

УДК 539.3

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПРОБЛЕМЕ ФУНДАМЕНТОВ И ПОКРЫТИЙ ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Телятников И. С.,
Елецкий Ю. Б., Уафа С. Б.

FACTORIZATION METHODS IN THE PROBLEM OF THE BASES AND COVERINGS OF POLYGONAL FORMS

Babeshko V. A. *, Evdokimova O. V. *, Babeshko O. M. **, Telyatnikov I. S. *, Eletskiy Y. B. *,
Uafa S. B. *

* Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia

** Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The block element method is considered in mechanics mixed boundary problems for continuous bodies. The approach was induced by Wiener–Hopf method, and its extension to space case is called integral factorization method and mostly used in applications with the smooth-boundary areas. In this work the method is used for sectionally smooth boundary areas with corner points, what requested its development for two- complex-variable functions. Concerned boundary problems have numerous applications for the tasks of mechanics, theoretical and technical physics. Created method was tested on a vector contact problem for wedge-shaped stamp, taking place in the first quadrant. Means of achieving of different solution's characteristics are described in details. They are based on conversion of one-dimensional linear integral equation system, typical to dynamic and static contact problems for stripe-stamps.

Keywords: vector contact problem, system of integral equations, wedge-shaped area, block element, factorization, approximate values, singular characteristics.

Введение

Интегральный метод факторизации, входящий к работам Н. Винера [1], позволил численно-аналитически исследовать многочисленные смешанные граничные задачи механики сплошных сред, математической и теоретической физики [2–6]. Всецело связанный с факторизацией функций и матриц-функций одной комплексной переменной метод удалось

приспособить для применения в двумерных областях с гладкой границей. Так, в монографии [5] изложены варианты применения метода факторизации к интегральным уравнениям. Однако в указанной работе этот подход применяется лишь в одномерных интегральных уравнениях либо в уравнениях, просто сводящихся к одномерным. Обобщение метода на пространственные случаи для областей с гладкой границей изложено в работах [6–10].

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник лаборатории прикладной математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru.

Елецкий Юрий Борисович, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН; e-mail: elezkiy@priazovneft.ru

Уафа Самир Баширович, инженер Кубанского государственного университета; e-mail: uafa70@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ), (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323).

В то же время, к задачам с негладкой границей этот метод не применялся. В настоящей работе, по-видимому, впервые рассматривается этот метод применительно к области типа клина, как для статических, так и для динамических граничных задач. Простейший вариант возникает при рассмотрении клиновидной области с прямым углом, то есть квадранта декартовой системы координат. К числу важных теоретических приложений факторизационных методов следует отнести их роль в создании метода блочного элемента решения граничных задач для уравнений в частных производных [11]. Имеющий топологическую основу метод позволяет блоками решать такие граничные задачи, покрывая всю область задания граничной задачи. На примере контактных задач отметим некоторые достоинства метода блочного элемента, применяемого к интегральным уравнениям пространственных смешанных граничных задач. Как правило, на границе области задания интегрального уравнения контактных задач происходит смена граничных условий. Так, в контактных задачах для жесткого штампа — это переход из области задания перемещений под штампом, где ставится интегральное уравнение, в область задания напряжений. В теории трещин — это противоположный переход. Метод блочного элемента, в отличие от других подходов, и прежде всего численных, позволяет вместе с решением интегрального уравнения одновременно получать данные о значениях физических параметров смешанной задачи также и вне зоны задания интегрального уравнения. В контактных задачах — определить поведение перемещений в области вне штампа. Ниже рассматривается система интегральных уравнений смешанной граничной задачи в области клина, занимающего в плане первый квадрант декартовой системы координат. Такие интегральные уравнения возникают в задачах о действии клиновидного штампа на многослойную среду при условии жесткого сцепления штампа со средой или наличия лишь касательных напряжений в области контакта, в частности, возникающие в контактных задачах ползучести [2–4], а также в задачах о поведении трещины клиновидной в плане формы в многослойной области, о тонкостенном покрытии указанной формы на многослойном основании, о поведении плавающей льдины клиновидной в плане формы, в смешанных

граничных задачах, описывающих поведение холодной плазмы в указанной области, а также в других смешанных задачах.

1. Постановка задачи

Ниже блочный метод применяется к ранее не исследовавшемуся типу систем интегральных уравнений

$$\begin{aligned} Kq &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \mathbf{f}(x, y), \\ 0 &\leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(x, y) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{q}(\xi, \eta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta)} d\xi d\eta.$$

Интегральное уравнение можно представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta) \mathbf{Q}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta &= \\ &= \mathbf{f}(x, y), \\ 0 &\leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{f}(\xi, \eta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta)} d\xi d\eta.$$

Элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha, \beta)$ предполагается мероморфными по обоим комплексным переменным, нулевые и полярные множества элементов которой представляют аналитические кривые двух комплексных переменных с поведением на бесконечности вида

$$\mathbf{K}(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-1}), \quad \beta = \text{const};$$

$$\mathbf{K}(\alpha, \beta) = O(\beta^{-1}), \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha, \beta \rightarrow \infty.$$

Предполагается, что полярные множества элементов матрицы-функции разрешимы относительно параметров и представимы в виде $\alpha_n = \alpha_n(\beta)$, $\beta_n = \beta_n(\alpha)$. То же относится к определителю матрицы-функции. В динамических смешанных граничных задачах конечное число полюсов могут быть вещественными [6]. Контур Γ_1 , Γ_2 лежат на вещественной оси комплексных плоскостей α, β всюду,

кроме зон появления на вещественных осях вещественных полюсов элементов матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha, \beta)$. В этом случае в достаточно узких зонах вещественных осей они отклоняются в комплексную плоскость, обходя полюса. Контуры выбираются таким образом, чтобы в случаях гармонических по времени смешанных граничных задач была бы физически оправданная постановка граничных задач — на бесконечности должен правильно выполняться принцип излучения, состоящий в направленности фазовых скоростей на бесконечность для нормальных материалов и из бесконечности — для мезоматериалов электроники [6]. В первом случае в первом квадранте вещественные полюса элементов символа $\mathbf{K}(\alpha, \beta)$ обходятся контурами сверху, если при переходе к комплексным амплитудам принята функция $\exp(-i\omega t)$, ω — частота колебаний, t — время. Во втором случае обход в первом квадранте осуществляется снизу. Особое место занимает случай обратных фазовых скоростей, описанный в [6]. Во втором квадранте положение контуров противоположное. Следует заметить, что исследованию интегрального уравнения указанного типа, посвящен ряд работ, связанных с выделением особенностей решения в угловой точке [9, 12]. Решение указанного типа систем интегральных уравнений и ему подобных имеет важные применения в фундаментостроении, сейсмологии, в устройствах элементной базы электроники, при изучении смешанных граничных задач о поведении плазмы в разных состояниях и в ряде других важных технических областях.

2. Свойства интегрального уравнения

Для исследования системы интегральных уравнений методом блочного элемента введем в рассмотрение следующий набор блочных элементов Ω_{mn} , $m, n = 1, 2$. Второй и четвертый квадранты обозначены Ω_{12} и Ω_{21} соответственно, а третий — Ω_{22} . Этими же индексами будем обозначать и вектор-функции, для которых заданные области являются носителями. Первый квадрант будем обозначать Ω . Ниже условимся в следующих обозначениях. Чтобы избежать многочисленных применений символа оператора преобразования и обращения Фурье, в дальнейшем для преобразований Фурье вектор-функций, обозначенных строчными буквами, будем применять их же прописные буквы, например, для

$\mathbf{k}(x, y)$, $\mathbf{f}(x, y)$, $\varphi(x, y)$ преобразования Фурье будут $\mathbf{K}(\alpha, \beta)$, $\mathbf{F}(\alpha, \beta)$, $\Phi(\alpha, \beta)$ соответственно. В дальнейшем придется осуществлять операции факторизации вектор-функций в виде суммы и произведения. Эти операции будут осуществляться над вектор-функциями, зависящими от двух комплексных переменных α и β . При выполнении операции факторизации в виде суммы буду использоваться принятые в [6] обозначения с применением фигурных скобок. Так, если факторизуется в виде суммы некоторая вектор-функция $\mathbf{G}(\alpha, \beta)$ по параметру α относительно контура Γ_1 , то вектор-функции, получаемые в результате этой операции, обозначаются формулами

$$\mathbf{G}(\alpha, \beta) = \{\mathbf{G}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{+} + \{\mathbf{G}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{-}. \quad (2.1)$$

Первая справа вектор-функция регулярна в комплексной плоскости выше контура Γ_1 , а вторая — ниже этого контура. В том случае, если вектор-функции подвергаются факторизации и по параметру β , эти факторизованные вектор-функции обозначаются следующим образом:

$$\mathbf{G}_{\alpha}^{+} = \{\mathbf{G}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{+} + \{\mathbf{G}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{-},$$

$$\{\mathbf{G}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{+} \equiv \mathbf{G}_{\alpha\beta}^{++} \equiv \{\{\mathbf{G}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{+},$$

$$\{\mathbf{G}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{-} \equiv \mathbf{G}_{\alpha\beta}^{+-} \equiv \{\{\mathbf{G}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{-}.$$

Если вектор-функции имеют индексы, например, соответствующие квадрантам, являющимся их носителями вектор-функций, то для результатов факторизации обозначения вводятся по правилу, согласно которому индексы следуют за символами факторизации, то есть

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta mn}^{++} \equiv \{\mathbf{G}_{\alpha mn}^{+}\}_{\beta}^{+} \equiv \{\{\mathbf{G}_{mn}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{+},$$

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta mn}^{+-} \equiv \{\mathbf{G}_{\alpha mn}^{+}\}_{\beta}^{-} \equiv \{\{\mathbf{G}_{mn}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{+}\}_{\beta}^{-}.$$

Ниже приводятся выражения операторов, осуществляющих факторизацию в виде суммы [3]

$$\{\mathbf{G}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{+} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{G}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha > \Gamma_1,$$

$$\{\mathbf{G}(\alpha, \beta)\}_{\alpha}^{-} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{G}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha < \Gamma_1.$$

Неравенства, следующие за интегральными выражениями, указывают на расположение

параметра α выше контура Γ_1 (первый случай) или ниже контура Γ_1 (второй случай). Факторизация матриц-функций в виде произведения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha, \beta) &= \mathbf{K}_{+\alpha}(\alpha, \beta) \mathbf{K}_{-\alpha}(\alpha, \beta), \\ \mathbf{K}(\alpha, \beta) &= \mathbf{K}_{+\beta}(\alpha, \beta) \mathbf{K}_{-\beta}(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Метод факторизации матриц-функций намного сложнее. Подходы к факторизации разработаны и изложены в [6] для широкого спектра матриц-функций. Треугольные и функционально-коммутативные матрицы-функции можно факторизовать по известным формулам. Так, если матрицы-функции оказываются функционально-коммутативными по первому параметру, то есть $\mathbf{K}(\alpha, \beta) \mathbf{K}(\gamma, \beta) = \mathbf{K}(\gamma, \beta) \mathbf{K}(\alpha, \beta)$, то применив функции логарифма от матриц-функций, можно факторизовать их по формулам [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha, \beta)_{+\alpha}(\alpha, \beta) &= \\ &= \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln \mathbf{K}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha > \Gamma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha, \beta)_{-\alpha}(\alpha, \beta) &= \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln \mathbf{K}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi \right), \quad \alpha < \Gamma_1. \end{aligned}$$

Другие условия, налагаемые на матрицы-функции при применении формул факторизации в виде суммы или произведения достаточно подробно описаны в литературе, например, в [5, 6] и здесь не приводятся.

3. Метод блочного элемента для системы интегральных уравнений

Исследование системы интегральных уравнений (1.1) осуществляем традиционным для интегрального метода факторизации подходом [6, 8, 11]. Для этого эквивалентно погружаем систему интегральных уравнений в компактное топологическое пространства аналитических многообразий, а попросту пополняем его новыми неизвестными функциями, чтобы покрыть всю плоскость, гомеоморфную сфере, и применим двойное преобразование Фурье. Для этого запишем систему (1.1)

в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta) \mathbf{Q}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta &= \\ &= \mathbf{f}(x, y) + \varphi_{12}(x, y) + \varphi_{21}(x, y) + \\ &\quad + \varphi_{22}(x, y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь введенная неизвестная вектор-функция $\varphi_{12}(x, y)$ имеет носитель во втором квадранте, $\varphi_{21}(x, y)$ — в четвертом, $\varphi_{22}(x, y)$ — в третьем.

После применения преобразования Фурье продолженная система интегральных уравнений (3.1) принимает, с учетом сказанного в первом пункте, вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha, \beta) \mathbf{Q}(\alpha, \beta) - \Phi_{12}(\alpha, \beta) - \Phi_{21}(\alpha, \beta) - \\ - \Phi_{22}(\alpha, \beta) - \mathbf{F}(\alpha, \beta) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, получено некоторое соотношение аналитических многообразий и задача состоит в том, чтобы, приравнявая нулю совокупности однотипных компонент этих многообразий, построить соотношения, позволяющие получить решение $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ системы интегральных уравнений. Инструментом для решения этой задачи является факторизация, позволяющая выявлять однотипные компоненты. Осуществляя комплекс действий с использованием соотношений факторизаций (2.1), (2.2), получаем основной результат исследования, состоящий в том, что решение $\mathbf{q}(x, y)$ интегрального уравнения представимо в форме

$$\mathbf{q}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{Q}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta,$$

где функция $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ имеет вытекающий из (3.2) вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\alpha, \beta) &= \mathbf{K}^{-1}(\alpha, \beta) \left[\mathbf{F}(\alpha, \beta) + \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}(\alpha, \beta) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}(\alpha, \beta) + \Phi_{\alpha\beta 22}^{--}(\alpha, \beta) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функции $\Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}(\alpha, \beta)$, $\Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}(\alpha, \beta)$ находятся из системы двух одномерных интегральных уравнений, аналогичных получаемым для полюсового штампа [6, 8, 9]

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} + \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{+} &= \\ &= - \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \mathbf{F}(\alpha, \beta) \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{+}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} + \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{+} = \\ = - \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \mathbf{F}(\alpha, \beta) \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{+}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

После этого вектор-функция $\Phi_{\alpha\beta 22}^{--}(\alpha, \beta)$ берется в одной из эквивалентных форм и выражается через найденные функции

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\alpha 22}^{--} &= - \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \mathbf{F}(\alpha, \beta) \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{-} - \\ &\quad - \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{-}, \\ \Phi_{\alpha\beta 22}^{--} &= - \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \mathbf{F}(\alpha, \beta) \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{-} - \\ &\quad - \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{-}. \end{aligned}$$

Приведенные формулы с учетом интегралов факторизации создают видимость сложности вычислений интегралов, требуемых для решения системы уравнений и нахождения неизвестных функций. Однако во многих смешанных граничных задачах участвующие в представлении решений функции являются мероморфными, что позволяет методом теории вычетов осуществлять вычисление интегралов. Более того, в результате вычислений интегралов получаются системы линейных алгебраических уравнений, доступные для численного решения, если известны нули и полюса мероморфных функций, аналогичные изученным в [6, 8, 9].

4. Исследование свойств решения системы интегральных уравнений и граничной задачи

Предположив, что имеют место характерные свойства поведения символа $\mathbf{K}(\alpha, \beta)$ системы интегральных уравнений многих граничных задач для многослойной изотропной или анизотропной среды и контакта штампа с трением или без него в виде

$$\mathbf{K}_{-\alpha}(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-\theta_1}),$$

$$\mathbf{K}_{-\beta}(\alpha, \beta) = O(\alpha^{-\theta_2}),$$

$$0 < \theta_m < 1, \quad |\alpha| \rightarrow \infty$$

и приняв, что абсолютно суммируемая в первом квадранте функция $\mathbf{f}(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема, получаем, что оператор системы (3.4), (3.5) ограничен в пространстве функций, непрерывных с некоторым степенным весом на контурах Γ_m , $m = 1, 2$ [6].

Это позволяет исследовать свойства решения системы интегральных уравнений в первом блоке – первом квадранте и поведение поверхности в остальных блоках – квадрантах. Покажем, что построенное решение обладает характерными свойствами, присущими решениям контактных задач, полученными в более простых областях, которые аналогичны зонам рассматриваемого квадранта. Такими зонами можно назвать зону, удаленную от границ области контакта и зоны на границе области контакта.

1. Перепишем соотношение (3.3) в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, y) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{-1}(\alpha, \beta) \left[F(\alpha, \beta) + \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-}(\alpha, \beta) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-}(\alpha, \beta) + \Phi_{\alpha\beta 22}^{--}(\alpha, \beta) \right] e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

$$0 < x, y < \infty.$$

Устремив в правой части x и y к бесконечности в окрестности биссектрисы угла первого квадранта, в силу теоремы Римана–Лебега для интегралов Фурье приходим к оценке

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, y) &\approx \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{-1}(\alpha, \beta) \mathbf{F}(\alpha, \beta) \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \right) [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Таким образом, вдали от границ решение интегрального уравнения стремится к вырожденному, которое дается решением уравнения свертки в предположении, что уравнение задано во всей плоскости [6].

2. Для исследования свойств решения на границах штампа, используя приведенные выше формулы факторизации и формулы представления операторов системы уравне-

ний (3.4), (3.5), имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} + \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{+} = \\ = - \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \mathbf{F}(\alpha, \beta) \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{+}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} \right\}_{\alpha}^{-} = \mathbf{G}_{\alpha}^{-}(\alpha, \xi),$$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{+} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}_{-\alpha}(\alpha, \xi) \frac{\mathbf{G}_{\alpha}^{-}(\alpha, \xi)}{\xi - \beta} d\xi = O(\alpha^{-\theta_1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{-1}(\alpha, \beta) \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{+} = \\ = O(\alpha^{1-\theta_1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, y) \sim \\ \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \mathbf{K}^{-1}(\alpha, \beta) \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha} \left\{ \mathbf{K}_{-\alpha}^{-1} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} \right\}_{\alpha}^{-} \right\}_{\beta}^{+} \times \\ \times e^{-i\alpha x} d\alpha = O(x^{-\theta_1}), \\ x \rightarrow 0, \quad y > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta 21}^{+-} + \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{+} = \\ = - \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \mathbf{F}(\alpha, \beta) \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{+}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} \right\}_{\beta}^{-} = \mathbf{G}_{\beta}^{-}(\xi, \beta)m$$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{+} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \mathbf{K}_{-\beta}(\xi, \beta) \frac{\mathbf{G}_{\beta}^{-}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi = O(\beta^{-\theta_2}), \\ \alpha > \Gamma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{-1}(\alpha, \beta) \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{+} = \\ = O(\beta^{1-\theta_2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, y) \sim \\ \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{-1}(\alpha, \beta) \left\{ \mathbf{K}_{-\beta} \left\{ \mathbf{K}_{-\beta}^{-1} \Phi_{\beta\alpha 12}^{+-} \right\}_{\beta}^{-} \right\}_{\alpha}^{+} \times \\ \times e^{-i\beta y} d\beta = O(y^{-\theta_2}), \\ y \rightarrow 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что на границах клиновидного штампа имеет место неограниченный рост контактных напряжений, детально исследованных для разных условий контакта штампа со средой в [9, 12].

В этих же работах изучено поведение контактных напряжений в окрестности угловой точки штампа, которое описывается формулой $(x^2 + y^2)^{-0,5\gamma}$, $x, y \rightarrow 0$.

3. Исследование свойств решения смешанной граничной задачи на поверхности вне штампа осуществляется оценкой поведения функций в остальных блоках. Для этого используются следующие построения

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(x, y) \sim \\ \sim \frac{1}{8\pi^3 i} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{-\alpha}(\alpha, \xi) \frac{\mathbf{G}_{\alpha}^{-}(\alpha, \xi)}{\xi - \beta} d\xi \times \\ \times e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{-\alpha}(\alpha, \xi) = \sum_n \frac{\mathbf{C}_n(\xi)}{\alpha - \alpha_n(\xi)}, \quad \text{Im } \alpha_n \geq 0,$$

$$\varphi_{12}(x, y) = O(e^{-i\alpha_{n0}x}),$$

$$\text{Re}(-i\alpha_{n0}) \geq 0, \quad \text{Im}(-i\alpha_{n0}) \leq 0,$$

$$-\infty < x < 0, \quad y > 0, \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(x, y) \sim \\ \sim \frac{1}{8\pi^3 i} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{-\beta}(\xi, \beta) \frac{\mathbf{G}_{\beta}^{-}(\xi, \beta)}{\xi - \alpha} d\xi \times \\ \times e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{-\beta}(\xi, \beta) = \sum_n \frac{\mathbf{S}_n(\xi)}{\beta - \beta_n(\xi)}, \quad \text{Im } \beta_n \geq 0,$$

$$\varphi_{21}(x, y) = O(e^{-i\beta_{n0}y}),$$

$$\text{Re}(-i\beta_{n0}) \geq 0, \quad \text{Im}(-i\beta_{n0}) \leq 0,$$

$$-\infty < y < 0, \quad x > 0, \quad y \rightarrow -\infty.$$

Из полученных оценок вытекает следующее. Если рассматривается статическая граничная задача, то во втором и четвертом квадрантах при вдавливании штампа положение поверхности экспоненциально стремится к невозмущенному состоянию при удалении от границ первого квадранта в бесконечности второго и четвертого. В случае динамической граничной задачи о вибрации штампа во втором и четвертом квадрантах возникают волны, уходящие от границ штампа на бесконечность с фазовыми скоростями $-\omega\alpha_{n0}^{-1}$ и $-\omega\beta_{n0}^{-1}$ соответственно, для случаев $\text{Im } \alpha_{n0} = \text{Im } \beta_{n0} = 0$ и нормального материала среды, то есть для случаев совпадения направлений групповых и фазовых скоростей. Для остальных, комплексных, полюсов мероморфных функций добавок к убегаящим волнам экспоненциально стремится к нулю при удалении координат на бесконечность. В третьем квадранте при $x, y \rightarrow -\infty$ присутствуют оба типа описанных волн.

Литература

1. Wiener N., Hopf E. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. S. B. Preuss. Acad. Wiss. 1932. P. 696–706.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Издательство АН Армянской ССР, 1990. 320 с.
3. Манжиров А.В. Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел. В монографии «Механика контактного взаимодействия» / Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. С. 549–565.
4. Манжиров А.В. Контактные задачи о взаимодействии вязкоупругих оснований, подверженных старению, с системами неодновременно прикладываемых штампов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 670–685.
5. Нобл Б. Метод Винера–Хопфа. М.: Издательство Иностранная литература, 1962. 280 с.
6. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
7. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одной смешанной задаче для уравнения теплопроводности в полуограниченной области // Журнал прикладной механики и технической физики, 2015, № 6. С. 31–37.
8. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

9. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
10. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Метод блочного элемента для интегральных уравнений контактных задач в клиновидной области // Журнал прикладной механики и технической физики. 2017. Т. 58, № 2. С. 133–140.
11. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.
12. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Об особенностях поля упругих напряжений в окрестности вершины клиновидной пространственной трещины // МТТ. 1992. № 4. С. 82–88.

References

1. Wiener N., Hopf E. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. S.B. Preuss. Acad. Wiss, 1932, pp. 696–706.
2. Arutyunyan N.Kh., Manzhirrov A.V. *Kontaknyye zadachi teorii polzuchesti* [Contact problems of the theory of creep]. Erevan, Izdatel'stvo AN Armyanskoy SSR, 1990, 320 p. (In Russian)
3. Manzhirrov A.V. *Kontaknyye zadachi dlya neodnorodnykh stareyushchikh vyazkouprugikh tel* [Contact problems for inhomogeneous aging viscoelastic bodies]. In Vorovich I.I., Aleksandrov V.M. (eds.) *Mekhanika kontakt'nogo vzaimodeystviya* [Mechanics of contact interaction], Moscow, Fizmatlit Pub., 2001, pp. 549–565. (In Russian)
4. Manzhirrov A.V. *Kontaknyye zadachi o vzaimodeystvii vyazkouprugikh osnovaniy, podverzhennykh starenuyu, s sistemami neodnovenno prikladnyvaemykh shtampov* [Contact problems on the interaction of viscoelastic bases subject to aging with systems of non-simultaneously applied dies]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1987, vol. 51, iss. 4, pp. 670–685. (In Russian)
5. Nobl B. *Metod Vinera–Khopfa* [Method Wiener–Hopf]. Moscow, Izdatel'stvo Inostrannaya literatura Pub., 1962, 280 p. (In Russian)
6. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Pub., 1979, 320 p. (In Russian)
7. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. *Ob odnoy smeshannoy zadache dlya uravneniya teploprovodnosti v poluogranichennoy oblasti* [On a mixed problem for the heat equation in a semibounded region]. *Zhurnal prikladnoy mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki* [J. of Applied Mechanics and Technical Physics], 2015, no. 6, pp. 31–37. (In Russian)

8. Babeshko V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of the theory of elasticity]. Moscow, Nauka Pub., 1984, 256 p. (In Russian)
9. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineynno-uprugikh sred* [Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media]. Moscow, Nauka Pub., 1989, 344 p. (In Russian)
10. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Metod blochnogo elementa dlya integral'nykh uravneniy kontaktnykh zadach v klinovidnoy oblasti [The block element method for integral equations of contact problems in the wedge-shaped domain]. *Zhurnal prikladnoy mekhaniki i tekhnicheskoy fiziki* [J. of Applied Mechanics and Technical Physics], 2017, vol. 58, no. 2, pp. 133–140. (In Russian)
11. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Ob integral'nom i differentsial'nom metodakh faktorizatsii [On integral and differential methods of factorization]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 2, pp. 168–172. (In Russian)
12. Glushkov E.V., Glushkova N.V. Ob osobennostyakh polya uprugikh napryazheniy v okrestnosti verшины klinovidnoy prostranstvennoy treshchiny [On the singularities of the field of elastic stresses in the vicinity of the vertex of a wedge-shaped spatial crack]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of a rigid body], 1992, no. 4, pp. 82–88. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2017

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Телятников И. С., Елецкий Ю. Б., Уафа С. Б., 2017

Статья поступила 18 июня 2017 г.