F}_2^{-1}K_{31}(G_0 - G_{2n-1}).$$

Это оправдано тем, что в статических задачах правая часть последнего выражения экспоненциально убывает при удалении от зоны контакта.

Для сведения функционального уравнения к системе интегральных уравнений, введем следующие обозначения:

$$\big[\varepsilon_6^{-1}K_{31} + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}\times \times (1 + \upsilon^{-1}K_{31})\big] = K(\alpha, \beta),$$

$$\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}\mathbf{F}_2^{-1}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}\times \times\Big\langle\Big[Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}}\Big] + + \varepsilon_6^{-1}K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53}\upsilon^{-1})G_0\Big\rangle = = f_{2n-1}(x_1, x_2),$$

$$\mathbf{P}_{\Omega_{2n}}\mathbf{F}_2^{-1}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}\times \times\Big\langle\Big[Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}}\Big] + + \varepsilon_6^{-1}K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53}\upsilon^{-1})G_0\Big\rangle = \phi_{2n}(x_1, x_2),$$

$$U_{2n-1} = -(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\times \times \Big\langle (A_{2n-1}\alpha_2^3 + B_{2n-1}\alpha_2^2 + + C_{2n-1}\alpha_2 + D_{2n-1})e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + + (A_{2n}\alpha_2^3 + B_{2n}\alpha_2^2 + C_{2n}\alpha_2 + D_{2n})e^{i\alpha_2 b_{2n}} + + \varepsilon_{53}(T_{2n-1} - G_{2n-1})\Big\rangle,$$

$$(A_{2n-1}\alpha_2^3 + B_{2n-1}\alpha_2^2 + + C_{2n-1}\alpha_2 + D_{2n-1}) = = Q_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$(A_{2n}\alpha_2^3 + B_{2n}\alpha_2^2 + C_{2n}\alpha_2 + D_{2n}) = = Q_{2n}(\alpha_1,\alpha_2).$$

5. Сведение системы интегральных уравнений к краевой задаче Римана

Приняв во внимание наличие N опор, функциональное уравнение граничной задачи можно записать в виде интегрального уравнения [2,3]

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1,\alpha_2)\times \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1,\xi_2)\times \times e^{ii(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2)}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

$$\mathrm{K}g = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\times \times\sum_{n=1}^{N} g_{2n-1}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = = \sum_{n=1}^{N} f_{2n-1}(x_1,x_2) + \sum_{n=1}^{N-1}\phi_{2n}(x_1,x_2),$$

$$n = 1,2,\ldots,N.$$

Или

$$K(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=1}^{N} G_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2) - - \sum_{n=2}^{N-1}\Phi_{2n}(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{n=1}^{N} F_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$n = 1,2,\ldots,N,$$

$$F_0(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{n=1}^{N} F_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2).$$

Имеют место соотношения

$$G_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n-1}} = G_{2n-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$G_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n}} = G_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\Phi_{2n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n}} = \Phi_{2n-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\Phi_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2 b_{2n+1}} = \Phi_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$G_{2n-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2) = G_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n}-b_{2n-1})},$$

$$\Phi_{2n-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2) = \Phi_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n+1}-b_{2n})}.$$

Отсюда

$$K(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=1}^{N} G_{2n-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} - - \sum_{n=1}^{N-1}\Phi_{2n}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}} = = e^{i\alpha_2 b_{2N-1}}F_0(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$n = 1,2,\ldots,N,$$

$$F_0(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{n=1}^{N} F_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2)G_{2N-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2) + + K(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=1}^{N-1} G_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n})} - -\sum_{n=2}^{N-1}\Phi_{2n}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n+1})} = F_0(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$n = 1,2,\ldots,N.$$

В результате получаем выражения

$$G_{2N-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2) = = -\sum_{n=1}^{N-1} G_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N-1}-b_{2n})} + + K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=2}^{N-1}\Phi_{2n}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N-1}-b_{2n+1})} + + K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)F(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$G^{\pm}_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2) = X^{\pm}_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\Phi^{\pm}_{2n}(\alpha_1,\alpha_2) = X^{\pm}_{2n}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$X^{+}_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2) = X^{-}_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n}-b_{2n-1})},$$

$$X^{+}_{2n}(\alpha_1,\alpha_2) = X^{-}_{2n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2n+1}-b_{2n})},$$

$$X^{+}_{2N-1}(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = -\sum_{n=1}^{N-1} X^{-}_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n})} + \\ + K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=2}^{N-1} X^{-}_{2n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n+1})} + \\ + K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)F_0(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$F(\alpha_1,\alpha_2) = K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)F_0(\alpha_1,\alpha_2).$$

Введем обозначения векторов

$$\mathbf{X}^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2) = \left\{X^{\pm}_{n}(\alpha_1,\alpha_2)\right\}.$$

Тогда получаем краевую задачу Римана для $2N-1$ пары функций

$$\mathbf{X}^{+}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{D}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{X}^{-}(\alpha_1,\alpha_2) + \mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$m,n = 1,2,\ldots,2N,$$

$$\mathbf{D} = \|d_{mn}\|, \quad d_{mn} = 0, \quad m \neq n, \quad m \neq 2N,$$

$$d_{Ns} = \begin{cases} -e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n})}, & s = 2n-1, \\ K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2N}-b_{2n+1})}, & \\ & s = 2n-1. \end{cases}$$

Таким образом, граничная задача сведена к решению краевой задачи Римана для $2N$ пар аналитических функций. Это уравнение будет объектом последующих исследований и разработки метода его решения.

Литература

1. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К проблеме мониторинга напряженности зон параллельных штольней // МТТ. 2016. № 5. С. 6–14.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К теории влияния глобального фактора на прочность совокупности параллельных соединений // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 4. С. 412–419.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

References

1. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. K probleme monitoringa napryazhennosti zon parallel'nykh shtol'ney [To the problem of monitoring the intensity of zones of parallel galleries]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of a solid body], 2016, no. 5, pp. 6–14. (In Russian)
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K teorii vliyaniya global'nogo faktora na prochnost' sovokupnosti parallel'nykh soedineniy [To the theory of the influence of the global factor on the strength of a set of parallel connections]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Mechanics of Continuous Media], 2016, vol. 9, no. 4, pp. 412–419. (In Russian)
3. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problem in elasticity theory for nonclassical fields]. Moscow, Nauka Pub., 1979, 320 p. (In Russian)
4. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problem in elasticity theory]. Moscow, Nauka Pub., 1974, 456 p. (In Russian)
5. Babeshko V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka Pub., 1984, 256 p. (In Russian)

Статья поступила 18 марта 2017 г.