ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2017. № 2. С. 32–35

УДК 539.3

СЛОЖЕНИЕ УПАКОВАННЫХ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ ГОМЕОМОРФИЗМЫ

Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.

COMPOSITION OF THE PACKED BLOCK ELEMENTS INTO THE BLOCK STRUCTURE AND THEIR HOMEOMORPHISMS

Evdokimova O. V.*, Babeshko O. M.**, Babeshko V. A.*

* Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
** Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. Currently, the problem of building block elements of boundary problems for systems of differential equations with constant coefficients has been solved for a fairly wide range of domains. For the formation of block structures consisting of block elements with individual physical and mechanical properties, the mechanism of their conjugation is used, which is, in terms of topology, the construction of quotient topologies of topological spaces of conjugated block elements. This mechanism is described using the example of packed block elements generated by the boundary value problem for systems of linear differential equations in partial derivatives viewed as topological objects. They can be considered as manifolds with boundaries in certain spaces representing Cartesian products of topological spaces. Thus, the packed block elements are conjugated to form block structures of varying complexity. This approach is based on the methods of exterior analysis, the section of the theory of block elements, which makes it possible to build solutions of boundary problems on given carriers. The paper discusses other approaches to the application of topological methods in boundary value problems. Clear goals, approaches and opportunities of different methods are described.

Keywords: block element, topology, boundary problems methods, exterior forms, block structures, coverings.

1. В работе [1] введены упакованные блочные элементы. Упакованный блочный элемент — это точное решение граничной задачи на избранном носителе. Оно получается в результате решения псевдодифференциальных уравнений, формируемых внешними формами, порождаемыми граничной задачей. Аппарат внешней алгебры лишь позволяет построить внешние формы и не используется в преобразованиях. Применяемый процесс построения решения в теории блочного элемента назван «внешним анализом» [2].

Упакованным можно назвать такой блочный элемент, для которого решены порождаемые регуляризацией псевдодифференциальные уравнения.

Построение фактор-топологий осуществляется алгоритмами, называемыми гомеоморфизмами. Гомеоморфизмы в теории блочных элементов особенно удобны и необходимы, поскольку позволяют, выполняя конструирование в хорошо изученных пространствах из R^n, переносить их на более сложные структуры. Рассмотрим случай блочных элементов, получаемых в пересечении трехмерного слоя и бесконечной призмы, имеющей в сечении многоугольник, ось которой перпендикулярна границе слоя. Покажем, что из двух

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ, 0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323), Минобрнауки, проект 9.8753.2017/БЧ.

разнотипных соседних упакованных блочных элементов, имеющих общую грань можно построить их сопряжение и получить новый упакованный блочный элемент, готовый к сопряжению с соседними. Затем он достаточно просто переносится на более сложные граничные задачи и блочные элементы. Возьмем один из блочных элементов b с носителем Ω_b, а второй d — с носителем Ω_d. Плоские контактирующие границы двух блочных элементов обозначаются $\partial\Omega_{bd}$-для стороны, принадлежащей блочному элементу b, и $\partial\Omega_{db}$ — принадлежащей элементу d. Считаем, что при контакте границы совпадают. Рассмотрим вначале граничную задачу для одного линейного дифференциального уравнения в частных производных порядка $2r$ с граничными условиями сопряжения решений, включающими равенство на границе не только решений, но и комбинации их производных как по нормали, так и по касательной к границе, причем старшая производная имеет порядок r. Очевидно, границы перпендикулярны границам слоя. Введем декартову систему координат $ox^1x^2x^3$, направив ось ox^3 перпендикулярно границе слоя, ось ox^1 — перпендикулярно границам $\partial\Omega_{bd}$, $\partial\Omega_{db}$, оставшуюся ось — по правилу правой тройки. Обозначим $\phi_b = \phi_b(x^1, x^2, x^3)$ и $\phi_d = \phi_d(x^1, x^2, x^3)$ локальные решения оговоренной граничной задачи для каждого блочного элемента соответственно. Введенная декартова система координат индуцирует в евклидовом пространстве топологию [3–6]. Назовем открытыми множествами у носителей блочных элементов открытые шары, состоящие из внутренних точек, а также шаровые сегменты, отсекаемые от открытого шара границей, принадлежащей блочному элементу. Любое объединение таких открытых множеств остается открытым. Обозначим $P_b\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right)$ и $P_d\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right)$ точки топологических пространств $\Omega_b\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right)$ и $\Omega_d\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right)$ носителей.

Лемма 1. Носитель каждого блочного элемента является гладким многообразием с краем.

Действительно, непрерывный бесконечно дифференцируемый гомеоморфизм достигается тождественным отображением в трехмерное пространство действительных чисел R^3 точек топологического пространства путем их отождествления с декартовыми координатами, т.е. $x_b^n = x^n$, $x^n \in \Omega_b$, $x_d^n = x^n$, $x^n \in \Omega_d$, $n = 1, 2, 3$.

Для дальнейшего введем объемлющую систему координат, четвертой размерности, обозначаемую $ox^1x^2x^3\phi$, причем ось $o\phi$ перпендикулярна остальным осям. В этой системе координат блочные элементы имеют интерпретацию трехмерных пластин, а функции $\phi_b(x^1, x^2, x^3)$ и $\phi_d(x^1, x^2, x^3)$ — трехмерных оболочек. При этом границы носителей, в том числе боковые, остаются боковыми границами оболочек, что вытекает из свойства упакованных блочных элементов. Будем считать, что прямая, параллельная оси $o\phi$, для любой точки $(x^1, x^2, x^3) \in \Omega_b$ или $(x^1, x^2, x^3) \in \Omega_d$ пересекает оболочки $\phi_b(x^1, x^2, x^3)$ и $\phi_d(x^1, x^2, x^3)$ лишь один раз.

Лемма 2. На множествах $\phi_b\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right)$ и $\phi_d\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right)$ можно ввести топологию, гомеоморфную топологии носителя.

Для доказательства спроектируем параллельно оси $o\phi$ все открытые множества носителей на оболочки $\phi_b\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right)$ и $\phi_d\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right)$ и объявим построенные проекции открытыми множествами.

Следствие. Множества $\phi_b(x_b^1, x_b^2, x_b^3)$ и $\phi_d(x_d^1, x_d^2, x_d^3)$ являются многообразиями с краем.

Это следует из транзитивности выполненных отображений из топологических пространств в R^3.

В соответствии со свойствам принятой граничной задачи функции $\phi_b(x^1, x^2, x^3)$ и $\phi_d(x^1, x^2, x^3)$ имеют во внутренних точках носителей непрерывные производные до порядка $2r$.

Лемма 3. На множествах $C\partial_{x^1}^n\phi_b\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right)$ и $C\partial_{x^1}^n\phi_d\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 2r - 1$ ($C = \mathrm{const}$) можно ввести топологию, гомеоморфную топологии носителя.

2. Введем в рассмотрение граничные условия задачи на сопрягаемых границах $\partial\Omega_{bd}$ и $\partial\Omega_{db}$ Рассмотрим функции, заданные в каждом блоке, вида

$$T_{bm}\left(x^1, x^2, x^3\right) = \sum_{n=0}^{2r-1} C_{bnm}\partial_{x^1}^n\phi_b\left(x^1, x^2, x^3\right),$$

$$T_{dm}\left(x^1, x^2, x^3\right) = \sum_{n=0}^{2r-1} C_{dnm}\partial_{x^1}^n\phi_d\left(x^1, x^2, x^3\right), \tag{1}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, 2r - 1.$$

Здесь C_{bnm} и C_{dnm} — некоторые постоянные Очевидно, каждая из функций представляет фрагмент оболочки в четырехмерном пространстве

Теорема. Множества $T_{bm}\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right)$ и $T_{dm}\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right)$ являются топологическими пространствами гомеоморфными пространству носителя.

Будем считать, что условия сопряжения блоков на границах $\partial\Omega_{bd}$ и $\partial\Omega_{db}$ представляют собой достаточно общие соотношения, диктуемые физикой или математикой граничной задачи, вида

$$T_{bm}\left(x^1, x^2, x^3\right) = T_{dm}\left(x^1, x^2, x^3\right), \qquad (2)$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, 2r-1.$$

Здесь слева принято $x^1, x^2, x^3 \in \partial\Omega_{bd}$, а справа — $x^1, x^2, x^3 \in \partial\Omega_{db}$

Введем два декартовых произведения гомеоморфных топологических пространств

$$\begin{aligned} D_b\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right) = \Omega_b\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right) \times \\ \times T_{b0}\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right) \times T_{b1}\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right) \times \ldots \\ \ldots \times T_{b2r-1}\left(x_b^1, x_b^2, x_b^3\right), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_b\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right) = \Omega_d\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right) \times \\ \times T_{d0}\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right) \times T_{d1}\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right) \times \ldots \\ \ldots \times T_{d2r-1}\left(x_d^1, x_d^2, x_d^3\right). \end{aligned}$$

Построим на их основе фактор-пространство, приняв в качестве отношения эквивалентности отождествление границ $\partial\Omega_{bd}$ и $\partial\Omega_{db}$. В результате попарно в каждом топологическом пространстве отождествляется проекции границ.

Получившееся множество представляет собой новое топологическое пространство, в котором открытыми являются все внутренние, не касающиеся границы покрытия. Касающиеся границ $\partial\Omega_{bd}$ и $\partial\Omega_{db}$ и рассекаемые этими границами покрытия объединяются в одно открытое покрытие, содержащие границу, которая обеспечивает его связность в хаусдорфовом пространстве. Это покрытие является объединением открытых покрытий исходных пространств, а потому является открытым.

3. Таким образом, доказано, что упакованные блочные элементы при своем сопряжении вновь порождают упакованный блочный элемент с носителем, объединяющим исходные. Если исходные блочные элементы были однокарточными многообразиями, то новый блочный элемент будет многообразием с двухкарточным атласом. Этот результат расширяет возможности применения блочных элементов для конструирования сложных блочных структур различного применения.

Замечание. Следует отметить, что в публикуемых работах [7–17] также используются термины «топология». Настоящий подход качественно отличается от поставленных в них целей и применяемых методов.

В указанных работах исследуются вопросы гладкого топологического деформирования границ областей без целей решения граничных задач. В настоящем подходе ставится задача решения конкретных граничных задач для блочных структур с последующим применением результатов в инженерной практике.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стадиях преобразования блочных элементов // ДАН. 2016. Т.468. № 2. С. 154–158.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Внешний анализ в проблеме скрытых дефектов и прогнозе землетрясений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016, № 2. С. 19–28.
3. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 2. М.: МЦНМО, 2002. 788 с.
4. *Келли Д.* Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.
5. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Физматлит, 2004. 302 с.
6. *Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Компьютерная геометрия. М.: Академия, 2006. 512 с.
7. *Hassani B., Hinton E.* A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure // Computers and Structure. 1998. Vol. 69. P. 707–717.
8. *Hassani B., Hinton E.* A review of homogenization and topology optimization II – homogenization theory for media with periodic structure // Computers and Structure. 1998. Vol. 69. P. 719–738.
9. *Hassani B., Hinton E.* A review of homogenization and topology optimization III – homogenization theory for media with periodic structure // Computers and Structure. 1998. Vol. 69. P. 739–756.
10. *Xin Z.Q., Wu C.J.* Topology Optimization of the Caudal Fin of Thtree-Dimantional Self-

Propelled Swimming Fish // Adv. Appl. Math. Mech. 2014. Vol. 6. Iss. 6. P. 732–763.
11. *Bendsoe M.P., Sigmund O.* Topology Optimization – Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003.
12. *Bonvall T., Petersson J.* Topology optimization of fluids in stokes flow // International Journal for Numerical Methods in Fluids. Vol. 42. P. 77–107.
13. *Wachspress E.L.* A Rational Finite Element Basis. New York: Academic Press, 1975.
14. 51.El-Sabbage A., Baz A. Topology optimization of unconstrained damping treatments for plates // Engineering Optimization, 2013. Vol. 49. P. 1153–1168.
15. *Zheng W., Lei Y., Li S. et. al.* Topology optimization of passive constrained layer damping with partial coverage on plate // J. Shock and Vibration. 2013. Vol. 20. P. 199–211.
16. *Van der Veen G., Langelaar M., van Keulen F.* Integrated topology and controller optimization of motion systems in the frequency domain // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2014. Vol. 51. P. 673–685.
17. *Dahl J.J., Jensen S., Sigmund O.* Topology optimization for transient wave propagation problems in one dimension // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2008. Vol. 36. P. 585–595.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O stadiyakh preobrazovaniya blochnykh elementov [On the stages of transformation of block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2016, vol. 468, no. 2, pp. 154–158. (In Russian)
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Vneshniy analiz v probleme skrytykh defektov i prognoze zemletryaseniy [External analysis in the problem of hidden defects and the forecast of earthquakes]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 2, pp. 19–28. (In Russian)
3. Zorich V.A. *Matematicheskiy analiz. Chast' 2* [Mathematical analysis. Pt. 2]. Moscow, MTsNMO Pub., 2002, 788 p. (In Russian)
4. Kelli D. *Obshchaya topologiya* [General Topology]. Moscow, Nauka Pub., 1968, 384 p. (In Russian)
5. Mishchenko A.S., Fomenko A.T. *Kratkiy kurs differentsial'noy geometrii i topologii* [A short course of differential geometry and topology]. Moscow, Fizmatlit Pub., 2004, 302 p. (In Russian)
6. Golovanov N.N., Il'yutko D.P., Nosovskiy G.V., Fomenko A.T. Komp'yuternaya geometriya [Computer geometry]. Moscow, Akademiya Pub., 2006, 512 p. (In Russian)
7. Hassani B., Hinton E. A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structure*, 1998, vol. 69, pp. 707–717.
8. Hassani B., Hinton E. A review of homogenization and topology optimization II – homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structure*, 1998, vol. 69, pp. 719–738.
9. Hassani B., Hinton E. A review of homogenization and topology optimization III – homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structure*, 1998, vol. 69, pp. 739–756.
10. Xin Z.Q., Wu C.J. Topology Optimization of the Caudal Fin of Thtree-Dimantional Self-Propelled Swimming Fish. *Adv. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 6, iss. 6, pp. 732–763.
11. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization – Theory, Methods and Applications.* Berlin, Springer, 2003.
12. Bonvall T., Petersson J. Topology optimization of fluids in stokes flow. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 42, pp. 77–107.
13. Wachspress E.L. *A Rational Finite Element Basis*, New York, Academic Press, 1975.
14. El-Sabbage A., Baz A. Topology optimization of unconstrained damping treatments for plates // Engineering Optimization, 2013. Vol. 49. P. 1153–1168.
15. Zheng W., Lei Y., Li S. et. al. Topology optimization of passive constrained layer damping with partial coverage on plate. *J. Shock and Vibration*, 2013, vol. 20, pp. 199–211.
16. Van der Veen G., Langelaar M., van Keulen F. Integrated topology and controller optimization of motion systems in the frequency domain. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, vol. 51, pp. 673–685.
17. Dahl J.J., Jensen S., Sigmund O. Topology optimization for transient wave propagation problems in one dimension. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, vol. 36, pp. 585–595.

Статья поступила 27 июня 2017 г.