

УДК 539.37

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ХЛОПАЮЩИХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ МЕМБРАН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ РАБОЧЕЙ СРЕДЫ

Ганеева М. С., Моисеева В. Е., Скворцова З. В.

NONLINEAR BENDING AND STABILITY OF ELLIPSOIDAL REVERSE BUCKLING
DISKS BEING UNDER THE LIQUID PRESSURE AND TEMPERATURE

Ganeeva M. S., Moiseeva V. E., Skvortsova Z. V.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan,
420111, Russia
e-mail: ganeeva@kfti.knc.ru

Abstract. The nonlinear bending and stability of reverse buckling disks have been studied. The reverse buckling disks represent the oblate ellipsoidal shells being under the pressure of the heated or cooled compressed working environment on the convex side of the shells. We have obtained the numerical results depending on the temperature of the working environment. Comparison of the studied ellipsoidal shells with the spherical segments having the same base and depth of pole under the base was also presented. It was found that the biggest critical loads are observed at low temperatures with a significant reduction of their values at elevated temperatures for oblate ellipsoidal shell under the joint action of pressure of the compressed gas and its temperature. Herein, the loads of wave formation in a parallel for all the considered values of temperature are not observed. It is shown that oblate hemi-ellipsoidal shell provides an axisymmetric form of stability loss with the opening of their central part at low temperature and at the same temperature of the loading environment. This is consistent with the operating conditions of the safety reverse buckling disks. It is shown that small changes in geometry lead to a significant change in the stress-strain state and in stability of the considered shells.

Keywords: reverse buckling disks, ellipsoidal shell, nonlinear bending, temperature, pressure.

1. Постановка задачи и метод решения

Условиям обеспечения подходящего процесса деформирования предохранительных мембран посвящены работы многих авторов [1, 2]. Процессы докритического изгиба и потери устойчивости оболочек, находящихся под действием давления среды и силовых нагрузок, усложняются при действии повышенной или пониженной температуры [3–6]. В настоящей работе представлены результаты исследования нелинейного деформирования и устойчивости сплюснутых полуэллипсоидальных оболочек, находящихся под действием температуры и давления рабочей среды взрывоопасного аппарата с точки зрения примене-

ниях их как хлопающих предохранительных мембран.

Рассматриваются нелинейный изгиб и устойчивость сплюснутой полуэллипсоидальной оболочки под действием давления сжимаемой охлажденной или нагретой рабочей среды (газа) на выпуклую поверхность оболочки. Невесомый сжимаемый газ находится в герметически закрытой емкости с жесткими стенками (рис. 1). Давление в емкости создается медленной подачей газа. Характеристики оболочки: a, b — полуоси (b — полуось, направленная вдоль оси вращения x); h — толщина. Вводятся координатные линии: меридианы $s, 0 \leq s \leq s_N$; внешняя нормаль z к срединной поверхности, $-h/2 \leq z \leq h/2$;

Ганеева Музайна Саитгареевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН; e-mail: ganeeva@kfti.knc.ru

Моисеева Валерия Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН; e-mail: ganeeva@kfti.knc.ru

Скворцова Зара Владимировна, канд. физ.-мат. наук, ученый секретарь Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН; e-mail: zara-skvortsova@yandex.ru

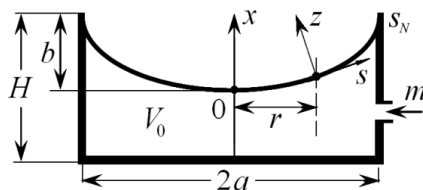


Рис. 1. Эллипсоидальная оболочка под действием давления газа

$R_1(s)$, $R_2(s)$ — главные радиусы кривизны срединной поверхности; $r = R_2 \sin(\theta)$ — радиус параллели; $0 \leq \theta \leq \theta_N$ — угол между осью вращения x и нормалью z . Характеристики газа: M_0 , V_0 , p_0 , T_0 — масса, объем, давление и температура в ненапряженном состоянии оболочки; m , V , p , T — масса дополнительно поданного в емкость газа, соответствующее изменение объема емкости, установившиеся в ней давление и температура. Температура оболочки совпадает с температурой рабочей среды.

Принимается, что давление p в емкости в процессе всего нагружения изменяется по адиабатическому закону [7]

$$p = p_0 \left((1 + m/M_0) / (1 + V/V_0) \right)^\gamma, \quad (1.1)$$

где γ — показатель адиабаты. Таким образом, в данной задаче параметром нагружения будет служить масса подаваемого в емкость газа m .

Используются соотношения термосиловой задачи теории оболочек для моментного, геометрически и физически нелинейного напряженно-деформированного состояния (НДС) при умеренных поворотах [5] под действием давления на оболочку $P = p - p_0$ и разности температур $T - T_0$. При существенном отличии рабочих температур оболочки от начальной температуры T_0 возникает необходимость учета зависимости свойств материала от действующей температуры T . При этом в соотношениях термосиловой задачи используется средний коэффициент линейного температурного расширения в интервале $[T_0, T]$ [3,8]. Выражения напряжений через деформации представляются по теории малых упругопластических деформаций [9] для сжимаемого материала, обладающего линейным упрочнением с коэффициентом упрочнения λ , модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , пределом текучести σ_S , пределом прочности σ_B , коэффициентом линейного температурного расширения α и средним

коэффициентом линейного температурного расширения $\tilde{\alpha}$. В соотношениях задачи учитывается зависимость характеристик материала от температур T_0, T

$$E = E(T), \quad \sigma_S = \sigma_S(T), \quad (1.2)$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(T_0, T).$$

У основания оболочки $s = s_N$ рассматриваются условия жесткой заделки

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_1 = 0. \quad (1.3)$$

В работах [6, 10] сформулирована нелинейная краевая задача оболочек вращения под действием температуры и давления сжимаемой среды и предложен алгоритм ее численного решения на основе пошагового процесса по параметру массы подаваемой в емкость среды m/M_0 .

Далее приводятся результаты расчетов, в которых p_0 принимается равным атмосферному давлению, $T_0 = 20$ °С. Характеристики материала оболочки представлены в табл. 1. Приняты обозначения этапов НДС: I — при малых значениях давления, II — осесимметричная потеря устойчивости, III — скачок (прохлопывание).

2. НДС полуэллипсоидальной оболочки в зависимости от уровня температуры

При вычислениях принято: $a = 100$ мм, $b = a/2$, $H = 2b$, $s_N = 121,105$ мм, $\gamma = 1,4$, $\nu = 0,3$, $\lambda = 0,9$, $h = 1$ мм, $\theta_1 = 0$, $\theta_N = \pi/2$.

В табл. 2 представлены безразмерные параметры нагрузки P/E_0 , максимальных значений прогиба w/h и интенсивности напряжений $\sigma_i/E_0 = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22})^{0,5}/E_0$ при нарастании подачи газа m/M_0 в емкость для различных температур T . Картина НДС сегмента сложна вследствие совместного действия двух основных факторов — давления рабочей среды и ее температуры. Видна значительная зависимость НДС сегмента от тем-

Таблица 1. Характеристики стали 12Х18Н10Т

T , °С	-193	-103	-70	20	300	500
$E \cdot 10^{-5}$, МПА	2,12		2,09	2,03	1,74	1,53
σ_S , МПА	448		380	250		137
σ_B , МПА	1000			660		392
$\alpha(T) \cdot 10^5$, 1/град С	0,66	1,42		1,60	1,80	2,07
$\bar{\alpha}(T_0, T) \cdot 10^5$, 1/град С	1,32	1,49		1,58	1,72	1,79

Таблица 2. НДС эллипсоидального сегмента в зависимости от уровня температуры

Этапы	T , °С	-150	-100	-50	0	20	50	100	150	200
I.	m/M_0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000
	$10^6 \cdot P/E_0$	0,001	0,001	0,001	0,001	0,349	0,001	0,001	0,001	0,001
	w/h	0,262	0,195	0,117	0,035	0,010	-0,053	-0,143	-0,234	-0,327
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	2,750	2,326	1,797	0,667	0,077	1,000	1,453	1,730	1,931
II.	m/M_0	13,60	13,00	11,90	10,10	9,446	9,200	8,900	8,500	8,200
	$10^6 \cdot P_B/E_0$	19,92	18,79	16,75	13,51	12,38	11,97	11,48	10,85	10,35
	w/h	0,825	0,745	0,649	0,466	0,477	0,393	0,391	-0,383	-0,507
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	2,285	2,406	1,859	1,678	1,735	2,058	2,505	2,789	3,018
III.	m/M_0	13,70	13,02	11,91	10,20	9,447	9,300	9,000	8,600	83,00
	$10^6 \cdot P_C/E_0$	2,222	2,179	2,092	1,949	1,886	1,860	1,811	1,757	1,706
	w/h	88,96	88,73	88,33	87,48	86,99	86,95	86,84	86,62	86,48
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	13,64	13,35	12,84	12,03	11,69	11,48	11,14	10,08	10,43
$10^3 \cdot \sigma_S/E_0$		2,091	1,954	1,720	1,371	1,231	1,198	1,139	1,081	1,023
$10^3 \cdot \sigma_B/E_0$		4,588	4,195	3,802	3,445	3,251	3,169	3,031	2,894	2,756

пературы T . Из табл. 2 видно, что при определяющем влиянии на НДС оболочки температурных напряжений (I этап) у заделанного основания возникают напряжения $\sigma_i > \sigma_S$ как при охлаждении, так и при нагреве, за исключением окрестности $T = T_0 = 20$ °С, когда НДС сегмента определяется без учета влияния температуры нагружающей среды. При $T = 20$ °С данные о НДС оболочки приведены при некотором $m/M_0 \neq 0$.

При дальнейшей подаче газа в емкость для всех рассмотренных значений температур $T \in [-150, 200]$ °С определяются верхние предельные нагрузки P_B осесимметричной потери устойчивости. Видно, что в рассмотренной задаче наибольшие критические нагрузки P_B наблюдаются в области пониженных температур со снижением их значений при повышенных температурах. Вычисления показали, что при всех рассмотренных значениях температур в данной задаче нагрузки волнообразования по параллели (точки бифуркации) не наблюдаются.

После достижения верхней критической нагрузки P_B при малейшем увеличении по-

дачи газа в емкость m/M_0 для всех рассмотренных вариантов оболочка выворачивается скачком со значительным снижением давления и увеличением прогибов и напряжений, превышающих предел прочности материала.

На рис. 2 представлены зависимости $P(w)$ в полюсе эллипсоидальной оболочки при температурах $T = -150$ °С, $T = 20$ °С и в окрестности основания оболочки $s = 102,93$ мм при температуре $T = 200$ °С. Сплошными линиями представлены результаты, полученные без учета взаимодействия оболочки с нагружающей средой (без использования закона (1.1)) при заданном изменении объема оболочки в процессе деформации [10]

$$V_{i+1} = V_i + \Delta V, \quad i = \overline{1, J}. \quad (2.1)$$

Штриховые линии соответствуют области скачка, вызванного сжимаемостью газа (1.1).

На рис. 3–5 приведены эпюры w/h и σ_i/E_0 по меридиану оболочки при нарастании параметра нагрузки P/E_0 при температуре $T = -150, 20, 200$ °С. Из рис. 3–5 видно, что при низкой и высокой температурах развитие докритических прогибов и напряжений

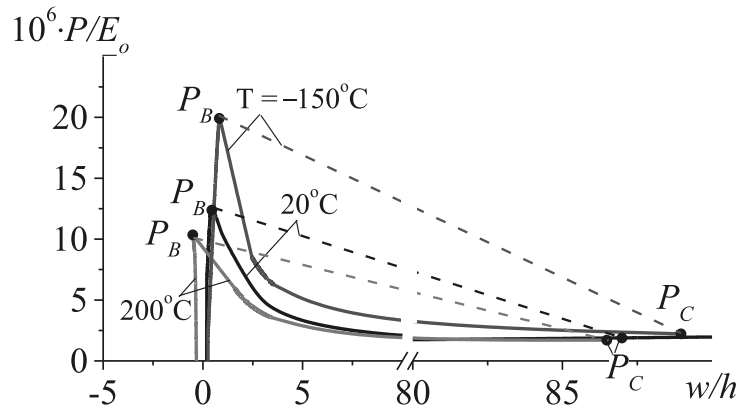


Рис. 2. Зависимости $P(w)$ при $T = -150^\circ; 20^\circ; 200^\circ \text{C}$

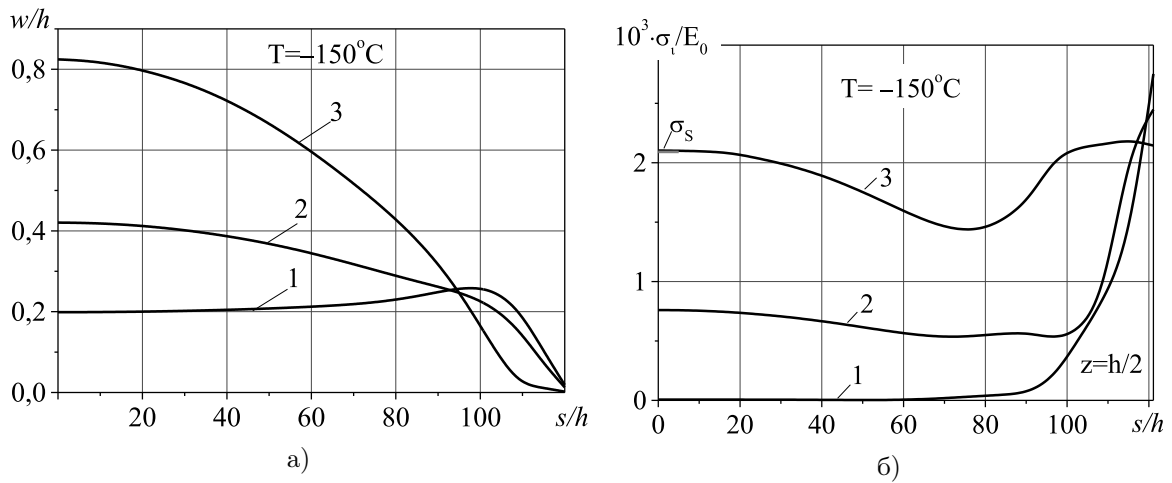


Рис. 3. 1. $P/E_0 = 0,06 \cdot 10^{-6}$; 2. $P/E_0 = 7,90 \cdot 10^{-6}$; 3. $P_B/E_0 = 19,9 \cdot 10^{-6}$

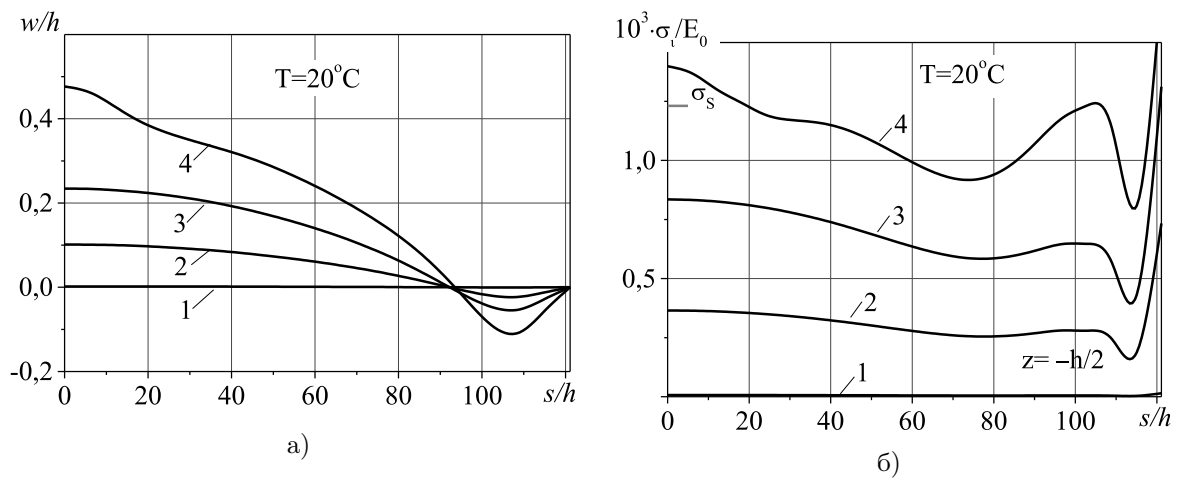


Рис. 4. 1. $P/E_0 = 0,07 \cdot 10^{-6}$; 2. $P/E_0 = 3,45 \cdot 10^{-6}$; 3. $P/E_0 = 7,92 \cdot 10^{-6}$; 4. $P_B/E_0 = 12,38 \cdot 10^{-6}$

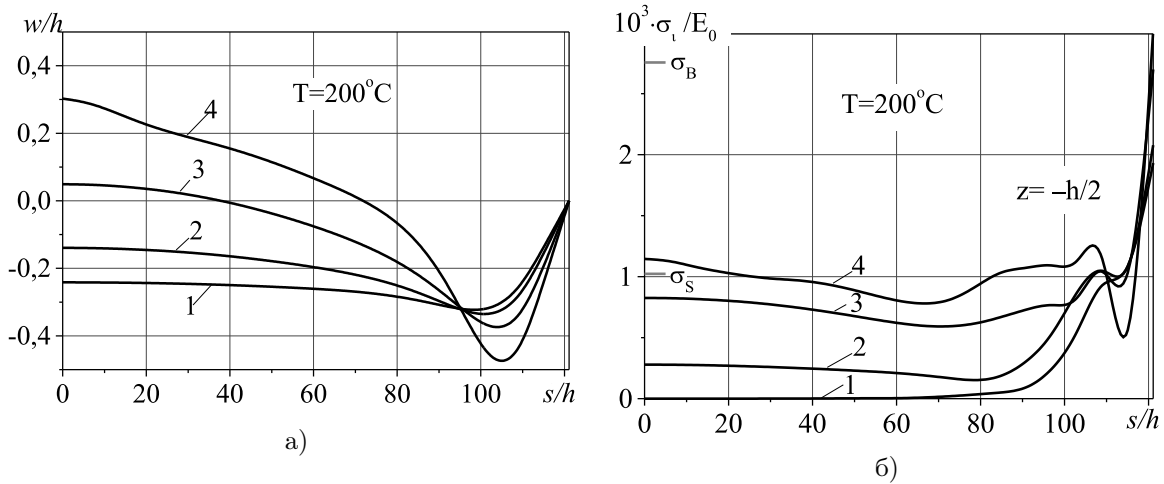


Рис. 5. 1. $P/E_0 = 0,004 \cdot 10^{-6}$; 2. $P/E_0 = 2,90 \cdot 10^{-6}$; 3. $P/E_0 = 7,80 \cdot 10^{-6}$; 4. $P_B/E_0 = 10,35 \cdot 10^{-6}$

носит различный характер. При $T = -150^\circ\text{C}$ с ростом нагружения нарастает прогиб в полюсе, что приводит к перемещению напряжений $\max_{s,z} \sigma_i/E_0$ из окрестности заделанного основания $s = s_N$ в окрестность полюса. При $T = 20^\circ, 200^\circ\text{C}$ на поверхности оболочки имеется область в окрестности основания, где прогиб всегда направлен противоположно действию давления. При отсутствии температурных напряжений ($T = T_0 = 20^\circ\text{C}$) с нарастанием давления наибольшие значения прогиба наблюдаются в окрестности полюса, а $\max_{s,z} \sigma_i/E_0$ — при $s = s_N$. При повышенной температуре $T = 200^\circ\text{C}$ $\max_s w/h$ наблюдается в окрестности основания, а $\max_{s,z} \sigma_i/E_0$ — у основания полуэллипсоидальной оболочки. Таким образом, при пониженной температуре и при неизменной температуре нагружающей среды рассматриваемая эллипсоидальная оболочка обеспечивает осесимметричную форму потери устойчивости с раскрытием её центральной части, что согласуется с условиями эксплуатации предохранительных мембран [1].

В табл. 3 дано сравнение НДС эллипсоидальной и сферической оболочек для температур $T = -150^\circ, 20^\circ, 200^\circ\text{C}$, при этом рассматривается сферический сегмент, для которого толщина h , радиус основания a , глубина полюса под основанием $H_0 = b$, характеристики материала, показатель адиабаты рабочей среды γ и граничные условия совпадают с данными для эллипсоидальной оболочки.

Вычисления показали, что для сферического сегмента при совместном действии давления рабочей среды и ее температуры определяются нагрузки P_H , при которых происходит волнообразование по параллели с числом волн k . На осесимметричной ветви решения при дальнейшей подаче газа в емкость определяются верхние предельные нагрузки P_B осесимметричной потери устойчивости. Для полуэллипсоидальной оболочки волнообразование по параллели не развивается. Из табл. 3 видно, что при всех значениях рассмотренных температур верхние предельные нагрузки осесимметричной потери устойчивости P_B выше для сферического сегмента, чем для полуэллипсоидальной оболочки. Однако деформирование сферического сегмента разовьется по неосесимметричной ветви, поскольку для него $P_H < P_B$. Такой сферический сегмент не отвечает требованиям эксплуатации предохранительных мембран, предусматривающим надежное прохлопывание мембраны без волнообразования по параллели.

Заключение

Таким образом, показано значительное влияние на НДС эллипсоидальной оболочки уровня температуры действующей среды. Установлено, что при совместном действии давления сжимаемого газа и его температуры в сплюснутых полуэллипсоидальных оболочках наибольшие критические нагрузки наблюдаются в области пониженных температур со снижением их значений при повышенных температурах. При этом для всех рассмотренных

Таблица 3. Сравнение НДС сферической и эллипсоидальной оболочек при температурах $T = -150^\circ$, 20° , 200°C

T °С		-150	20	200
Этапы деформирования		Сферический сегмент		
Неосесимметричное волнообразование по параллели	m/M_0	17,45	14,09	12,55
	$10^6 \cdot P_H/E_0$	27,81	21,02	18,18
	k	10	12	11
	w/h_0	0,613	0,256	-0,290
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	3,906	1,737	1,616
Верхняя предельная нагрузка	m/M_0	18,20	14,50	12,60
	$10^6 \cdot P_B/E_0$	29,39	21,82	18,27
	w/h_0	0,898	0,385	-0,289
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	3,936	1,854	1,613
Область скачка	m/M_0	18,30	15,00	12,80
	$10^6 \cdot P_C/E_0$	1,404	1,314	1,274
	w/h_0	114,6	114,2	113,7
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	14,58	12,97	11,77
Этапы деформирования		Полуэллипсоидальная оболочка		
Верхняя предельная нагрузка	m/M_0	13,60	9,400	8,200
	$10^6 \cdot P_B/E_0$	19,92	12,30	10,35
	w/h_0	0,825	0,424	-0,507
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	2,285	1,720	3,018
Область скачка	m/M_0	13,70	9,500	8,300
	$10^6 \cdot P_C/E_0$	2,220	1,887	1,706
	w/h_0	88,96	87,04	86,48
	$10^3 \cdot \sigma_i/E_0$	13,64	11,70	10,43
$10^3 \cdot \sigma_S/E_0$		2,091	1,231	1,023
$10^3 \cdot \sigma_B/E_0$		4,588	3,251	2,756

значений температур нагрузки волнообразования по параллели не наблюдаются. Показано, что при пониженной температуре и при неизменной температуре нагружающей среды сплюснутые полуэллипсоидальные оболочки обеспечивают осесимметричную форму потери устойчивости с раскрытием их центральной части, что согласуется с условиями эксплуатации предохранительных мембран [1]. Показано, что малые изменения в геометрии приводят к существенному изменению НДС и устойчивости рассмотренных оболочек.

Литература

1. *Ольховский Н.Е.* Предохранительные мембраны. М: Химия, 1976. 149 с.
2. *Павлов В.В., Беликов Н.В., Юдин А.С., Какурин А.М., Заньмонец Ю.М.* Устройство для изготовления хлопающих предохранительных мембран // Патент РФ на изобретение № 2353456. Опубликовано 27.04.2009. Бюл. № 12.
3. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 307 с.
4. *Thornton E. A.* Thermal buckling of plates and shells // Appl. Mech. Rev. 1993. Vol. 46. No.10. P. 485–506.
5. *Ганеева М.С.* Термосиловая задача в геометрически и физически нелинейной теории негнущих и тонких оболочек / КФТИ КФАН СССР. Казань, 1985. 126 с. Деп. в ВИНТИ 24.06.85, №4459-85Деп.
6. *Ганеева М.С., Моисеева В.Е., Скворцова З.В.* Хлопающие предохранительные мембраны под действием давления жидкости и температуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014, № 6. С. 37–44.
7. *Ильгамов М.А.* Статические задачи гидроупругости. Казань: Институт механики и машиностроения КазНИЦ РАН, 1994. 208 с.
8. *Ганеева М.С., Косолапова Л.А.* О соотношениях закона Гука в температурной задаче упругого твердого тела // Труды XVII Межд. конф. по теории оболочек и пластин. Т.1. Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1996. С. 33–

- 37.
9. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч.I. Упруго-пластические деформации. М.–Л: Гостехтеориздат, 1948. 376 с.
 10. *Ганеева М.С., Ильгамов М.А., Моисеева В.Е.* Устойчивость сферического сегмента, нагруженного давлением сжимаемой жидкости // Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сборник. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. Вып. 71. С. 71–76.
 6. *Ganeeva M.S., Moiseeva V.E., Skvortsova Z.V.* Reverse Buckling Disks under Liquid Pressure and Temperature. *J. of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 6, pp. 482-489. DOI: 10.3103/S1052618814050069
 7. *Ilgamov M.A.* *Statische zadachi gidrouprugosti* [Static Problems of Hydroelasticity]. Kazan, Ime KazSc RAS, 1994, 208 p. (In Russian)
 8. *Ganeeva M.S., Kosolapova L.A.* O sootnosheniakh zakona Guka v temperaturnoi zadache uprugogo tverdogo tela [About Hooke's Law Relations in the Temperature Problem of Elastic Solid]. *Trudy XVII Mezhd. konf. po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the XVII Int. Conf. on the Theory of Shells and Plates]. Kazan, Kazan State University Publ., 1996, vol. 1, pp. 33–37. (In Russian)
 9. *Iliushin A.A.* *Plastichnost. Ch. I. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plasticity. Part I. Elastic-plastic deformations]. Moscow, Leningrad, Gostehteorizdat Publ., 1948, 376 p. (In Russian)
 10. *Ganeeva M.S., Ilgamov M.A., Moiseeva V.E.* Ustoichivost' sfericheskogo segmenta, nagruzhennogo davleniem szhimaemoi zhidkosti [Stability of spherical segment loaded by the force of compressed liquid], *Problemy prochnosti i plastichnosti. Mezhvuzovskii sbornik* (Strength and Plasticity Problems. Interuniversity Collection of Papers), Nizhniy Novgorod, Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod, 2009, iss. 71, pp. 71–76. (In Russian)

References

1. *Olhovskij N.E.* *Predokhranitelnye membrany* [Protective Membranes]. Moscow: Chemistry Publ., 1976, 149 p. (In Russian)
2. *Pavlov V.V., Belikov N.V., Iudin A.S., Kakurin A.M., Zanimonets U.M.* Ustrojstvo dlya izgotovleniya hlopayushchih predohranitel'nyh membran [Device for the manufacture of reverse buckling disks]. Patent RF na izobrenenie № 2353456. Opublikovano 27.04.2009. Byul. No. 12. [RF patent for the invention № 2353456. Published on 27.04.2009. Bull. No. 12.] (In Russian)
3. *Kovalenko A.D.* *Osnovy termouprugosti* [Foundations of Thermoelasticity]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1970, 307 p. (In Russian)
4. *Thornton E. A.* Thermal buckling of plates and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1993, vol. 46, no. 10, pp. 485–506.
5. *Ganeeva M.C.* *Termosilovaya zadacha v geometricheski i fizicheski nelineinoi teorii netonkikh i tonkikh obolochek* [Temperature and Force Problem in Geometrically and Physically Nonlinear Theory of Thin and Non-Thin Shells]. Kazan, Kazan Physicotechn. Inst. Kazan Branch USSR