

УДК 51.37

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА И ПЛАНИРОВАНИИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

THE USE OF ADJOINT PROBLEMS SOLUTION IN THE IDENTIFICATION OF INPUT PARAMETERS FOR TRANSPORT MODELS AND PLANNING OF EXPERIMENTS

Kochergin V. S. , Kochergin S. V.

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia
e-mail: vskoher@gmail.com

Abstract. In the numerical identification input model transport parameters of passive admixture in the measurement data raises the question of constructing the optimal plans for performing the measurement. From a mathematical point of view, the solution of inverse problems, the optimal plan is treated as a net of measurement points distributed across space and time that gives the best conditioning of identification input parameters of numerical simulations against measurements. Computational properties of algorithms for solving inverse problems can largely be improved by optimal schemes of measurements. At the core of the algorithms for optimal planning is the creation and study of the properties of Fisher information matrix, which is based on the Jacobian matrix characterizing the admixture concentration field variation dependence of variations parameters of the problem. For example, the one-dimensional problem of the transfer of passive admixtures discusses the assessment component of this matrix by a series of adjoint tasks of a special kind. As a result of numerical experiments with the one-dimensional model of transport of passive tracer shows that the best convergence of the variational algorithm for identifying the initial field of concentration is in the selection of measurement points in the region of maximum values. This scheme of measuring net leads to improved conditioning of the problem being solved. Additional information about the location of the boundaries of the pollution are also important in the algorithm initialization the initial distribution. Similar calculations are carried out with a three-dimensional model for the Azov sea. The results can be used for solving various ecological orientation problems in the study of the sources pollution influence of anthropogenic nature in the Azov and Black seas waters.

Keywords: planning of the experiment, the model of transport of passive admixture, identification of the related task, minimization, Azov sea.

Введение

При решении задач идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси по данным измерений встает вопрос планирования экспериментов с точки зрения построения оптимальных планов. В понятие оптимальности плана можно вкладывать различный смысл — это финансовая сторона проведения экспериментальных работ, удобство их выполнения и другие аспекты. С матема-

тической точки зрения при решении обратных задач под оптимальным планом понимается сеть точек измерений, распределенных по пространству и времени, дающая наилучшую обусловленность решаемой задачи идентификации входных параметров численного моделирования по данным измерений. Вычислительные свойства алгоритмов решения обратных задач могут в значительной степени быть улучшены за счет оптимальной схемы измерений.

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskoher@gmail.com

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела морских информационных систем и технологий Морского гидрофизического института РАН; e-mail: ko4ep@mail.ru

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2014-0010 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем Черного и Азовского морей, на основе современных методов контроля состояния морской среды и гритехнологий».

1. Построение оптимального плана

В основе алгоритмов оптимального планирования [1] лежит построение и изучение свойств информационной матрицы Фишера

$$\mathbf{M}(\varepsilon_N) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i p_i \mathbf{F}_i^T, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_N = \left\{ \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_N \\ p_1, p_2, \dots, p_N \end{matrix} \right\}$ — нормированный план, $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, \mathbf{F}_i — матрица Якоби, характеризующая зависимость вариации поля концентрации примеси от вариаций тех или иных параметров задачи. Существуют специальные алгоритмы поиска оптимальных планов. Наиболее простой путь поиска оптимальной сети точек проведения измерений состоит в следующем:

- выбирается невырожденный начальный план;
- отыскивается дополнительная точка, добавление которой к плану улучшит обусловленность решаемой задачи;
- ищется наименее информативная точка плана, которая отбрасывается.

Кроме этого, можно сравнивать между собой несколько планов, априори заданных. Сравнение происходит по детерминанту матрицы (1.1), который характеризует обусловленность решаемой задачи идентификации параметров численного моделирования, что является очень важным при решении обратных задач.

2. Модель переноса пассивной примеси и вариационный алгоритм идентификации

Для простоты изложения рассмотрим одномерную модель переноса пассивной примеси

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} &= k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\ x = 0 : \frac{\partial C}{\partial x} &= 0, \\ x = X : \frac{\partial C}{\partial x} &= 0, \\ t = 0 : C(x) &= C_0(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть задача решается на $[0, T]$ и на конечный момент времени имеются данные измерений $C_{\text{изм}}$. Задача вариационной ассимиляции

производится за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза

$$I_0 = \frac{1}{2} (R(C - C_{\text{изм}}), R(C - C_{\text{изм}}))_D, \quad (2.2)$$

где D — область интегрирования модели. В одномерном случае $D = [0, X]$, скалярное произведение определено стандартным способом, а R — проекционный оператор восполнения нулями в областях, где отсутствуют данные измерений.

Умножая (1.1) на C^* , добавляя ограничения к (2.2), интегрируя по частям с учетом краевых условий, выбирая C^* как решение соответствующей сопряженной задачи из условия стационарности общего функционала I , имеем [2]

$$\nabla C_0 I = C^*. \quad (2.3)$$

Далее в направлении этого градиента осуществляется итерационный спуск в пространстве параметров.

3. Метод оценки, построение матрицы Якоби

Следуя методу сопряженных уравнений [3], задаче (1.1) можно поставить в соответствие сопряженную задачу

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C^*}{\partial t} - U \frac{\partial C^*}{\partial x} - k \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} &= 0, \\ x = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial x} &= 0, \\ x = X : \frac{\partial C^*}{\partial x} &= 0, \\ t = T : C^*(x) &= \begin{cases} 1, x \in \Omega, \\ 0, x \notin \Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где Ω — некоторая область в D . Выбрав в качестве Ω ячейку расчетной сетки [4], можно получить форму для оценки концентрации в ней

$$\bar{C} = \int_D C_0(x) C^*(x) dD. \quad (3.2)$$

Пусть $C_{\text{изм}}$ имеются в N точках, а C_0 задано в K точках. Вариацию $\frac{\partial C}{\partial C_0}$ в точках измерений можно представить в виде матрицы Якоби

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial C_0^1} & \frac{\partial C_2}{\partial C_0^1} & \dots & \frac{\partial C_N}{\partial C_0^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial C_1}{\partial C_0^K} & \frac{\partial C_2}{\partial C_0^K} & \dots & \frac{\partial C_N}{\partial C_0^K} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

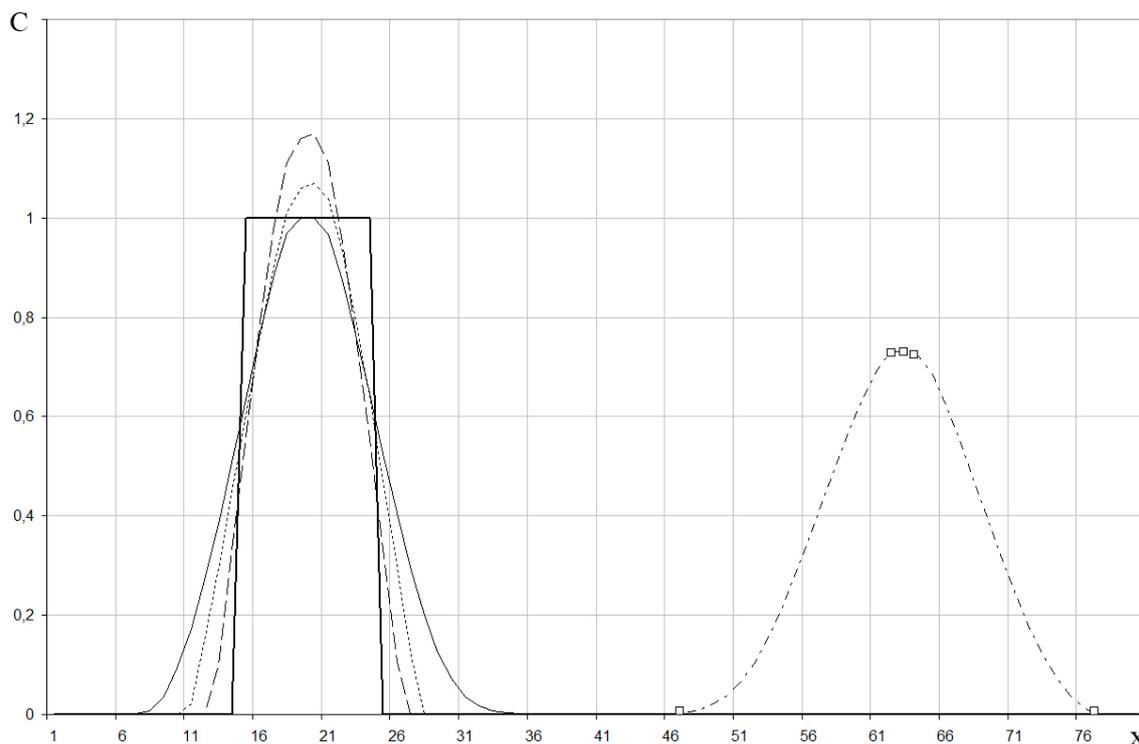


Рис. 1. Данные измерений, истинное и инициализированные начальные поля

Учитывая представление метода оценки (3.2), имеем

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} C_1^*(1) & C_2^*(1) & \dots & C_N^*(1) \\ C_1^*(2) & C_2^*(2) & \dots & C_N^*(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^*(K) & C_2^*(K) & \dots & C_N^*(K) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где $C_i^*(j)$ — решение сопряженной задачи для i -го измерения в k -й точке пространства.

4. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились с одномерной моделью переноса пассивной примеси при следующих значениях входных параметров: $k = 2,5 \cdot 10^5$ см²/с, $\Delta x = 10^5$ см, $\Delta t = 1,2 \cdot 10^2$ с, количество шагов по времени 3600, — которые соизмеримы с входной информацией при интегрировании трехмерной модели [5] для акватории Азовского моря.

В качестве начального поля концентрации задавалось постоянное значение, равное единице, в десяти точках расчетной сетки, которое изображено на рис. 1 жирной сплошной линией. Решение модели (2.1) представлено на этом же рисунке штрих-пунктирной линией. В качестве данных измерений выби-

рались значения поля концентрации как в области максимальных, так и минимальных значений (белые квадраты на рисунке). При выборе в качестве $C_{\text{изм}}$ всей доступной информации о $C(x)$ результатом работы вариационного алгоритма идентификации C_0 является поле концентрации, изображенное на рис. 1 штриховой линией. Отметим, что площадь, ограниченная этим графиком, $S = 10,007$, а при истинном значении $S = 10$. Понятно, что в реальных условиях невозможно иметь такую полную информацию о структуре поля концентрации. Поэтому в дальнейшем рассмотрим 3 точки измерений в области максимальных значений. Результат представлен на рис. 1 тонкой сплошной линией, при этом $S = 11,673$.

Восстановление такой пространственной структуры начального поля происходит за счет своеобразной экстраполяции при работе вариационной процедуры ассимиляции. С одной стороны, точки в области максимальных значений, с точки зрения построения оптимального плана измерений, наиболее информативны [6], с другой стороны, — такие измерения не обладают информацией о границе пятна загрязнения. Поэтому, выбрав в качестве измерения наибольшее значение и

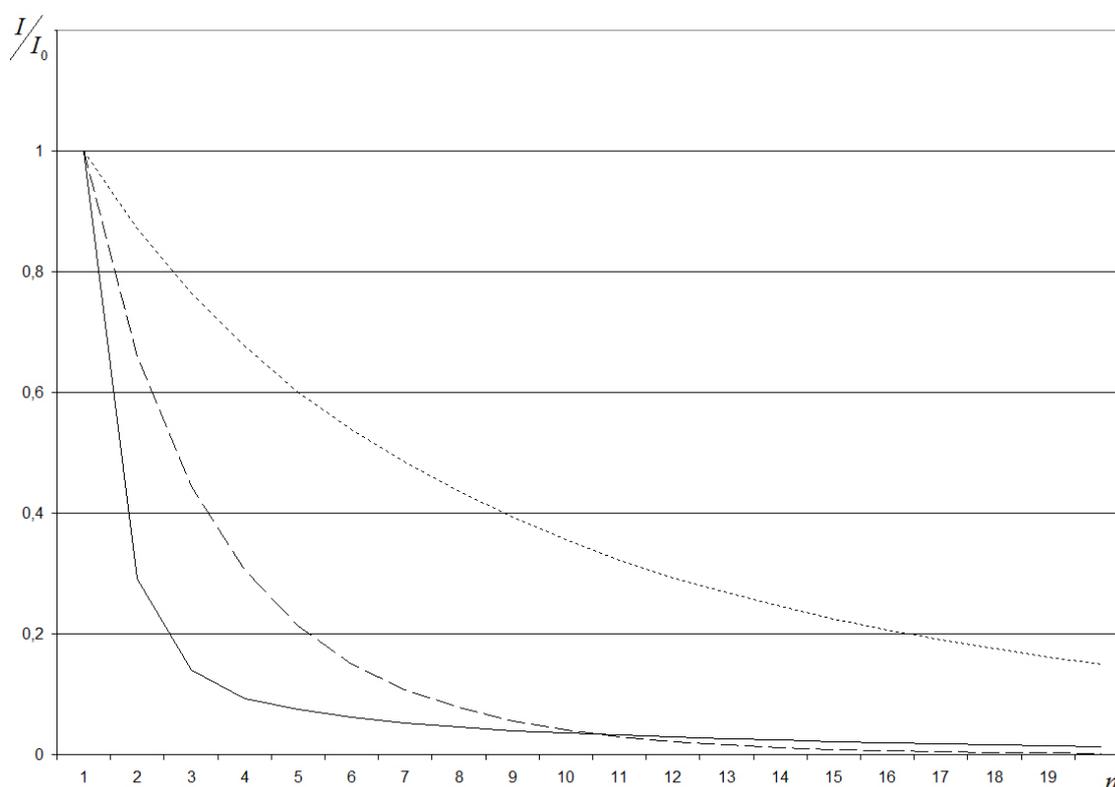


Рис. 2. Падение нормированного функционала

задав примерные границы пятна загрязнения для конечного момента времени, получим результат, изображенный на рис. 1 пунктирной линией, при этом значение $S = 10,599$. При таком плане измерений восстанавливается не только структура начального поля, но и мощность начального пятна загрязнения. Следует отметить, что с точки зрения итерационного процесса более оптимальным является первый вариант расположения трех точек измерений. Падение нормированного функционала качества прогноза изображено на рис. 2. Сплошной линией показано его падение при ассимиляции всей информации, пунктирной линией — при усвоении трех максимальных значений поля концентрации, штриховой линией изображен процесс идентификации при последнем варианте расположения точек измерений (одна в области максимума и две на границе пятна загрязнения). При этом итерационный процесс существенно замедляется и для получения результата требуется большее количество итераций. Отметим, что при небольшом количестве данных измерений и большом числе требуемых итераций возможно эффективное применение модифицированного вариационного алгоритма идентифика-

ции [7]. С точки зрения теории оптимального планирования значение детерминанта матрицы (1.1) увеличивается при задании трех измерений в области максимальных значений. Тем не менее, информация о границе пятна загрязнения оказывается очень полезной для получения других характеристик начального пятна загрязнения. В качестве такой информации при моделировании динамики определенных трассеров может служить спутниковые данные. При возможности увеличения количества точек плана, добавлять их следует в области максимальных значений.

На основе результатов, полученных для одномерной модели, проведены аналогичные расчеты с трехмерной моделью переноса пассивной примеси в Азовском море в σ -координатах [5]. На основе баротропного варианта модели были получены поля течений и коэффициенты турбулентной диффузии при восточном ветровом воздействии, которые использовались при численном моделировании переноса пассивной примеси. В качестве начального поля были заданы единичные значения от поверхности до дна в прямоугольной области, изображенной на рис. 3. С таким начальным полем было вычислено модель-

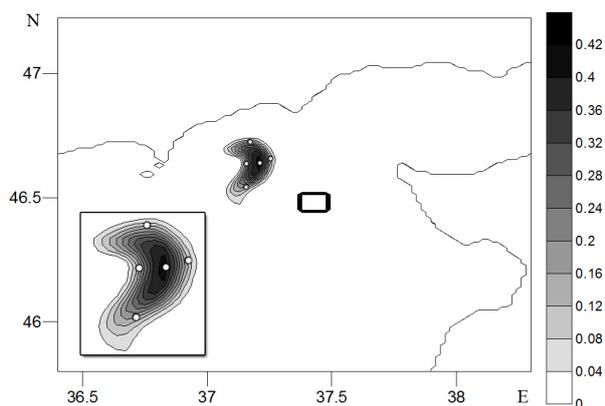


Рис. 3. Начальное и модельное поле, точки измерений

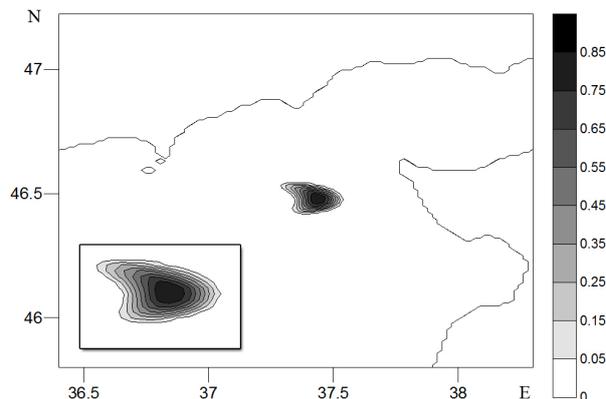


Рис. 4. Проинициализированное начальное поле

ное распределение концентрации через пять суток модельного времени. На рис. 3 также изображено поверхностное поле концентрации и его увеличенное изображение, а также белыми точками отмечены координаты данных измерений.

В результате усвоения полной информации проинициализированное начальное распределение (рис. 4) хорошо согласуется с первоначально заданным (рис. 3) как по местоположению, так и по мощности пятна загрязнения. Усвоение пяти точек в области максимальных значений приводит к некоторому увеличению площади пятна загрязнения и уменьшению концентрации в центре полученного начального поля (рис. 5).

Наиболее компактным начальное распределение концентрации получилось при ассимиляции данных измерений в области максимальных значений и в приграничных точках (рис. 6). Вариант с усвоением пяти значений концентрации в области максимальных значений более эффективен с точки зрения скорости сходимости итерационного процесса. Но задание граничных точек приводит к более компактному начальному полю, хотя для достижения минимума требуется большее количество итераций. Таким образом, при наличии информации о границе пятна загрязнения, дополнительные точки измерений необходимо добавлять в области максимальных значений. Тогда результат ассимиляции будет хорошо согласовываться с первоначально заданным и итерационный процесс поиска оптимального распределения будет обладать хорошей сходимостью.

Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Литература

1. Горский В.Г. Планирование кинетических экспериментов. М.: Наука, 1984. 240 с.
2. Пененко В.В. Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана. Метеорология и гидрология. 1979. №7. С. 77–90.
3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
4. Кочергин В.С. Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа, МГИ НАНУ, Севастополь, 2011. Вып. 25, т. 2. С. 270–376.
5. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.
6. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002. 238 с.
7. Кочергин В.С., Кочергин С.В. Реализация вариационного подхода при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси в Азовском море // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016, №3. С. 50–58.

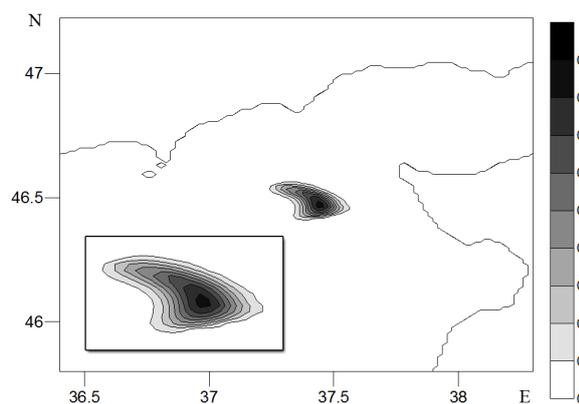


Рис. 5. Проинициализированное начальное поле

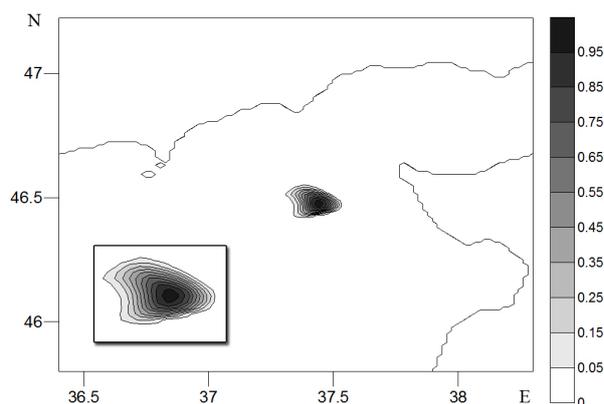


Рис. 6. Проинициализированное начальное поле

References

1. Gorskiy V.G. *Planirovanie kineticheskikh eksperimentov* [Planning kinetic experiments]. Moscow, Nauka Pub., 1984, 240 p.
2. Penenko V.V. Otsenka parametrov diskretnykh modeley dinamiki atmosfery i okeana [Estimation of parameters of discrete models of atmospheric and ocean dynamics]. *Meteorologiya i gidrologiya* [Meteorology and Hydrology], 1979, no. 7, pp. 77–90.
3. Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy* [Mathematical modeling in the environmental problem]. Moscow, Nauka Pub., 1982, 320 p.
4. Kochergin V.S. Opredelenie polya kontsentratsii passivnoy primesi po nachal'nym dannym na osnove resheniya sopryazhennykh zadach [Determination of the passive admixture concentration field from the initial data on the basis of the solution of the conjugate problems]. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoy i shel'fovoy zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* [Ecological safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources], MGI NANU, Sevastopol' 2011, iss. 25, vol. 2, pp. 270–376.
5. Ivanov V.A., Fomin V.V. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v zone more – susha* [Mathematical modeling of dynamic processes in the sea-land zone]. Sevastopol', EHKOSI-gidrofizika, 2008, 363 p.
6. Ereemeev V.N., Kochergin V.P., Kochergin S.V., Sklyar S.N. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovdnykh basseynov* [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep basins]. Sevastopol': EHKOSI-Gidrofizika, 2002, 238 p.
7. Kochergin V.S., Kochergin S.V. Realizatsiya variatsionnogo podkhoda pri identifikatsii vkhodnykh parametrov modeli perenosy passivnoy primesi v Azovskom more [Implementation of the variational approach in identifying the input parameters of the passive admixture transport model in the Azov Sea]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 3, pp. 50–58.