УДК 539.422.3

О РАЗНОТИПНЫХ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ЗАДАЧАХ ГЕОЭКОЛОГИИ

Зарецкая М. В., Бабешко О. М., Зарецкий А. Г., Лозовой В. В.

ON BLOCKS OF VARIOUS TYPES IN PROBLEMS OF GEOECOLOGY

Zaretskaya M. V.*, Babeshko O. M.*, Zaretskiy A. G.*, Lozovoy V. V.**

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
** Southern Scientific Centre of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: zarmv@mail.ru

Abstract. Developers should consider the model of the environment as close to natural as possible, apply a mathematical apparatus that adequately and reliably describes the processes and phenomena occurring in the environment under study, while constructing mathematical models of modern geophysical environment monitoring systems, environmental quality management and environmental management.

In this paper, we proposed a method based on a topological approach that allows one to set and solve boundary problems on the basis of equations of motion for media characterized by essentially different mechanical, chemical, rheological characteristics in different coordinate systems.

An algorithm of the differential factorization method for investigating processes in a block-structured medium has been developed, the individual blocks of which are formed by spherical boundaries (in spherical coordinates) and cylindrical boundaries (in cylindrical coordinates).

The developed methods make it possible to study a wide class of convective currents that arise in the atmosphere (modeling tornadoes), seas and oceans (cyclonic currents of various scales), geophysics; promptly assess the level of technogenic seismicity, which will reduce the seismogenic impact of modern industrial production and minimize the level of induced seismicity.

Keywords: medium, complex internal structure, topological approach, cylindrical block element, ball block element.

Развитие современных систем мониторинга геофизической среды, регулирования качества окружающей среды, рационального природопользования предполагает широкое использование средств математического моделирования. Качество разрабатываемых моделей определяется двумя факторами: во-первых, задачами, стоящими перед службами контроля, во-вторых, требованиями по уровню достоверности и адекватности применяемых моделей реально протекающим процессам.

Разработчики подобных моделей и систем сталкиваются с многочисленными проблемами, в том числе с необходимостью учитывать следующий комплекс факторов:

– исследуемая среда обладает сложной геометрией и внутренней структурой;

– объект исследования подвергается внутреннему и внешнему воздействию;

– протекающие физико-механические, химические, гидродинамические явления в значительной степени взаимосвязаны.

Применение современных вычислительных средств и численных методов не всегда позволяет успешно разрешить указанные проблемы и возникает необходимость разработки метода, дающего возможность ставить и ре-

Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Зарецкий Александр Георгиевич, студент Кубанского государственного университета; e-mail: sam_one@mail.ru

Лозовой Виктор Викторович, канд физ.-мат. наук, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ (16-08-00191_а), РФФИ и администрации Краснодарского края (16-41-230154, 16-41-230184).

шать граничные задачи на основе уравнений движения в различных системах координат для сред, характеризующихся существенно отличающимися механическими, химическими, реологическими характеристиками.

Такую возможность предоставляют топологические методы, включающие теорию блочных структур, метод блочного элемента и дифференциальный метод факторизации, разработанные для решения граничных задач для совокупности контактирующих тел с разными свойствами [1, 2]. Теория блочных структур позволяет ввести в области структуру, каждый элемент которой обладает своими специфическими характеристиками. Дифференциальный метод факторизации предназначен для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в сложных, в том числе блочных областях, в интегральном представлении.

Исследуя топологическую природу метода блочного элемента, было показано, что множество блочных элементов однозначно разрешимой в некотором пространстве $\mathbf{H}_s$ граничной задачи, рассматриваемой в области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, представляет топологическое множество с топологией, имеющей структуру топологии области Ω [3, 4].

Приведенная теорема объясняет возможность выбора в качестве носителей блочных элементов областей различной конфигурации, допускаемых принятой топологической структурой и конкретной граничной задачей. Каждый носитель блочного элемента может иметь собственную локальную систему координат, связь которой с локальными системами носителей соседних блоков регулируется картой.

Каждый элемент блочной структуры в задачах механики сплошной среды можно рассматривать как ориентированное многообразие с краем с топологий, индуцированной евклидовым пространством. Применением дифференциального метода факторизации реализуется автоморфизм топологического объекта на себя, при этом оператор краевой задачи получает отображение в изоморфное пространство преобразования Фурье или Фурье–Бесселя медленно растущих обобщенных функций. Дальнейшие преобразования этого оператора приводят вначале к функциональным, а затем — к псевдодифференциальным уравнениям. Последние, в зависимости от граничных условий, могут быть как системами интегральных уравнений традиционных контактных задач, так и интегродифференциальными уравнениями [5, 6].

Необходимость рассматривать блочные элементы в различных системах координат (декартовой, цилиндрической, сферической) возникает при решении следующих научно-практических проблем:

– в задачах оценки напряженно-деформированного состояния земной коры с полостями различной природы: шахты, штольни, угольные разрезы, пустоты после откачки углеводородного сырья, воды или выемки иных полезных ископаемых;

– при оценке напряженности на границах подземных резервуаров воды или месторождений углеводородов;

–при моделировании процессов переноса в среде сложной структуры, включающей элементы плоскопараллельного и конвективного движения.

В работах [1, 6, 7] предложена схема применения топологических методов в общем случае для граничных задач, сформулированных в декартовой системе координат. Ниже представлены варианты дифференциального метода факторизации для блочно структурированной среды, отдельные блоки которой формируются цилиндрическими или сферическими границами.

1. При решении класса задач по моделированию процессов переноса субстанций в сложно структурированной среде возможна ситуация, когда требуется провести исследование в блоке с цилиндрической границей, включенном в общую структуру среды, моделируемой, например, пространством, полупространством, слоем, прямоугольным параллелепипедом. В этом случае область рассекается плоскостями, продолжающими торцы цилиндра. Получаются три элемента структуры: слой с цилиндрическим отверстием и два полупространства. Граничные условия задаются на внешней поверхности цилиндра. Рассмотрим особенности применения топологического подхода к такой структуре.

Пусть процесс описывается дифференциальным уравнением Гельмгольца в цилиндрической системе координат r, ϕ, z

$$(\Delta + k_1^2)w = 0$$

в области Ω_1: $a \leqslant r \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant z \leqslant c_1$, $c_2 \leqslant z \leqslant \infty$.

Граничные условия задаются выражениями

$$w(a,\phi,z)=w_r,\quad c_1\leqslant z\leqslant c_2;$$

$w(r,\phi,c_1)=w_1$ и $w(r,\phi,c_2)=w_2$, $0\leqslant r\leqslant a$.

Не повторяя алгоритм дифференциального метода факторизации [1], выпишем полученные системы псевдодифференциальных уравнений

$$\mathbf{F}_1^{-1}(z)P_2(\theta_1,\sigma,b,c_1,c_2)=0,$$

$$z\in[c_1,c_2],\quad \theta_1=i\sqrt{\sigma^2-k_1^2},$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2(\theta,\sigma_-,a,c_1,c_2)\exp(-i\sigma_-c_1)=0,$$

$$r\in[a,\infty],\quad \sigma_\pm=\pm i\sqrt{\theta^2-k_1^2},\qquad (1)$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2(\theta,\sigma_+,a,c_1,c_2)\exp(-i\sigma_+c_2)=0,$$

$$r\in[a,\infty],$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2^-(\theta,\sigma_-,b,c_1,c_2)\exp(-i\sigma_-c_1)=0,$$

$$r\in[0,\infty],$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_2^+(\theta,\sigma_+,b,c_1,c_2)\exp(-i\sigma_+c_2)=0,$$

$$r\in[0,\infty],$$

где введены следующие обозначения:

$$P_2(\theta,\sigma,a,c_1,c_2)=$$

$$+\int_{c_1}^{c_2}\left[H_p^{(1)}(\theta a)\frac{\partial W_{rp}}{\partial r}-\theta\left(H_p^{(1)}(\theta a)\right)'W_{rp}\right]\times$$

$$\times\, a\exp i\sigma z dz+$$

$$+\int_a^\infty J_p(\theta r)\left[\frac{\partial W_{1p}^+}{\partial z}-i\sigma W_{1p}^+\right]r\exp i\sigma c_1 dr+$$

$$+\int_a^\infty J_p(\theta r)\left[\frac{\partial W_{2p}^+}{\partial z}-i\sigma W_{2p}^+\right]r\exp i\sigma c_2 dr;$$

$$P_2^-(\theta,\sigma,a,c_1)=$$

$$=\int_0^\infty J_p(\theta r)\Big[\frac{\partial(W_{1p}+W_{1p}^+)}{\partial z}-$$

$$i\sigma(W_{1p}+W_{1p}^+)\Big]r\exp i\sigma c_1 dr;$$

$$P_2^+(\theta,\sigma,a,c_2)=$$

$$=\int_0^\infty J_p(\theta r)\Big[\frac{\partial(W_{2p}+W_{2p}^+)}{\partial z}-$$

$$-i\sigma(W_{2p}+W_{2p}^+)\Big]r\exp i\sigma c_2 dr;$$

$$W_{\nu p}=\mathbf{B}_1(r,p,z)w_\nu;$$

$$W_{\nu p}^+=0,\quad r\leqslant a,\quad \nu=1{,}2.$$

Выполнив преобразования псевдодифференциальных уравнений, их можно свести к интегральным или интегро-дифференциальным и получить представления решений вида

$$W(r,\phi,z)=\mathbf{B}_3^{-1}(r,\phi,z)K^{-1}(\theta,\sigma)\int_{\partial\Omega_1}\omega.$$

2. При исследовании техногенной сейсмичности земной коры особый интерес для практики представляет оценка напряжений и деформаций, возникающих на границе пласта пород коры и резервуара воды или месторождения углеводородного сырья до и после выработки. Рассматривая указанную систему как блочную структуру, наиболее целесообразным представляется моделирование резервуара шаровым блочным элементом.

Рассмотрим блочный элемент в сферических координатах — вырезанную шаровую область. Согласование с соседними блоками, где постановки задач осуществляются в декартовых координатах, регулируется картой.

Построим блочные элементы для граничной задачи в пространстве с вырезанной шаровой областью Ω_2 радиуса a и границами $\partial\Omega_s$, $s=1,2$, для дифференциального уравнения Гельмгольца.

Для полупространства с шаровой полостью уравнение Гельмгольца в сферических координатах запишется в виде

$$(\Delta+k_2^2)w=0,\quad r,\theta,\phi\in\Omega_2,$$

где

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Известно, что псевдодифференциальные уравнения блочного элемента позволяют исследовать все возможные виды граничных условий для дифференциального уравнения в частных производных, поэтому далее будут рассмотрены граничные условия Дирихле и Неймана.

Решения поставленных граничных задач ищутся в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$.

Реализуем алгоритм дифференциального метода факторизации.

Введем прямое и обратное преобразования Фурье–Бесселя в сферических функциях

$$\mathbf{B}_3(\lambda,l,m)g = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\pi g(r,\theta,\phi) J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\times$$
$$\times Y_l^{m-}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi r dr = G(\lambda,l,m),$$

$$\mathbf{B}_3^{-1}(r,\theta,\phi)G = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int\limits_0^\infty G(\lambda,l,m)\times$$
$$\times J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r) Y_l^{m+}(\theta,\phi)\lambda d\lambda = g(r,\theta,\phi),$$

$$\mathbf{B}_2(l,m) =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} g(\theta,\phi) Y_l^{m-}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = G(l,m),$$

$$\mathbf{B}_2^{-1}(\theta,\phi)G =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} G(l,m) Y_l^{m+}(\theta,\phi) = g(\theta,\phi).$$

Здесь $J_\nu(\lambda r)$ — функция Бесселя; $Y_l^m(\theta,\phi)$ — сферическая функция, имеющая вид

$$Y_l^{m\pm}(\theta,\phi) =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{\pm im\phi}.$$

Применив к уравнению Гельмгольца преобразования Фурье–Бесселя, получим внешнюю форму следующего вида:

$$\omega = Pb^2\sin\theta d\theta\wedge d\phi + Qb dr\wedge d\theta + Rb\sin\theta d\phi\wedge dr$$

и функциональное уравнение для шаровой полости

$$(\lambda^2-k^2)W(l,m,\lambda) = N_{lm}(\lambda),$$

где

$$N_{lm}(\lambda) = b^2 w'_{lm}(a)P_{lm}(\lambda,a) - b^2 w_{lm}(a)P'_{lm}(\lambda,a);$$
$$w_{lm}(r) = \mathbf{B}_2(l,m)w(r,\theta,\phi);$$
$$P_{lm}(\lambda,r) = \frac{1}{\sqrt{r}} H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r);$$

$H_\nu^{(1)}(\lambda r)$ — функция Ханкеля первого рода.

Общее представление решения записывается в виде

$$w(r,\theta,\phi) = \mathbf{B}_3^{-1}(r,\theta,\phi)\frac{N_{lm}(\lambda)}{(\lambda^2-k_2^2)}. \qquad (2)$$

Выполнив требование автоморфизма многообразия с краем — пространства с удаленным шаром $w(r,\theta,\phi)=0$, $r<a$, получим псевдодифференциальное уравнение

$$w'_{lm}(a)P_{lm}(\lambda,a) - w_{lm}(a)P'_{lm}(\lambda,a) = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим граничные задачи с условиями Дирихле и Неймана.

Для граничного условия Дирихле

$$w(a,\theta,\phi) = w_0(a,\theta,\phi),$$

решение псевдодифференциального уравнения (3) представляется в форме

$$w'_{lm}(a) = \frac{w_{lm0}(a)P'_{lm}(k_2,a)}{P_{lm}(k_2,a)},$$

где введено обозначение

$$w_{lm0}(a) = \mathbf{B}_2(l,m)w_0(a,\theta,\phi).$$

Подставив это решение в (2), получаем при $r\to a$, $r>a$ следующее отношение:

$$w(r,\theta,\phi)\to w_0(a,\theta,\phi).$$

Данная сходимость имеет место при гладких граничных условиях в пространстве непрерывных функций.

Для граничного условия Неймана

$$w'(a,\theta,\phi) = w_1(a,\theta,\phi)$$

решение псевдодифференциального уравнения будет иметь вид

$$w_{lm}(a) = \frac{w'_{lm0}(a)P_{lm}(k_2,a)}{P'_{lm}(k_2,a)},$$

где $w_{lm1}(a) = \mathbf{B}_2(l,m)w_1(a,\theta,\phi)$.

Если внести это решение в (2), при $r \to a$, $r > a$, придем к сходимости для классической составляющей решения

$$w'(r, \theta, \phi) \to w_1(a, \theta, \phi).$$

Алгоритм получения систем псевдодифференциальных уравнений для поставленных граничных задач, методы решения и обозначения представлены, например, в работах [8, 9].

Следует отметить, что найденное решение граничной задачи в пространстве медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$ состоит из классической компоненты и обобщенных функций. Если исходные граничные задачи сформулированы для достаточно гладких граничных условий, классическая компонента совпадает с этим решением. Обобщенная компонента появляется только в результате дифференцирования по нормали к границе $\partial\Omega$ кусочно-гладкого носителя.

3. Полученные результаты имеют важные практические приложения. Это, прежде всего, новые наукоемкие технологии мониторинга и прогнозирования чрезвычайных ситуаций и их возможных последствий. Введение блочного элемента с цилиндрической границей и развитие дифференциального метода факторизации в цилиндрических координатах позволяет исследовать широкий класс конвективных течений, возникающих в атмосфере (моделирование смерчей), морях и океанах (циклонические течения различных масштабов), геофизике (исследование тепловой конвекции в мантии и вынужденной конвекции при субдукции литосферных плит).

Введение блочного элемента со сферической границей дает возможность рассмотреть широкий класс задач оценки наведенной сейсмичности и будет способствовать созданию и развитию системы превентивных мер для снижения риска возникновения техногенного землетрясения, позволяющей до начала производственного процесса выполнить перспективный анализ техногенных напряжений в земной коре и оценить возможность возникновения сейсмического события.

Литература

1. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Zaretskaya M.V., Pavlova A.V.* The differential factorization method for a block structure // Doklady Physics. 2009. Т. 54. № 1. С. 25-28.
2. *Бабешко В.А., Зарецкая М.В., Рядчиков И.В.* К вопросу моделирования процессов переноса в экологии, сейсмологии и их приложения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 3.С. 20 – 25.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об особенностях метода блочного элемента в нестационарных задачах // Доклады академии наук. 2011. Т. 438. № 4. С. 470–474.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О топологических структурах граничных задач в блочных элементах // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 6. С. 650–654.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // Доклады академии наук. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // Доклады академии наук. 2013.Т. 449. № 6. С.657–660.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Горшкова Е.М., Зарецкая М.В., Мухин А.С., Павлова А.В.* О конвергентных свойствах блочных элементов // Доклады академии наук. 2015. Т. 465. № 3. С. 298–301
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы с цилиндрической границей в макро- и наноструктурах // Доклады академии наук. 2011. Т. 440. № 6. С. 756–759.
9. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* The theory of the starting earthquake // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 1. Т. 2. С. 37–80.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Zaretskaya M.V., Pavlova A.V. The differential factorization method for a block structure. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, iss. 1, pp. 25–28.
2. Babeshko V.A., Zareckaya M.V., Ryadchikov I.V. K voprosu modelirovaniya processov perenosa v ehkologii, sejsmologii i ih prilozheniya [To the problem of modeling transport processes in ecology, seismology and their applications]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2008, no. 3, pp. 20–25. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob osobennostyah metoda blochnogo ehlementa v nestacionarnyh zadachah [On the features of the block element method in nonstationary problems]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2011, vol. 438, no. 4, pp. 470–474. (In Russian)
4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O topologicheskih strukturah granichnyh

zadach v blochnyh ehlementah [On topological structures of boundary value problems in block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2016, vol. 470, no. 6, pp. 650–654. (In Russian)

5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob avtomorfizme i psevdodifferencial'nyh uravneniyah v metode blochnogo elementa [On automorphism and pseudodifferential equations in the block method Element]. *Doklady akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2011, vol. 438, no. 5, pp. 623–625. (In Russian)
6. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskij metod resheniya granichnyh zadach i blochnye ehlementy [Topological method for solving boundary value problems and block elements]. *Doklady akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2013, vol. 449, no. 6, pp. 657–660. (In Russian)
7. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Gorshkova E.M., Zareckaya M.V., Muhin A.S., Pavlova A.V. O konvergentnyh svojstvah blochnyh ehlementov [Convergence properties of block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2015, vol. 465, no. 3, pp. 298–301. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Blochnye ehlementy s cilindricheskoj granicej v makro- i nanostrukturah [Block elements with a cylindrical boundary in macro- and nanostructures]. *Doklady akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2011, vol. 440, no. 6, pp. 756–759. (In Russian)
9. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The theory of the starting earthquake. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 1, iss. 2, pp. 37–80. (In Russian)

Статья поступила 22 мая 2017 г.