Механика

УДК 539.3

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ В МЕТОДЕ ФАКТОРИЗАЦИИ[1]

В. А. Бабешко[2], ***О. М. Бабешко***[3]

ON SOLUTIONS REPRESENTATION IN FACTORIZATION METHOD

Babeshko V. A., Babeshko O. M.

The double factorization method is developed as applied to boundary-value problems for sets of differential equations in partial derivatives of any finite order with constant factors. The study is carried out in arbitrary convex domains with a smooth boundary. Application of the factorization method makes it possible to write out its solution representation, to study quantitative properties of the solutions, and to use different strategies while formulating boundary-value problems irrespective of the fact whether the resolvability of the problem has been proved a priori. The latter is the advantage of factorization method compared with numerical methods. Unlike methods of boundary and finite elements, a method of fundamental solutions, differential methods, the factorization method makes it possible to identify multivariate multi-parameter singular and bifurcation multitudes of boundary-value problems when the problem is a result of linearization of nonlinear problems in seismology.

Изложенный в [1] подход предварительного сведения дифференциальных уравнений краевых задач к системам дифференциальных уравнений первого порядка удобен для исследовательских целей. Однако при практическом использовании метода более приемлемым является сохранение или даже, если это удается, сокращение количества уравнений в системе, что ведет к повышению порядка производных в дифференциальных уравнениях краевых задач. В связи с этим применительно к указанным системам приводится метод двойной факторизации. Излагаются особенности удовлетворения граничных условий в таких задачах и связь метода с интегральными преобразованиями. Показано, что метод интегральных преобразований является упрощенным фрагментом метода факторизации, применимым лишь к частным формам областей. Детализируются пути применения метода в приложениях, обсуждаются его достоинства и недостатки.

1. Рассматривается краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Ради простоты считаем, что Ω — односвязная выпуклая область.

Используя принятые в работе [1] обозначения, представим дифференциальные урав-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (03-01-00694, 05-01-00902), РФФИ р2003юг (03-01-96537, 03-01-96527, 03-01-96519, 03-01-96584), гранта Президента РФ (НШ-2107.2003), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН, программы «Университеты России» (УР.04.01.102).

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии.

[3]Бабешко Ольга Мефодиевна, канд. хим. наук, заведующая отделом Государственного научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском государственном университете.

нения в частных производных произвольного порядка в форме

$$\mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{g},$$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\varphi_{p,x_1x_2x_3}^{(m)(n)(k)} = g_s, \qquad (1)$$

$$A_{sqmnk} = \mathrm{const},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_s\}, \quad \mathbf{g} = \{g_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, P.$$

Пусть P дифференциальных уравнений связывают P неизвестных функций и имеют конечный порядок частных производных. При этом не делается никаких предположений относительно коэффициентов, кроме того, что они должны быть постоянными, или зависеть от свободных параметров, например, параметра преобразования Лапласа по времени, если исходной была задача Коши. Считаем, что определитель системы, составленный из коэффициентов при старших производных, не есть тождественный нуль.

Граничные условия связывают предельные значения неизвестных и их частных производных, порядок которых ниже порядков дифференциальных уравнений, на $\partial\Omega$. Количество граничных условий меньше числа неизвестных, умноженных на порядок старшей производной дифференциальных уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P} B_{spmnk}\varphi_{p,x_1x_2x_3}^{(m)(n)(k)} = g_{0,s}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{g}_0 = \{g_{0,s}\}, \quad s < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K.$$

Предполагаем, что матрица непрерывных коэффициентов B_{spmnk}, зависящих от точек границы, имеет минор, отличный от нуля на всей границе $\partial\Omega$.

Решение $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_m\}$ и заданные функции g_s, $g_{0,s}$ считаем принадлежащими некоторым пространствам $\mathbf{H}_\lambda$, введенным в [3, 4].

Заметим, что исследуется общая постановка пространственной краевой задачи, подобная постановкам краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на отрезке. Метод факторизации позволяет рассматривать краевые задачи в такой постановке. Здесь используются обозначения, принятые в работах [3, 4]. Как и в указанных работах, предполагается, что введенная топология индуцирована эвклидовой метрикой исходной системы координат.

Введем в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\omega}$, компонентами которого являются внешние формы вида

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, P;$$

$$\omega_s = P_{12s}\, dx_1 \Lambda dx_2 + P_{13s} dx_1 \Lambda dx_3 + \\ + P_{23s} dx_2 \Lambda dx_3,$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \\ \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

$$P_{12s} = \\ = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\,(-i\alpha_1)^m\,(-i\alpha_2)^n \times \\ \times \sum_{p_3=1}^{k} (-i\alpha_3)^{p_3-1}\,\varphi_{px_3}^{(k-p_3)} e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle},$$

$$P_{13s} = \\ = -\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\Big\{(-i\alpha_1)^m(-i\alpha_3)^k \times \\ \times \sum_{p_2=1}^{n} (-i\alpha_2)^{p_2-1}\varphi_{px_2}^{(n-p_2)} e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle} - (-i\alpha_1)^m \times \\ \times \sum_{p_2=1}^{n}\sum_{p_3=1}^{k} (-i\alpha_2)^{p_2-1}(-i\alpha_3)^{p_3-1} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varphi_{x_2x_3}^{(n-p_2),(k-p_3)} e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\right)\Big\},$$

$$P_{23s} = \\ = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\Big\{(-i\alpha_2)^n(-i\alpha_3)^k \times \\ \times \sum_{s_1=1}^{m}(-i\alpha_1)^{(s_1-1)}\varphi_{px_1}^{(m-s_1)}e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle} + \\ + (-i\alpha_2)^n \sum_{s_1=1}^{m}\sum_{p_3=1}^{k}(-i\alpha_1)^{(s_1-1)}(-i\alpha_3)^{(p_3-1)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varphi_{px_1x_3}^{(m-s_1),(k-p_3)}e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\right) + \\ + (-i\alpha_3)^k \sum_{s_1=1}^{m}\sum_{s_2=1}^{n}(-i\alpha_1)^{(s_1-1)}(-i\alpha_2)^{(s_2-1)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varphi_{px_1x_2}^{(m-s_1),(n-s_2)}e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\right) + \\ + \sum_{s_1=1}^{m}\sum_{s_2=1}^{n}\sum_{s_3=1}^{k}(-i\alpha_1)^{(s_1-1)}(-i\alpha_2)^{(s_2-1)} \times \\ \times (-i\alpha_3)^{(s_3-1)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varphi_{px_1x_2x_3}^{(m-s_1),(n-s_2),(k-s_3)}e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\right)\Big\};$$

Используя преобразования, описанные в работах [1, 2], соотношения (1) можно представить в эквивалентной форме

$$\sum_{m=1}^{P} k_{nm}(\boldsymbol{\alpha})\Phi_m(\boldsymbol{\alpha}) = \\ = -G_n(\boldsymbol{\alpha}) + \iint_{\partial\Omega}\omega_n(\boldsymbol{\alpha}), \\ n = 1, 2, \ldots, P,$$

$$-\mathbf{K}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) \equiv \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) = \|k_{nm}(\boldsymbol{\alpha})\|,$$

$$G_n(\boldsymbol{\alpha}) = \iiint_{\Omega} g_n(\mathbf{x})e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\,d\mathbf{x} \equiv Fg_n,$$

$$\Phi_m = F\varphi_m.$$

Здесь и далее сохранены обозначения, принятые в [1, 2].

Эту систему можно представить в виде

$$\mathbf{K\Phi} = -\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) + \iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{\omega}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{G} = \{G_n\}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \{\Phi_m\}.$$

Таким образом, получили систему уравнений, рассмотренную в [1]. Повторяя использованный в этой работе вариант метода двойной факторизации, после выполнения всех требуемых операций приходим к построению решения исходной краевой задачи.

2. Приведем ряд результатов.

Теорема 1. Краевая задача (1) для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в произвольной выпуклой области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ эквивалентна системе двумерных псевдодифференциальных уравнений

$$\lim_{\alpha_3^\nu \to z_{s-}^\nu} \mathbf{K}^{-1}\left(\alpha_3^\nu, +\right)\left[-\mathbf{G}(\alpha_3^\nu) + \iint \boldsymbol{\omega}\right] \times \\ \times \left(\alpha_3^\nu - z_{s-}^\nu\right) = 0. \quad (4)$$

Общее решение краевой задачи в случае полупространства представимо в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(x^\nu) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)}\mathbf{T}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu) \times \\ \times \mathbf{K}_r^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu}d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu, \quad (5)$$

$$\mathbf{T}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu) = \\ = 2\pi i \lim_{\alpha_3^\nu \to z_{s+}^\nu}\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) \times \\ \times \left[-\mathbf{G}(\alpha_3^\nu) + \iint \boldsymbol{\omega}\right]\left(\alpha_3^\nu - z_{s+}^\nu\right).$$

В случае ограниченной области оно имеет вид

$$\boldsymbol{\varphi}(x^\nu) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)} \times \\ \times \left[\mathbf{T}_+(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \zeta_{s+}^\nu)\mathbf{K}_r^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)e^{-i\zeta_{s+}^\nu x_3^\nu} - \right. \\ \left. -\mathbf{T}_-(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \zeta_{s-}^\nu)\mathbf{K}_r^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)e^{-i\zeta_{s-}^\nu x_3^\nu}\right]d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu,$$

$$\left[-\mathbf{G} + \iint \boldsymbol{\omega}\right] = \mathbf{L}_+ + \mathbf{L}_-,$$

$$\mathbf{L}_\pm\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu\right)e^{-i\alpha_3^\nu x_3^\nu} \to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_3^\nu \to \pm\infty,$$

$$\mathbf{T}_{\pm}\left(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \zeta_{s\pm}^{\nu}\right) = 2\pi i \lim_{\alpha_3^{\nu} \to \zeta_{s\pm}^{\nu}} \mathbf{K}^{-1}\left(\alpha_3^{\nu}, -\right) \times \\ \times \mathbf{L}_{\pm}\left(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_3^{\nu}\right)\left(\alpha_3^{\nu} - \zeta_{s\pm}^{\nu}\right).$$

Здесь $\zeta_{s\pm}^{\nu}$ — нули знаменателя правой части последнего соотношения, в том числе $z_{s\pm}^{\nu}$, из верхней и нижней полуплоскостей соответственно. В случае кратных нулей для вычетов берутся соответствующие формулы.

Заметим, что в работе [1] приведена формула представления решения $\boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}^{\nu}\right)$ для полупространства, в [3] — для ограниченной области.

Пусть краевая задача (1) разрешима для вектор-функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, дифференцируемой в Ω, при коэффициентах граничных условий (2), непрерывных на $\partial\Omega$.

Теорема 2. Решение $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ краевой задачи является вектор-функцией, дифференцируемой в Ω и непрерывной вплоть до границы $\partial\Omega$. Производные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ являются суммой классических и обобщенных функций. Классические составляющие решения удовлетворяют системе (1) и заданным граничным условиям (2) поточечно в пространстве функций C, непрерывных на Ω, $\partial\Omega$ соответственно. Обобщенные составляющие имеют в качестве носителя границу $\partial\Omega$ и являются следствием дифференцирования «ступенчатой» вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, продолженной нулем с $\Omega \cup \partial\Omega$ на все пространство R^3.

Замечание 1. Учет граничных условий при решении методом факторизации осуществляется, как это указывалось ранее, по следующей схеме.

В выбранной точке некоторой окрестности $\partial\Omega_{\nu}$ на $\partial\Omega$ граничные условия разрешаются относительно независимых производных, число которых меньше максимального порядка производных в (1), умноженного на число уравнений. Полученные из граничных условий представления независимых производных вносятся в выражение векторов внешней формы $\boldsymbol{\omega}$ в правой части (3). Таким образом, в правой части (3) исключаются указанные независимые производные, выраженные через зависимые, а также через заданные функции $g_{0,n}$. Появляющиеся зависимые производные в правой части (3) становятся неизвестными, относительно которых должна решаться система псевдодифференциальных уравнений (4). Эта система идентична уравнениям, возникающим в теории вирусов вибропрочности, и ее можно решать известными методами [5]. Как указано в теореме 2, построенная классическая составляющая решения автоматически удовлетворяет в C дифференциальным уравнениям и заданным граничным условиям (2).

Замечание 2. Применяя формулу (5) для случая, когда областью Ω является слой или полупространство, имеем решение, совпадающее с решением, получаемым при использовании интегрального преобразования Фурье [6]. При этом система псевдодифференциальных уравнений (4) вырождается в алгебраические соотношения для нахождения неизвестных, входящих в общее решение, при удовлетворении граничных условий. Таким образом, метод интегральных преобразований Фурье является упрощенной формой метода факторизации, применимой в слоистых областях для нахождения классической составляющей решения в методе факторизации. С таким же успехом рассматриваются другие классические области: сфера, цилиндр, круг и т. д. и связанные с ними интегральные преобразования [7–10]. Метод факторизации позволяет описать области, в которых возможно применение методов интегральных преобразований (не только Фурье) как упрощенных своих вариантов. Для этого может понадобиться использование метода обобщенной факторизации [3]. Главным условием при этом является инвариантность дифференциальных форм и граничных условий представлениям соответствующих групп движений, порождаемых автоморфизмом носителя Ω на себя.

Замечание 3. Метод факторизации дает возможность выписывать представление решения краевой задачи без каких либо приближений или аппроксимаций. Он позволяет изучать качественные свойства решений и осуществлять различные стратегии в постановке краевых задач независимо от того, доказана ли априорно их разрешимость, и этим он существенно отличается от численных методов [11–14]. Наконец, решение в форме интеграла Фурье представляет большие возможности его численно-аналитического исследования, что делает метод факторизации удобным средством для изучения широкого класса задач в различных областях. В частности, метод факторизации может оказаться удобным для выявления многомерных многопараметрических особых и бифуркационных множеств краевых задач, получающихся в результате линеаризации нелинейных задач, возникающих в сейсмологии.

В опубликованных авторами работах рассматривался лишь простейший вариант возникающей проблемы исследования свойств аналитического многообразия — алгебраических функций, порождаемых нулями характеристических уравнений дифференциальных форм, а именно, коразмерности 1. В общем случае может понадобиться исследование групп гомологий аналитических многообразий в зависимости от типа характеристического уравнения. Вероятно, они позволят выявить глубокие закономерности сложных свойств в исследуемых задачах. Возможны различные расширения применения метода.

В частности, очевиден перенос метода факторизации на уравнения с переменными коэффициентами. Введение двойной факторизации облегчило исследование задач этим методом. Однако следует заметить, что, хотя двойная факторизация фактически приблизила решение краевых задач для систем дифференциальных уравнений по уровню сложности к решению одного дифференциального уравнения, тем не менее, этот аппарат остается достаточно сложным для применения и нуждается в модификации, как это было в свое время с интегральными преобразованиями [6–10].

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* К исследованию связанных краевых задач механики сплошных сред и математической физики // ДАН. 2005. Т. 400. є 2. С. 192–196.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* К исследованию краевых задач сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. є 3. С. 5–10.
3. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Исследование краевых задач с двойной факторизицей // ДАН. 2005. Т. 403. є 1. С. 163–167.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченсных областях // ДАН. 2003. Т. 392. є 6. С. 767–770.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. є 4. С. 473–477.
6. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во ИЛ, 1955. 668 с.
7. *Земанян А. Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974. 400 с.
8. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
9. *Бремерман Г. Б.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968. 276 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1970. 328 с.
11. *Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 526 с.
12. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции уравнений математической физики в приближенных решениях граничных задач. Ч. 1. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1989. 412 с.
13. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Наука, 1963. 472 с.
14. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 496 с.

Статья поступила 26 февраля 2005 г.
Кубанский государственный университет