ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2017. № 2. С. 48–56

УДК 536.2

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ ТРИБОКОМПОЗИТОВ

Лавров И. В., Бардушкин В. В., Сычев А. П., Яковлев В. Б., Кириллов Д. А.

ON CALCULATION OF THE EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY OF TEXTURED TRIBOCOMPOSITES

Lavrov I.V.*, Bardushkin V.V.*, Sychev A.P.**, Yakovlev V.B.*, Kirillov D.A.*

* National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia
** Southern Scientific Center of RAS, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: iglavr@mail.ru

Abstract. The common operator expression for a tensor of effective thermal conductivity $\mathbf{k}^*$ of the inhomogeneous textured material is derived. Assuming the inhomogeneous material to consist of ellipsoidal grains let us approximate the integral operator by the constant tensor $\mathbf{g}$ related with the concrete inclusion and thus obtain the generalized singular approximation for $\mathbf{k}^*$ on the base of the common operator expression. It is shown that in case of coincidence of axes of ellipsoidal inclusion with principal axes of a tensor of thermal conductivity of the comparison medium the components of a tensor $\mathbf{g}$ may be expressed through components of a tensor of the generalized geometrical factors of the ellipsoid placed in the anisotropic external medium.

The received generalized singular approximation is applied to calculation of a tensor $\mathbf{k}^*$ of the multicomponent textured matrix composite with uniformly oriented inclusions. For a special case of the generalized singular approximation – a self-consistent approximation – the system of equations for finding of the main components of a tensor $\mathbf{k}^*$ of this composite is derived. On the basis of the received system of equations numerical simulation of thermal conducting characteristics of the textured tribocomposite consisting of three components is made: epoxy ED-20 system as a matrix, polytetrafluoroethylene inclusions of spherical shape as an antifriction component and the prolate spheroidal glass inclusions as the reinforcing component. Dependences of the principal components of effective thermal conductivity tensor of this tribocomposite on volume fractions of reinforcing inclusions are given. It is shown what this tribocomposite has anisotropy of thermal-conducting properties, despite isotropic material characteristics of each components. It is also shown that values of the principal components of effective thermal conductivity tensor are less than volume average value of a thermal conductivity.

Keywords: tensor of effective thermal conductivity, texture, composite, tribocomposite, multicomponent, generalized singular approximation, matrix, ellipsoidal inclusion, self-consistent approximation.

Введение

Для композиционных материалов и конструкций из них, подверженных интенсивным внешним воздействиям различного физического характера, наряду с механическими важное значение имеют их теплофизические характеристики, в том числе теплопроводность. Так, например, в процессе трения происходит неравномерный нагрев поверхностных и объемных слоев в трибокомпозитах, влияющий на диффузионные и се-

Лавров Игорь Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика №2» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: iglavr@mail.ru

Бардушкин Владимир Валентинович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедр «Высшая математика №2» и «Системная среда качества» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: bardushkin@mail.ru

Сычев Александр Павлович, канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией транспорта и новых композиционных материалов Южного научного центра РАН; e-mail: alekc_sap@mail.ru

Яковлев Виктор Борисович, д-р физ.-мат. наук, профессор РАН, профессор кафедры «Высшая математика №2» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: yakovlev@miee.ru

Кириллов Дмитрий Андреевич, аспирант кафедры «Высшая математика №2» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: dmitry.kirilloff@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (16-08-00262-а, 17-08-01374-а).

грегационные процессы, приводящие к существенным изменениям физико-механических свойств трибокомпозитов, в том числе их трибологических характеристик [1]. Поэтому исследование влияния состава, структуры и концентрации элементов неоднородности на теплопроводящие характеристики трибокомпозитов является актуальной проблемой.

В математическом плане задача вычисления эффективной теплопроводности неоднородного материала в отсутствие конвективного и радиационного переноса тепловой энергии в нем аналогична задачам вычисления эффективных диэлектрических, электропроводящих и магнитных характеристик неоднородных сред, т.к. распределение температурного поля в среде в стационарном случае описывается такими же уравнениями, как и распределения стационарных электрического и магнитного полей. Поэтому подходы и методы, разработанные для оценивания эффективных диэлектрических и электропроводящих характеристик, могут быть применены и для вычисления эффективной теплопроводности неоднородных сред. В частности, для простейших изотропных двухкомпонентных систем используются классические приближения Максвелла – Гарнетта [2] и Бруггемана [3], а также их обобщения для случаев включений эллипсоидальной формы. Например, в [4] авторы практически заново выводят для эффективной теплопроводности матричных композитов с одинаково ориентированными эллипсоидальными включениями известное обобщение приближения Максвелла – Гарнетта для эффективных диэлектрических характеристик аналогичных сред [5]. При этом имеются и оригинальные методы, разработанные для оценивания эффективной теплопроводности неоднородных сред, как теоретические, так и эмпирические. Обзоры методов и приближений, используемых для прогнозирования теплопроводящих свойств неоднородных сред, имеются, например, в [6, 7]. Большинство методов имеет узкую направленность, а также не могут учитывать текстуру материала, приводящую к его макроскопической анизотропии и тензорному характеру его эффективной теплопроводности. Вместе с тем, именно текстурированные композиты находят все большее применение в технике.

Одним из подходов, обладающим большой степенью общности и способным естественным образом учитывать текстуру неоднородного материала, является обобщенное сингулярное приближение, основы которого были заложены в работах А.Г. Фокина [8] и Т.Д. Шермергора [9] для вычисления эффективных диэлектрических и упругих характеристик неоднородных сред, и развитое затем в работах [10, 11]. В настоящей работе обобщенное сингулярное приближение адаптируется для прогнозирования теплопроводящих свойств неоднородного текстурированного материала, состоящего из эллипсоидальных зерен (включений). Затем на основе полученного выражения общего вида выводится система уравнений для нахождения главных компонент тензора эффективной теплопроводности многокомпонентного матричного композита с фиксированной ориентацией включений, причем в качестве среды сравнения принимается эффективная среда, т.е. используется метод самосогласования. В качестве примера проводятся модельные вычисления для трехкомпонентного трибокомпозита с армирующими вытянутыми стеклянными включениями, исследуется зависимость компонент тензора эффективной теплопроводности от объемной доли армирующих включений.

1. Постановка задачи и ее решение в обобщенном сингулярном приближении

Рассмотрим образец объемом V статистически однородного композитного материала, представляющего собой матрицу (непрерывный компонент) с погруженными в нее однородными включениями. Считается, что все включения имеют эллипсоидальную форму и случайным образом распределены по объему образца. Также будем считать, что внутренние источники тепла в материале отсутствуют.

Если к границе S данного образца приложить постоянное во времени однородное температурное поле, напряженность которого обозначим как $\mathbf{H}_0$, то в образце установится некоторое постоянное температурное поле $u(\mathbf{r})$ с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r})$ и постоянное распределение тепловых потоков, векторы плотности которых $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ связаны с $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ законом Фурье

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}), \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ — тензор теплопроводности данного неоднородного материала, являющийся случайной кусочно-постоянной функцией координат. Основная задача состоит в вычислении тензора $\mathbf{k}^*$ эффективной теплопроводности данного образца композитной среды, связывающего средние по объему образца значения векторов плотности теплового потока $\mathbf{q}$ и напряженности температурного поля $\mathbf{H}$

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \mathbf{k}^* \langle \mathbf{H} \rangle .$$

Для нахождения $\mathbf{k}^*$ рассмотрим краевую задачу для скалярного поля $u(\mathbf{r})$ в данном образце

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{k}(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V; \\ u|_S = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для решения краевой задачи (1.2) рассматривается аналогичная вспомогательная задача для однородного тела сравнения [8–10]. Представим $u(\mathbf{r})$ и $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ в виде

$$u(\mathbf{r}) = u^{(c)}(\mathbf{r}) + u'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{k}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}^{(c)} + \mathbf{k}'(\mathbf{r}),$$

индекс «c» обозначает величины, относящиеся к телу сравнения, имеющему такие же размеры и форму, что и образец композитной среды; штрихом обозначены разности между величинами в исходном образце и теле сравнения. Формулировка задачи для тела сравнения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)} \nabla u^{(c)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V; \\ u^{(c)}\Big|_S = -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Вычитая (1.3) из (1.2), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)} \nabla u'(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{k}'(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}), \ \mathbf{r} \in V; \\ u'\big|_S = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Введем функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ задачи (1.4) условиями

$$\nabla \cdot \mathbf{k}^{(c)} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1),$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\,|_{\mathbf{r}_1 \in S} = 0,$$

тогда решение задачи (1.4) можно записать в виде интеграла [10]

$$u'(\mathbf{r}) = \int\limits_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla \cdot \mathbf{k}'(\mathbf{r}_1) \nabla u(\mathbf{r}_1)\, \mathrm{d}\mathbf{r}_1. \tag{1.5}$$

Если тело считать неограниченным, тогда $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$. Преобразовав в этом случае (1.5) по частям и затем взяв градиент от левой и правой частей, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(\mathbf{r}) &= \\ &= \int \left(\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\right) \mathbf{k}'(\mathbf{r}_1) \mathbf{H}(\mathbf{r}_1)\, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \equiv \\ &\equiv \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \mathbf{k}'(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ — тензор вторых производных функции Грина, верхний индекс «1» у дифференциального оператора Гамильтона означает дифференцирование по $\mathbf{r}_1$; $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ — тензорный интегральный оператор, действие которого определяется формулой (1.6). Опуская промежуточные выкладки, в итоге получим для $\mathbf{k}^*$ точное операторное выражение, аналогичное выражению для тензора эффективных диэлектрических характеристик неоднородной среды [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^* = \left\langle \mathbf{k}(\mathbf{r}) \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left\langle \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1} \right\rangle^{-1}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор 2-го ранга.

Обратные операторы в (1.7) подразумеваются как ряды по степеням $\mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{k}'(\mathbf{r})$, поэтому для получения точного решения по формуле (1.7) требуется знание корреляционных функций всех порядков. Если неоднородную среду считать состоящей из эллипсоидальных включений (матрицу также можно считать состоящей из включений), то в предположении однородности поля внутри каждого из включений возможно заменить интегральный оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ постоянным тензором $\mathbf{g}$ в пределах конкретного включения. Вторые производные функции Грина $G_{,ij}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\partial^2 G(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, по сути являются обобщенными функциями и, согласно теории [12], имеют формальную и сингулярную части

$$G_{,ij}(\mathbf{r}) = G^{(f)}_{,ij}(\mathbf{r}) + G^{(s)}_{,ij}(\mathbf{r}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $G^{(f)}_{,ij}(\mathbf{r})$ — формальная часть, получается из первой производной операцией формального дифференцирования, как для обычных функций; $G^{(s)}_{,ij}(\mathbf{r})$ — сингулярная часть, вычисляющаяся по формуле [12]

$$G^{(s)}_{,ij}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \oint\limits_{S'} \frac{\partial G(\mathbf{r}')}{\partial x'_i} n'_j \, \mathrm{d}S',$$

интегрирование ведется по поверхности S' данного включения; n'_j — j-я компонента внешней единичной нормали к S'. Замена интегрального оператора постоянным тензором эквивалентна пренебрежению формальной частью второй производной функции Грина, т.е. $G_{,ij}(\mathbf{r}) \approx G^{(s)}_{,ij}(\mathbf{r})$, и поэтому для компонент тензора $\mathbf{g}$ имеем

$$g_{ij} = \int G^{(s)}_{,ij}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint\limits_{S'} \frac{\partial G(\mathbf{r}')}{\partial x'_i} n'_j \,\mathrm{d}S',$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Выражение, полученное из (1.7) заменой оператора $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ на тензор $\mathbf{g}$, — это обобщенное сингулярное приближение для вычисления тензора эффективных характеристик неоднородного материала [10], в данном случае — для вычисления тензора эффективной теплопроводности

$$\mathbf{k}^* = \left\langle \mathbf{k}(\mathbf{r}) \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left\langle \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{k}'(\mathbf{r})\right)^{-1} \right\rangle^{-1}. \quad (1.8)$$

Тензор $\mathbf{g}$ зависит от формы включения, а также от тензорного материального параметра среды сравнения $\mathbf{k}^{(c)}$. В [11] показано, что компоненты g_{ij} в системе координат, связанной с осями эллипсоида, могут быть вычислены по следующей формуле (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{n_i n_j}{n_k k^{(c)}_{kl} n_l} \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta, \\ i, j = 1, 2, 3, \quad (1.9)$$

где $n_1 = a_1^{-1}\sin\alpha\cos\beta$, $n_2 = a_2^{-1}\sin\alpha\sin\beta$, $n_3 = a_3^{-1}\cos\alpha$ — компоненты нормали (не единичной) к поверхности эллипсоида S' с полуосями a_1, a_2, a_3; $k^{(c)}_{kl}$ — компоненты тензора $\mathbf{k}^{(c)}$ в системе эллипсоида.

Если оси эллипсоида совпадают с главными осями тензора $\mathbf{k}^{(c)}$, для компонент тензора $\mathbf{g}$ справедливы выражения (см. приложение)

$$g_{jj} = -\frac{\tilde{L}_j}{k^{(c)}_j}, \\ j = 1, 2, 3; \quad g_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (1.10)$$

где

$$\tilde{L}_j = \frac{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}q}{\eta(q)}, \quad (1.11)$$

$$\eta(q) = (\tilde{a}_j^2 + q)[(\tilde{a}_1^2 + q)(\tilde{a}_2^2 + q)(\tilde{a}_3^2 + q)]^{1/2}, \\ j = 1, 2, 3$$

— главные компоненты тензора $\tilde{\mathbf{L}}$ обобщенных геометрических факторов эллипсоида в анизотропной среде [13];

$$\tilde{a}_j = \frac{a_j}{\sqrt{k^{(c)}_j}}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

— обобщенные полуоси эллипсоида с учетом анизотропии среды; $k^{(c)}_j$, $j = 1, 2, 3$ — главные компоненты тензора $\mathbf{k}^{(c)}$.

Выбирая в качестве параметра среды сравнения $\mathbf{k}^{(c)}$ различные значения, будем из (1.8) получать различные типы приближений [10]. В частности, взяв $\mathbf{k}^{(c)}$ равным тензору эффективной теплопроводности $\mathbf{k}^*$, получим метод самосогласования.

2. Применение обобщенного сингулярного приближения к вычислению эффективной теплопроводности многокомпонентного текстурированного композита с одинаково ориентированными включениями

Рассмотрим случай композита матричного типа с изотропной матрицей и n видами включений. Пусть все включения i-го вида являются одинаково ориентированными эллипсоидами с фиксированными размерами полуосей $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}$, $a_3^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, причем геометрические оси эллипсоидов совпадают с кристаллографическими осями материалов включений. Также будем считать, что оси эллипсоидов всех видов включений сонаправлены. В данных условиях направления осей текстуры образца композита будут совпадать с направлениями осей включений; введем систему координат $x_1 x_2 x_3$, направив ее оси вдоль осей текстуры образца. Объемные доли включений i-го вида обозначим как $f^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, при этом для объемной доли матрицы будем иметь

$$f^{(m)} = 1 - \sum_{i=1}^{n} f^{(i)}.$$

Теплопроводность матрицы обозначим как $k^{(m)}$, тензор теплопроводности включения i-го вида в системе $x_1x_2x_3$ — как $\mathbf{k}^{(i)}$, причем в силу введенных предположений он будет диагональным с главными компонентами $k_j^{(i)}$, $j=1,2,3$. В системе $x_1x_2x_3$ тензор $\mathbf{k}^*$ также будет диагональным, его главные компоненты обозначим как k_j^*, $j=1,2,3$.

Применим к композиту данного вида выражение (1.8) с учетом соотношений (1.10) и возьмем $\mathbf{k}^{(c)}=\mathbf{k}^*$, т.е. используем метод самосогласования, тогда для вычисления главных компонент тензора $\mathbf{k}^*$ получим систему уравнений

$$k_j^* = \left\langle k_j(\mathbf{r})\left(1+(k_j^*)^{-1}\tilde{L}_j(k_j(\mathbf{r})-k_j^*)\right)^{-1}\right\rangle \times \\ \times \left\langle \left(1+(k_j^*)^{-1}\tilde{L}_j(k_j(\mathbf{r})-k_j^*)\right)^{-1}\right\rangle^{-1}, \qquad (2.1)$$

$$j=1,2,3,$$

где

$$k_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} k^{(m)}, & \mathbf{r}\in V^{(m)}; \\ k_j^{(i)}, & \mathbf{r}\in V^{(i)},\ i=\overline{1,n}, \end{cases}$$

$V^{(m)}$ — объем, занимаемый матрицей, $V^{(i)}$ — суммарный объем, занимаемый включениями i-го вида. Данная система не распадается на три независимых друг от друга уравнения для каждой компоненты, т.к. каждая из величин $\tilde{L}_j$, $j=1,2,3$, определяемых соотношениями (1.11), зависит от всех трех главных компонент k_j^*.

Поскольку все включения, относящиеся к конкретному компоненту материала, имеют одинаковые форму и ориентацию, то усреднение в (2.1) сводится к вычислению средних по объему. Введем для удобства тензор $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ с главными компонентами

$$\lambda_j(\mathbf{r}) = \left(1+(k_j^*)^{-1}\tilde{L}_j(k_j(\mathbf{r})-k_j^*)\right)^{-1}, \quad j=1,2,3, \qquad (2.2)$$

тогда (2.1) можно записать в виде

$$k_j^* = \left(f^{(m)}k^{(m)}\lambda_j^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} f^{(i)}k_j^{(i)}\lambda_j^{(i)}\right) \times \\ \times \left(f^{(m)}\lambda_j^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} f^{(i)}\lambda_j^{(i)}\right)^{-1}, \qquad (2.3)$$

$$j=1,2,3,$$

где $\lambda_j^{(m)}$, $\lambda_j^{(i)}$ — главные компоненты тензора $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ для включений, относящихся к матрице и i-му виду соответственно

$$\lambda_j^{(m)} = \left(1+(k_j^*)^{-1}\tilde{L}_j^{(m)}(k^{(m)}-k_j^*)\right)^{-1}, \\ \lambda_j^{(i)} = \left(1+(k_j^*)^{-1}\tilde{L}_j^{(i)}(k_j^{(i)}-k_j^*)\right)^{-1}, \\ i=\overline{1,n}; \quad j=1,2,3; \qquad (2.4)$$

$\tilde{L}_j^{(m)}, \tilde{L}_j^{(i)}$, $j=1,2,3$ — главные значения тензоров обобщенных геометрических факторов включений, относящихся к матрице и i-му виду соответственно.

Заметим, что $\tilde{L}_j^{(m)}, \tilde{L}_j^{(i)}$ не зависят от абсолютных размеров включений, но только от отношения $\tilde{a}_1 : \tilde{a}_2 : \tilde{a}_3$ обобщенных полуосей включения данного вида с учетом анизотропии среды сравнения. Для частиц, составляющих матрицу, можно взять $a_1^{(m)} = a_2^{(m)} = a_3^{(m)} = 1$, тогда для обобщенных полуосей частиц матрицы по формулам (1.12) получим

$$\tilde{a}_j^{(m)} = (k_j^*)^{-1/2}, \quad j=1,2,3. \qquad (2.5)$$

Аналогично, для обобщенных полуосей включений i-го вида имеем

$$\tilde{a}_j^{(i)} = a_j^{(i)}(k_j^*)^{-1/2}, \qquad (2.6)$$

$$j=1,2,3; \quad i=\overline{1,n}.$$

Таким образом, главные компоненты k_j^*, $j=1,2,3$ тензора эффективной теплопроводности композита данного типа вычисляются из системы уравнений (2.3).

3. Пример численного моделирования теплопроводящих характеристик трехкомпонентного трибокомпозита

На основе формул (2.3), (2.4) было проведено численное моделирование с целью прогнозирования эффективных теплопроводящих характеристик трехкомпонентного трибокомпозита следующего состава: матрица — эпоксидная система типа ЭД-20; включения первого вида (антифрикционный компонент) — политетрафторэтилен (ПТФЭ) сферической формы с радиусом $a^{(1)}$; включения второго вида (армирующий компонент) — из

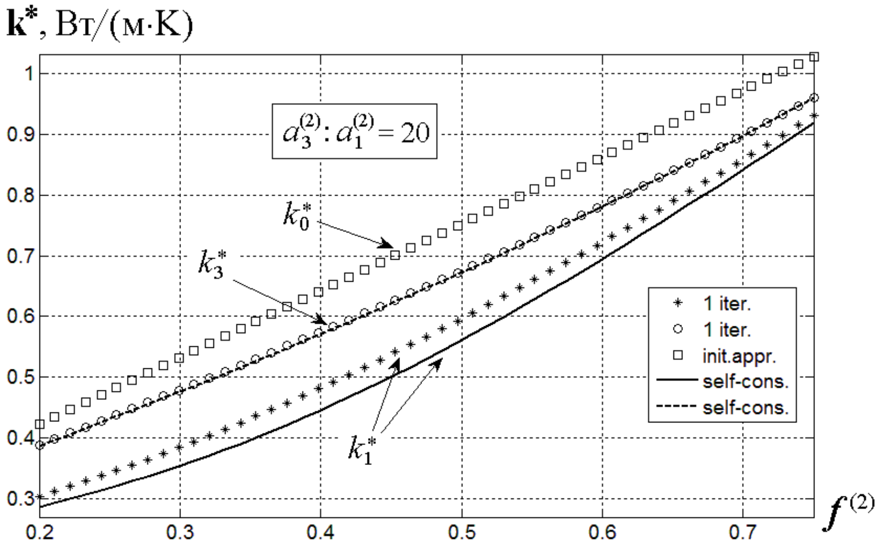

Рис. 1. Зависимости оценок главных компонент тензора эффективной теплопроводности трибокомпозита от объемной доли стеклянных включений (объемная доля ПТФЭ 0,05), полученных как среднее по объему (init.appr.), после первой итерации (1 iter.) и методом самосогласования (self-cons.)

алюмоборосиликатного стекла в форме сфероидов (эллипсоидов вращения) с полуосями $a_1^{(2)} = a_2^{(2)}, a_3^{(2)}$ ($a_3^{(2)}$ — полуось в направлении оси вращения сфероида). Оси всех включений второго вида сонаправлены. Все три компонента – изотропные, со следующими коэффициентами теплопроводности (Вт/(м · К)): $k^{(m)} \approx 0{,}2$ (матрица), $k^{(1)} \approx 0{,}25$ (ПТФЭ), $k^{(2)} \approx 1{,}3$ (стекло) [14].

Данный композит, несмотря на то, что материальные характеристики всех компонентов изотропны, будет обладать анизотропией теплопроводящих свойств. Введем координатную систему $x_1x_2x_3$, связанную с текстурой образца, ось x_3 направим параллельно осям включений второго вида, оси x_1 и x_2 направим перпендикулярно x_3 и друг другу. В системе $x_1x_2x_3$ тензор $\mathbf{k}^*$ в силу вращательной симметрии относительно оси x_3 будет иметь вид

$$\mathbf{k}^* = \begin{pmatrix} k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & k_1^* & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

С учетом (3.1) из (2.3) получается система двух уравнений для нахождения главных компонент тензора $\mathbf{k}^*$, которая решалась методом простых итераций. В качестве начального приближения принималось среднее по объему образца значение коэффициента теплопроводности

$$k_{j,0}^* = f^{(m)}k^{(m)} + f^{(1)}k^{(1)} + f^{(2)}k^{(2)}, \qquad (3.2)$$

$$j = 1, 3.$$

Результаты моделирования теплопроводящих свойств трехкомпонентного трибокомпозита с вытянутыми стеклянными включениями с аспектным отношением $a_3^{(2)} : a_1^{(2)} = 20$, представленные на рис. 1, показывают, что композит является анизотропным, причем главная компонента k_3^*, соответствующая направлению вдоль осей стеклянных включений, превышает значение другой главной компоненты k_1^*, соответствующей направлениям в плоскости x_1x_2. Увеличение объемной доли стеклянных включений приводит к увеличению обеих главных компонент тензора $\mathbf{k}^*$. При этом следует отметить, что и абсолютная разность значений компонент, и тем более относительная, уменьшаются с увеличением объемной доли стеклянных включений.

Также следует отметить, что обе главные компоненты имеют значения меньше среднего по объему, что согласуется с теоретической оценкой эффективных характеристик неоднородной среды, поскольку среднее по объему есть верхняя оценка Винера [10, 15]. После первой итерации с начальным приближением (3.2) значение большей из главных компонент довольно близко к значению, получаемому методом согласования, в отличие от значения меньшей компоненты, которое превышает свое предельное примерно на 10 %.

Заключение

Перечислим основные результаты работы:

1. В обобщенном сингулярном приближении получена формула (1.8) для тензора эффективной теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями разных видов.

2. Для случая матричного композита с одинаковой ориентацией включений всех видов на основе формулы (1.8) получена система (2.3) для нахождения главных компонент тензора эффективной теплопроводности композита методом самосогласования.

3. С помощью полученных формул проведено численное моделирование теплопроводящих характеристик трехкомпонентного трибокомпозита с армирующими вытянутыми стеклянными включениями (рис. 1).

Приложение

Вычисление компонент тензора $\mathbf{g}$ *в случае совпадения главных осей тензора* $\mathbf{k}^{(c)}$ *с главными осями эллипсоидального включения*

Выражение (1.9) для вычисления данных компонент может быть записано в виде

$$g_{jm} = = -\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_S \frac{x_j}{a_j}\frac{x_m}{a_m}\left(\sum_{l=1}^{3}\frac{k_l^{(c)}}{a_l^2}x_l^2\right)^{-1}\mathrm{d}S, \quad (\Pi.1)$$

где S — единичная сфера с центром в начале координат; x_l, $l=1,2,3,$ — декартовы координаты точек на сфере; $k_l^{(c)}$, $l=1,2,3,$ — главные значения тензора $\mathbf{k}^{(c)}$. Введем новые параметры — обобщенные полуоси $\tilde a_l$, $l=1,2,3,$ эллипсоида в анизотропной среде

$$\tilde a_l = \frac{a_l}{\sqrt{k_l^{(c)}}}, \quad l=1,2,3,$$

тогда (П.1) примет вид

$$g_{jm} = = -\frac{1}{4\pi\sqrt{k_j^{(c)}k_m^{(c)}}}\oiint\limits_S \frac{x_j}{\tilde a_j}\frac{x_m}{\tilde a_m}\left(\sum_{l=1}^{3}\frac{x_l^2}{\tilde a_l^2}\right)^{-1}\mathrm{d}S, \quad (\Pi.2)$$

Если $j\neq m$, то $g_{jm}=0$ в силу нечетности подынтегральной функции в (П.2). Рассмотрим случаи $j=m$. Вычислим, например, компоненту g_{11}:

$$g_{11} = -\frac{1}{4\pi k_1^{(c)}}\oiint\limits_S \frac{x_1^2}{\tilde a_1^2}\left(\sum_{l=1}^{3}\frac{x_l^2}{\tilde a_l^2}\right)^{-1}\mathrm{d}S. \quad (\Pi.3)$$

Параметризуя S посредством x_2, x_3, учитывая четность подынтегральной функции в (П.3) и симметрию сферы, получим

$$g_{11} = -\frac{2}{4\pi k_1^{(c)}}\iint\limits_{D_{23}}\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\times \times\left(1-\left(1-\frac{\tilde a_1^2}{\tilde a_2^2}\right)x_2^2- -\left(1-\frac{\tilde a_1^2}{\tilde a_3^2}\right)x_3^2\right)^{-1}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3, \quad (\Pi.4)$$

где $D_{23}:\ x_2^2+x_3^2\leqslant 1$.

Обозначим $A\equiv 1-\tilde a_1^2/\tilde a_2^2$, $B\equiv 1-\tilde a_1^2/\tilde a_3^2$ и перейдем в (П.4) к полярным координатам $x_2=\rho\cos\alpha$, $x_3=\rho\sin\alpha$

$$g_{11} = -\frac{1}{2\pi k_1^{(c)}}\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\times \times\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\rho^2(A\cos^2\alpha+B\sin^2\alpha)\right)^{-1}\mathrm{d}\alpha. \quad (\Pi.5)$$

Внутренний интеграл в силу периодичности подынтегральной функции с периодом π может быть записан как

$$J_1\equiv\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\rho^2(A\cos^2\alpha+B\sin^2\alpha)\right)^{-1}\mathrm{d}\alpha = =2\int\limits_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\tilde a+\tilde b\cos 2\alpha}, \quad (\Pi.6)$$

где $\tilde{a} = 1-\frac{1}{2}\rho^2(A+B)$; $\tilde{b} = \frac{1}{2}\rho^2(B-A)$. Вычислим (П.6) с помощью теории вычетов, перейдя к контурному интегралу в комплексной плоскости с помощью замены $z = e^{i2\alpha}$, получим

$$J_1 = -2i \oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\tilde{b}z^2 + 2\tilde{a}z + \tilde{b}} = = -2i\,(2\pi i \operatorname{res}[f(z); z_1]),$$

где $f(z) = \tilde{b}z^2 + 2\tilde{a}z + \tilde{b}$; $z_1 = \frac{-\tilde{a}+\sqrt{\tilde{a}^2-\tilde{b}^2}}{\tilde{b}}$ — особая точка (простой полюс) функции $f(z)$, лежащая внутри контура $|z| = 1$. Другая особая точка лежит вне контура. Таким образом, поскольку

$$\operatorname{res}[f(z); z_1] = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}},$$

то

$$J_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-\rho^2 A)(1-\rho^2 B)}}. \quad (\text{П.7})$$

Подставив (П.7) в (П.5), получим

$$g_{11} = -\frac{1}{k_1^{(c)}} \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(1-\rho^2 A)(1-\rho^2 B)}} = \{\rho = \sin\psi\} =$$

$$= -\frac{1}{k_1^{(c)}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\psi \sin\psi\,\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(1-A\sin^2\psi)(1-B\sin^2\psi)}} = \left\{\operatorname{tg}^2\psi = p\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2k_1^{(c)}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{(1+p)^{3/2}\sqrt{\xi}} = \left\{p\tilde{a}_1^2 = q\right\} =$$

$$= -\frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3}{2k_1^{(c)}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}q}{(\tilde{a}_1^2+q)^{3/2}[(\tilde{a}_2^2+q)(\tilde{a}_3^2+q)]^{1/2}},$$

$$\xi = (1+(1-A)p)(1+(1-B)p).$$

Аналогичным образом получаются выражения для g_{22} и g_{33}, отличающиеся от g_{11} циклической перестановкой индексов. Таким образом, окончательно для g_{jm} имеем

$$g_{jj} = -\frac{\tilde{L}_j}{k_j^{(c)}}, \quad j = 1, 2, 3; \quad g_{jm} = 0, \quad j \neq m,$$

где

$$\tilde{L}_j = \frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3}{2} \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}q}{\eta(q)},$$

$$\eta(q) = (\tilde{a}_j^2 + q)[(\tilde{a}_1^2+q)(\tilde{a}_2^2+q)(\tilde{a}_3^2+q)]^{1/2}$$

— обобщенные геометрические факторы эллипсоида в анизотропной среде.

Литература

1. *Колесников В.И.* Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах. М.: Наука, 2003. 279 с.
2. *Garnett J.C.M.* Colours in metal glasses and in metallic films // Phil. Trans. R. Soc. – London. 1904. Vol. 203. P. 385–420.
3. *Bruggeman D.A.G.* Berechnung verschiedener physikalisher Konstanten von heterogenen Substanzen // Ann. Phys. – Lpz. 1935. Iss. 24. P. 636–679.
4. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Эффективная теплопроводность композита в случае отклонений формы включений от шаровой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Вып. 4. С. 3–17.
5. *Bragg W.L., Pippard A.B.* The Form Birefringence of Macromolecules // Acta Cryst. 1953. Vol. 6. No. 11–12. P. 865–867.
6. *Progelhof R.C., Throne J.L., Ruetsch R.R.* Methods for Predicting the Thermal Conductivity of Composite Systems: A Review // Polymer Engineering and Science. 1976. Vol. 76. No. 9. P. 615–625.
7. *Pietrak K., Wisniewski T.S.* A review of models for effective thermal conductivity of composite materials // J. of Power Technologies. 2015. Vol. 95. No. 1. P. 14–24.
8. *Фокин А.Г.* Диэлектрическая проницаемость смесей // Журнал технической физики. 1971. Т. 41. Вып. 6. С. 1073–1079.
9. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
10. *Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н.* Об объединении методов оценки эффективных диэлектрических характеристик гетерогенных сред на основе обобщенного сингулярного приближения // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 27–31. doi: 10.7868/S0869565213260083
11. *Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н.* О методе анализа распределений локальных электрических полей в композиционном материале // ДАН. 2016. Т. 467. № 3. С. 275–279. doi: 10.7868/S0869565216090097

12. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958. 440 с.
13. *Лавров И.В.* Произвольно ориентированный диэлектрический эллипсоид в анизотропной среде: метод неортогонального преобразования пространства // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. 2013. Т. 13. № 1. С. 44–47.
14. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
15. *Wiener O.* Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung // Abh.-Sachs. Geselsch. 1912. B. 32. S. 509–604.

References

1. Kolesnikov V.I. *Teplofizicheskie protsessy v metallopolimernykh tribosistemakh* [Thermophysical processes in metal-polymeric tribosystems]. Moscow, Nauka Publ., 2003, 279 p. (In Russian)
2. Garnett J.C.M. Colours in metal glasses and in metallic films. *Phil. Trans. R. Soc.*, London, 1904, vol. 203, pp. 385–420.
3. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalisher Konstanten von heterogenen Substanzen. *Ann. Phys.*, Lpz., 1935, b. 24, pp. 636–679. (In German)
4. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effektivnaya teploprovodnost' kompozita v sluchae otkloneniy formy vklyucheniy ot sharovoy [Effective thermal conductivity of a composite in case of inclusions shape deviations from spherical ones]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical modeling and numerical methods], 2014, no. 4, pp. 3–17. (In Russian)
5. Bragg W.L., Pippard A.B. The Form Birefringence of Macromolecules. *Acta Cryst.*, 1953, vol. 6, no. 11–12, pp. 865–867.
6. Progelhof R.C., Throne J.L., Ruetsch R.R. Methods for Predicting the Thermal Conductivity of Composite Systems: A Review. *Polymer Engineering and Science*, 1976, vol. 76, no. 9, pp. 615–625.
7. Pietrak K., Wisniewski T.S. A review of models for effective thermal conductivity of composite materials. *J. of Power Technologies*, 2015, vol. 95, no. 1, pp. 14–24.
8. Fokin A.G. Dielektricheskaya pronitsaemost' smesey [Dielectric Permittivity of Mixtures]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* [Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics], 1971, vol. 41, no. 6, pp. 1073–1079. (In Russian)
9. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Micromechanics of inhomogeneous medium]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 399 p. (In Russian)
10. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N. Association of evaluation methods of the effective permittivity of heterogeneous media on the basis of a generalized singular approximation. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 9, pp. 379–383. doi: 10.1134/S1028335813090012
11. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N. A Method of Analysis of Distributions of Local Electric Fields in Composites. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 3, pp. 124–128. doi: 10.1134/S1028335816030101
12. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized functions. Properties and Operations]. Moscow, GIFML Publ., 1958, 440 p. (In Russian)
13. Lavrov I.V. Proizvol'no orientirovannyy dielektricheskiy ellipsoid v anizotropnoy srede: metod neortogonal'nogo preobrazovaniya prostranstva [An arbitrarily oriented dielectric ellipsoid in an anisotropic medium: the non-orthogonal space transformation method]. *Fundamental'nye problemy radioelektronnogo priborostroeniya* [Fundamental problems of radioengineering and device construction], 2013, vol. 13, no. 1, pp. 44–47. (In Russian)
14. Grigor'ev I.S., Meilikhov E.Z. (eds.) *Fizicheskie velichiny: Spravochnik* [Physical Quantities: A Handbook]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991, 1232 p. (In Russian)
15. Wiener O. Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung. *Abh.-Sachs. Geselsch.*, 1912, b. 32, ss. 509–604. (In German)

Статья поступила 12 апреля 2017 г.