

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ О ВИБРАЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рубцов С. Е., Павлова А. В., Телятников И. С.

TO THE PROBLEM OF VIBRATIONS OF A LIMITED VOLUME OF A LIQUID
ON AN ELASTIC FOUNDATION

Rubtsov S. E. *, Pavlova A. V. *, Telyatnikov I. S. **

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

** Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Abstract. The paper presents a model of a hydro engineering structure under the influence of vibration loads, taking into account its interaction with an elastic foundation modeled by an isotropic layer or a half-space. The mathematical description of this model reduces to the formulation of a boundary-value problem for a system of partial differential equations, the solution of which leads to integral relations with respect to the unknown function of stresses, distributed over the area of contact between the surface object and the underlying foundation. Contact stresses are determined from the solution of the integral equation, the feature of which is the dependence of its kernel not only on the difference of the arguments, but also on their sum.

Formulas for calculating the hydrodynamic pressure in the contact zone of the liquid and elastic media are obtained, as well as the velocity potential in the fluid and the displacements of the elastic foundation points. Analysis of the results of computational experiments made it possible to determine the dependencies of stresses in the media contact zone from the physical, geometric and frequency parameters of the problems under consideration for two models of an elastic foundation: an elastic half-space and an elastic layer with a fixed lower bound.

The novelty of the conducted studies consists in analyzing the dynamic behavior of hydroelastic media based on solving integral equations, rather than using the average characteristics of contact stresses. Such approach will allow increasing the accuracy of the description of real processes and reliability of assessments of possible consequences of vibroseismic effects, which is especially important in regions where artificial and natural reservoirs and dams are near populated areas.

Keywords: vibration loads, limited pool of liquid, elastic foundation, hydrodynamic pressure distribution.

Интерес к задачам изучения волновых и деформационных процессов в контактирующих упругих и жидких средах диктуется, в частности, растущими требованиями к безопасности эксплуатации гидросооружений и к степени достоверности прогноза последствий вибросейсмовоздействий различной мощности. Модели, позволяющие с учетом региональной геологической и сейсмической информации проводить аналитические и численные исследования основных параметров,

обеспечивающих безопасное функционирование подобных объектов, чрезвычайно востребованы.

Вопросам разработки и реализации эффективных методов расчета систем жидкостно-упругая среда посвящено много демонстрирующих различные подходы работ [1–5]. Проблемы вибрации резервуаров с жидкостью исследовались в работах [6–9]. Однако на сегодняшний день вопросы динамического взаимодействия конструкций с жидкостью и

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: rub_serg@mail.ru

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, доцент профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник лаборатории прикладной математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края р_юг_а 16-41-230184.

деформируемым основанием являются недостаточно изученными, поскольку исследование таких систем разбивается на несколько взаимосвязанных задач гидродинамики, гидроупругости и динамической теории упругости, совместное решение которых сопряжено с определенными математическими сложностями. Задачи о колебании объема жидкости на упругом основании являются модельными для исследования продолжительных во времени воздействий, таких как механические вибрации, вызванные функционированием промышленных объектов, автомобильных и железнодорожных магистралей, приводящих порой к резонансным явлениям в рассматриваемой системе жидкость – упругая среда.

В [10] авторами представлена модель гидротехнического сооружения под действием вибрационных нагрузок с учетом его взаимодействия с упругим основанием, моделируемым изотропным слоем или полупространством, описан метод исследования возникающего поля напряжений. Математическое описание предложенной модели сводится к формулировке краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой приводит к интегральным соотношениям относительно неизвестной функции напряжений, распределенных по площади контакта поверхностного объекта и подстилающего основания. Указанные напряжения определяются из решения интегрального уравнения (ИУ) первого рода, особенностью которого является зависимость его ядра не только от разности аргументов, но и от их суммы.

В настоящей работе проведено исследование распределения контактных напряжений в области соприкосновения упругой и жидкой сред с учетом физических и частотных факторов.

В [10] описан аналитический метод построения функции распределения напряжений в зоне контакта ограниченного бассейна жидкости с упругим основанием. Рассматривалась задача об установившихся колебаниях ограниченного объема идеальной сжимаемой жидкости $\{(x, y) \in \Omega; 0 < z < h\}$ на упругом основании, в качестве которого выбирались однородный слой $\{-\infty < x, y < \infty; -H < z < 0\}$ или полупространство $\{-\infty < x, y < \infty; -\infty < z < 0\}$. Гармонические колебания возбужда-

лись заданной в области Ω_0 нагрузкой $\mathbf{F} = \{0, 0, q_0(x, y) \exp(-i\omega t)\}$ (рис. 1).

Полагалось, что потенциал скоростей жидкости $\phi(x, y, z) \exp(-i\omega t)$ удовлетворяет волновому уравнению при условиях отсутствия гидродинамического давления на поверхности и непротекающих вертикальных границах, на нижней границе жидкость находится под воздействием упругого основания. Вектор смещений последнего $\mathbf{u}(x, y, z) \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$, удовлетворяет уравнениям Ляме. В [10] рассмотрены случаи, когда в качестве модели упругого основания были выбраны упругий слой с защемленной нижней гранью ($\mathbf{u}(x, y, -H) = 0$) и упругое полупространство ($\mathbf{u}(x, y, z) \rightarrow 0$, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$). При выделении единственного решения задачи для упругой среды был применен принцип предельного поглощения [11, 12]. После отделения временного множителя, рассматривалось следующее условие на поверхности упругой среды:

$$2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \Big|_{z=0} = \begin{cases} q(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ q_0(x, y), & (x, y) \in \Omega_0, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \cup \Omega_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$-\infty < x, y < \infty.$$

Взаимодействие упругой и жидкой сред в области контакта определялась непрерывностью вертикальной составляющей скорости

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Рассматривая задачу в плоской постановке ($\phi(x, y, z) \equiv \phi(y, z)$, $\mathbf{u}(x, y, z) \equiv \mathbf{u}(y, z) = \{v, w\}$, $q(x, y) \equiv q(y)$), для нахождения потенциала скоростей в жидкости применен подход, описанный в [13, 14], в результате чего было получено представление

$$\phi(y, z) = \frac{-i}{d\rho_0\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_C(n) K_1(n, z) \exp\left(-i\frac{\pi ny}{d}\right),$$

где

$$Q_C(n) = \int_0^d q(y) \cos\left(\frac{\pi ny}{d}\right) dy,$$

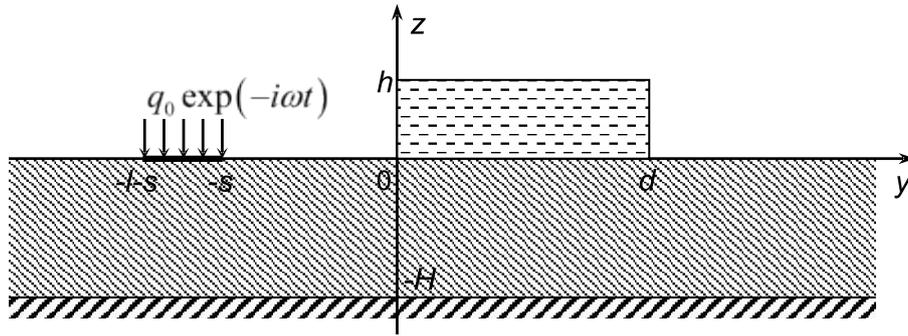


Рис. 1. Геометрическое представление системы бассейн жидкости – упругая среда

$$K_1(n, z) = \frac{\text{sh} \left((h - z) \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2}} \right)}{\text{sh} \left(z \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2}} \right)}.$$

Используя условие взаимодействия сред, рассматриваемая задача была сведена к ИУ первого рода относительно неизвестного гидродинамического давления $q(y)$ в области контакта сред путем применения интегральных преобразований и формулы суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^d k(y - 2nd - \xi) q(\xi) d\xi + \int_0^d k(y - 2nd + \xi) q(\xi) d\xi \right) - \rho_0 \omega^2 \int_0^d r(y - \xi) q(\xi) d\xi = f(y), \quad (1)$$

$$0 < y < d,$$

$$k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha,$$

$$K(\alpha) = \sigma_3 \text{cth}(h\sigma_3),$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_3^2}, \quad \kappa_3 = \frac{\omega}{c_0},$$

где c_0 — скорость звука в жидкости

В [10] построена функция $Q(\alpha)$, соответствующая первой компоненте вектора Фурье-образа отыскиваемого гидродинамического

давления $q(y)$

$$\begin{aligned} Q(\alpha) \equiv Q^+(\alpha) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_k F^*(-p_k) \Psi(\alpha, p_k) + \sum_n F(z_n) \frac{\psi^*(\alpha, -z_n)}{\alpha + z_n} + \sum_m F(-\xi_m) \frac{\psi^*(\xi_m, \alpha)}{\alpha + \xi_m} + \{\Phi_1\} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp(i\alpha d) \times \\ &\quad \times \left(\sum_k F^*(-p_k) \Psi(\alpha, p_k) \exp(ip_k d) + \sum_n F(-z_n) \frac{\psi^*(\alpha, -z_n) \exp(iz_n d)}{\alpha + z_n} + \sum_m F(\xi_m) \frac{\psi^*(\xi_m, \alpha) \exp(i\xi_m d)}{\alpha + \xi_m} + \{\Phi_2\} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где использованы обозначения

$$F(\alpha) = R(\alpha) Q_0(\alpha),$$

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^2 \int_{\Theta_j} F(u) \Psi(\alpha, u) du,$$

$$\Phi_2 = \sum_{j=1}^2 \int_{\Theta_j} F(u) \Psi(\alpha, u) \exp(iud) du,$$

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{\psi(\alpha, \beta) - \psi(\beta, \alpha)}{\alpha - \beta} + \frac{\psi(\alpha, -\beta) - \psi(-\beta, \alpha)}{\alpha + \beta},$$

$$\psi(\alpha, \beta) = \psi_2(\alpha) \psi_1(\beta),$$

$$\psi_1(\alpha) = \frac{1}{P^+(\alpha)},$$

$$\psi_2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} l^+(\alpha) P^+(\alpha) \exp(-i\alpha d),$$

$$l^+(\alpha) = \frac{\exp(i\alpha d)}{2\pi(\alpha + i)^\varepsilon} \times$$

$$\times \int_{-d}^d \exp(i\alpha x) \int_{\Gamma} \frac{(u+i)^\varepsilon \exp(-iux)}{P(u)} du dx,$$

$$\varepsilon > 0,$$

$$P(\alpha) = P^*(\alpha) \left(|\alpha| + O(|\alpha|^{-1}) \right),$$

$$P^*(\alpha) = \frac{\rho \omega^2 R(\alpha)}{K(\alpha) - \rho \omega^2 R(\alpha)}.$$

Символ «*» соответствует вычету т.е. $R^*(p_k) = \operatorname{res}_{\alpha=p_k} R(\alpha)$, а члены в фигурных скобках — интегралам по берегам вертикальных разрезов, построенных из точек ветвления κ_j , $j = 1, 2$ (только в случае, когда упругим основанием служит полупространство). Вид функций $R(\alpha)$ и $P^+(\alpha)$ для упругий полупространства и слоя приведен в [10], ξ_k и z_k — вещественные полюса и нули функции $K(\alpha)$ соответственно, p_k — вещественные полюса функции $R(\alpha)$.

Для построения аналитического представления функции, описывающей контактные напряжения $q(y)$, необходимо применить к выражению (2) обратное преобразование Фурье, т.е. вычислить интеграл вида

$$q(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha. \quad (3)$$

Можно убедиться, что функции $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$ имеют одинаковые асимптотики при $|\alpha| \rightarrow \infty$

$$\psi_k(\alpha) = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{C_3} + O(|\alpha|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}),$$

$$k = 1, 2, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда из соотношения (2) получим

$$Q(\alpha) \sim C |\alpha|^{-1-\varepsilon}. \quad (4)$$

Следовательно, для вычисления интеграла (3) можно применить методы теории вычетов, так как он сходится для любого $y \in [0, d]$.

Соотношение для $Q(\alpha)$ (2) можно представить в следующем виде:

$$Q(\alpha) = Q^{\text{I}}(\alpha) + \exp(i\alpha d) Q^{\text{II}}(\alpha),$$

где функции $Q^{\text{I}}(\alpha)$ и $Q^{\text{II}}(\alpha)$ являются регулярными выше контура Γ и имеют асимптотическое поведение вида (4).

Тогда, представив (3) в виде суммы двух интегралов

$$q(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q^{\text{I}}(\alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q^{\text{II}}(\alpha) \exp(i\alpha(d-y)) d\alpha$$

и замыкая контуры интегрирования в нижнюю полуплоскость (для первого интеграла) и в верхнюю (для второго), применим теорему Коши о вычетах. Так как $Q^{\text{II}}(\alpha)$ — регулярная функция при $\operatorname{Im} \alpha > 0$, то второе слагаемое равно нулю. Для первого получим

$$q(y) = \frac{i}{2} \sum_n \psi_1^*(z_n) \times$$

$$\times \left(\sum_k F^*(-p_k) \left(\frac{\psi_2(-p_k)}{p_k - z_n} - \frac{\psi_2(p_k)}{p_k + z_n} \right) - \right.$$

$$\left. - F(-z_n) \psi_2(-z_n) + \sum_m F(-\xi_m) \frac{\psi_2^*(-\xi_m)}{\xi_m - z_n} + \{\Upsilon_1\} \right) \exp(iz_n y) -$$

$$- \frac{i}{2} \sum_m \psi_2^*(\xi_m) \times$$

$$\times \left(\sum_k F^*(-p_k) \left(\frac{\psi_1(-p_k)}{p_k - \xi_m} - \frac{\psi_1(p_k)}{p_k + \xi_m} \right) - \right.$$

$$\left. - F(-\xi_m) \psi_1(\xi_m) + \sum_n F(-z_n) \frac{\psi_1^*(-z_n)}{z_n - \xi_m} + \{\Upsilon_2\} \right) \exp(i\xi_m y),$$

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{\Theta_j} F(u) \left(\frac{\psi_2(u)}{u + z_n} - \frac{\psi_2(-u)}{u - z_n} \right) du,$$

$$\Upsilon_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{\Theta_j} F(u) \left(\frac{\psi_1(u)}{u + \xi_m} - \frac{\psi_1(-u)}{u - \xi_m} \right) du.$$

Следовательно, контактное напряжение можно рассматривать как суперпозицию волн напряжения, имеющих место на границе раздела жидкой и упругой сред. Количество волн, а также их амплитуда и частота определяются физическими и геометрическими характеристиками как объема жидкости, так и упругого основания, а также частотой колебаний заданной в Ω_0 нагрузки.

Полученное представление амплитуды контактного напряжения на границе раздела сред $q(y)$ позволяет построить потенциал скоростей в жидкости $\phi(y, z)$ и вектор амплитуд смещений точек упругой среды $\mathbf{u}(y, z) = \{v(y, z), w(y, z)\}$.

Так как для компонентов трансформанты Фурье (по переменной y) $\mathbf{u}(y, z)$ справедливы соотношения

$$V(\alpha, z) = \frac{2N(\alpha, z)}{\Delta(\alpha)} (Q(\alpha) + Q_0(\alpha)),$$

$$W(\alpha, z) = \frac{2S(\alpha, z)}{\Delta(\alpha)} (Q(\alpha) + Q_0(\alpha)),$$

где $\frac{N(\alpha, z)}{\Delta(\alpha)}$, $\frac{S(\alpha, z)}{\Delta(\alpha)}$ — соответствующие элементы матрицы Грина упругой среды [12], то для определения составляющих $v(y, z)$, $w(y, z)$ вектора \mathbf{u} будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(y, z) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{R}(\alpha, z) Q^{\text{I}}(\alpha) \exp(-i\alpha y) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{R}(\alpha, z) Q^{\text{II}}(\alpha) \exp(i\alpha(d-y)) d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{R}(\alpha, z) \tilde{Q}(\alpha) \exp(-i\alpha(y+s)) d\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{R}(\alpha, z) = \{R_1(\alpha, z), R_2(\alpha, z)\},$$

$$R_1(\alpha, z) = \frac{2N(\alpha, z)}{\Delta(\alpha)}, \quad R_2(\alpha, z) = \frac{2S(\alpha, z)}{\Delta(\alpha)},$$

$$\tilde{Q}(\alpha) = \int_{-l}^l q_0(x-s) \exp(i\alpha x) dx.$$

Вид функций $N(\alpha, z)$, $S(\alpha, z)$ и $\Delta(\alpha)$ определяется моделью упругого основания (слой или полупространство).

Каждый из интегралов представления (5) можно вычислить, применяя теорию вычетов, замыкая контур интегрирования в верхнюю или нижнюю полуплоскость соответственно значению y .

Третий интеграл в правой части (5) определяет поле смещений точек упругого основания, генерируемое распределенной в области Ω_0 нагрузкой в отсутствие бассейна жидкости. При этом первые два интеграла (5) описывают возмущение, вносимое в это волновое поле объемом жидкости.

Используя полученное в [10] соотношение

$$\begin{aligned} Q_c(n) &= \\ &= \int_{\Gamma} Q(\alpha) \frac{i\alpha(\exp(i(\pi n - \alpha d)) - 1)d^2}{\alpha^2 d^2 - \pi^2 n^2} d\alpha, \end{aligned}$$

для потенциала скоростей в жидкости будем иметь

$$\begin{aligned} \phi(y, z) &= \frac{d}{\rho_0 \omega} Q_c(0) \frac{\sin((h-z)\chi_3)}{\sin \chi_3} + \\ &+ \frac{2d}{\rho_0 \omega} \sum_{n=1}^{\infty} Q_c(n) \frac{\text{sh}((h-z)\sigma_{3n})}{\text{sh}(h\sigma_{3n})} \cos \frac{\pi n}{dy}. \end{aligned}$$

В данном представлении ряд сходится абсолютно, поскольку $Q_c(n) \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Для проведения численного анализа все величины были приведены к безразмерному виду (отнесены к характерным величинам), в качестве характерных величин были приняты: $\tilde{h} = 1000$ м; $\tilde{\rho} = 1000$ кг/м³; $\tilde{V} = 1000$ м/с. Приведенная частота при этом задавалась в виде $\omega = \frac{2\pi \tilde{V} \nu}{\tilde{h}}$, где ν — частота в герцах.

В вычислительных экспериментах в качестве жидкой среды выбиралась вода, имеющая свойства, описываемые следующими безразмерными физическими характеристиками: плотность $\rho_0 = 1$, скорость звука $c_0 = 1,5$. Длина бассейна жидкости принималась постоянной $d = 1$.

На рис. 2–4 представлены графики зависимостей распределения амплитуды контактных напряжений на границе раздела сред от возбуждающей частоты колебаний источника для задачи о вибрации бассейна жидкости на упругом полупространстве при различных физических свойствах среды (плотности ρ , а также скоростях продольной v_1 и поперечной v_2 волн) и высоты слоя жидкости ($h = 0,05; 0,1$).

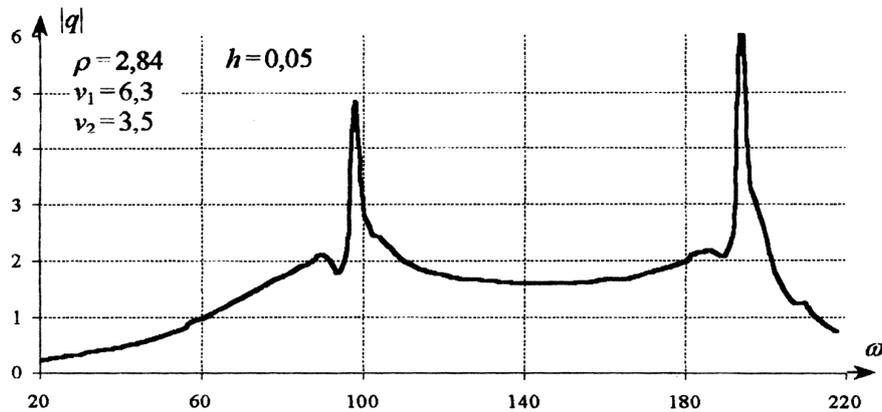


Рис. 2. Распределение $|q|$ для задачи о колебаниях жидкого слоя на упругом полупространстве, $v_1 = 6,3$, $v_2 = 3,5$, $\rho = 2,84$, $h = 0,1$, $s = 0,5$

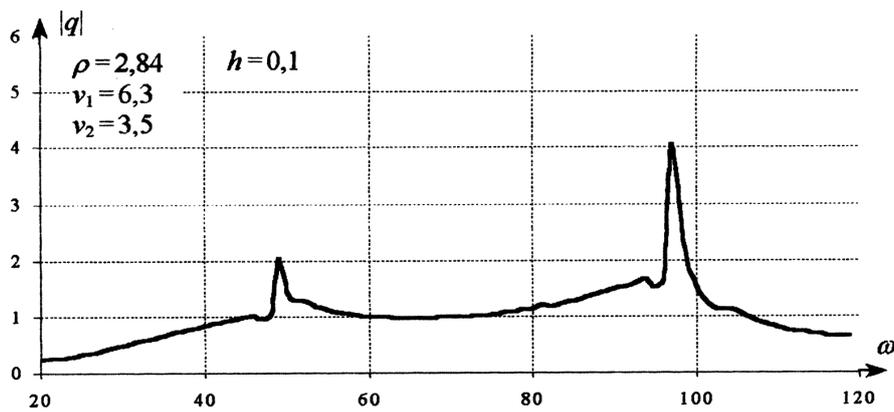


Рис. 3. Распределение $|q|$ для задачи о колебаниях жидкого слоя на упругом полупространстве, $v_1 = 6,3$, $v_2 = 3,5$, $\rho = 2,84$, $h = 0,05$, $s = 0,5$

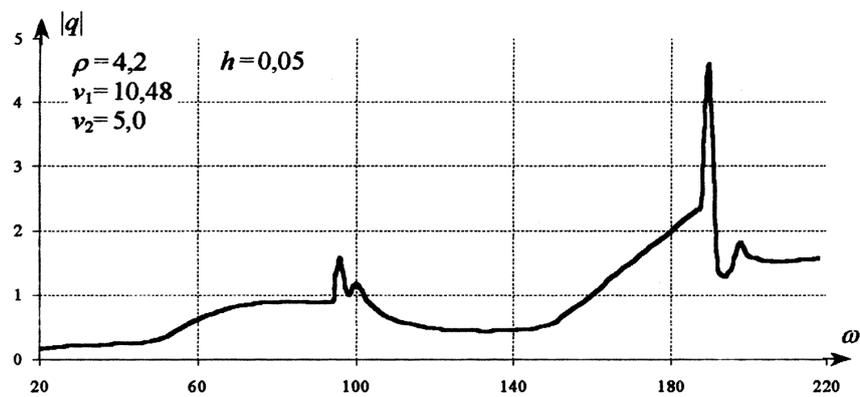


Рис. 4. Распределение $|q|$ для задачи о колебаниях жидкого слоя на упругом полупространстве $v_1 = 10,48$, $v_2 = 5,9$, $\rho = 4,2$, $h = 0,05$, $s = 0,5$

В задаче для упругого полупространства (рис. 2–4) резкий скачок амплитуды $|q|$ возникает в окрестности значений частоты, при которых волновое число продольных колебаний упругого основания совпадает с волновыми числами собственных колебаний жидкости. Увеличение высоты бассейна с жидкостью приводит к уменьшению величин частот, на которых наблюдается резкий рост амплитуды контактных напряжений. Максимум $|q|$ для жестких оснований имеет меньшее значение, чем для мягких при тех же значениях частотных и геометрических параметров.

Для упругого основания в виде слоя с заземленной нижней гранью изменение высоты h бассейна жидкости не оказывает существенного влияния на диапазон опасных частот (рис. 5, 6). Для малых частот возбуждающей нагрузки модуль амплитуды контактных напряжений равномерно распределен по границе раздела сред, с увеличением частоты равномерное распределение нарушается.

Таким образом, в настоящей работе исследована задача о вибрации ограниченного объема жидкости на упругом основании. На основе построенного и решенного авторами в [10] интегрального уравнения первого рода с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов, получены формулы для расчета гидродинамического давления в зоне контакта жидкой и упругой сред, а также потенциала скоростей в жидкости и смещений точек упругого основания. Анализ результатов вычислительных экспериментов позволил установить зависимости напряжений в зоне контакта сред от физических, геометрических и частотных параметров рассматриваемых задач для двух моделей упругого основания: полупространства и слоя с заземленной нижней гранью.

Новизна представленного исследования заключается в проведении анализа динамического поведения гидроупругой системы на основе решения интегрального уравнения, а не использования усредненных характеристик контактных напряжений. Такой подход к решению проблемы позволит повысить точность описания реальных процессов и достоверность оценок возможных последствий вибросейсмического воздействия, что особенно важно в регионах, где искусственные и естественные водохранилища, дамбы, плотины находятся вблизи населенных пунктов. Последующее использование региональной гео-

логической и сейсмической информации в разрабатываемой методике позволит усовершенствовать методы расчета сейсмостойкости гидросооружений, создать эффективные программы мониторинга технического состояния указанных объектов, а также способствовать развитию более глубоких представлений об экологической безопасности строительства и эксплуатации гидротехнических сооружений в сейсмоопасных регионах, к числу которых относится и Краснодарский край.

Литература

1. *Вайнберг А.И.* Надежность и безопасность гидротехнических сооружений. Избранные проблемы. Харьков: Тяжпромавтоматика, 2008. 304 с.
2. *Беллендир Е.Н., Ивашинов Д.А., Стефанюшин Д.В., Финагенов О.М., Шульман С.Г.* Вероятностные методы оценки надежности грунтовых гидротехнических сооружений. СПб.: Изд-во ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. Т. 1. 2003. 553 с., Т. 2. 2004. 524 с.
3. *Сеймов В.М., Островерх Б.Н., Ермоленко А.И.* Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений. Киев: Наук. думка, 1983. 320 с.
4. *Островерх Б.Н.* Численная реализация сейсмического воздействия на гидросооружения // Сейсмостойкое строительство, 1976. Сер. XIV. Вып. 7. С. 34–37.
5. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / Под ред. В.М. Ляхтера и Ю.С. Яковлева. М.: Энергия, 1976. 392 с.
6. *Корнев Б.Г.* Импульсные воздействия на цилиндрические резервуары, наполненные жидкостью. В кн.: Строительство в сейсмических районах. М.: Стройиздат, 1957. С. 35–44.
7. *Корнев Б.Г.* Действие импульса на цилиндрические и призматические резервуары, наполненные жидкостью. В кн.: Строительная механика. М.: Стройиздат, 1966. С. 213–266.
8. *Климов М.А.* Определение присоединенной массы жидкости в случае неосесимметричных колебаний днищ резервуаров. В кн.: Динамические напряжения и деформации в элементах энергетического оборудования. М.: Наука, 1977. С. 76–83.
9. *Трофимчук А.Н.* Влияние жидкости на основную частоту колебаний бассейна конечной жесткости на упругой полуплоскости В кн.: Математические методы механики жидкости и газа. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1981. С. 119–126.
10. *Рубцов С.Е., Павлова А.В.* К исследованию динамических смешанных задач для ограниченного объема жидкости на упругом основа-

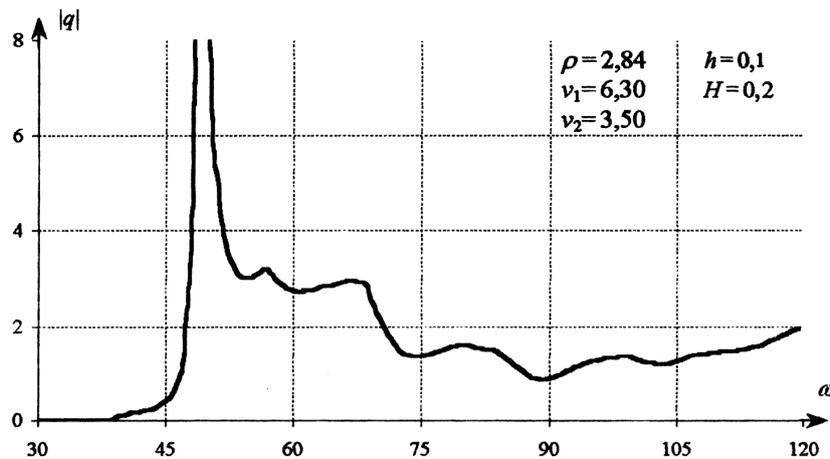


Рис. 5. Распределение $|q|$ для задачи о колебаниях жидкого слоя на упругом слое $\nu_1 = 10,48$, $\nu_2 = 5,9$, $\rho = 4,2$, $h = 0,1$, $H = 0,2$, $s = 0,5$

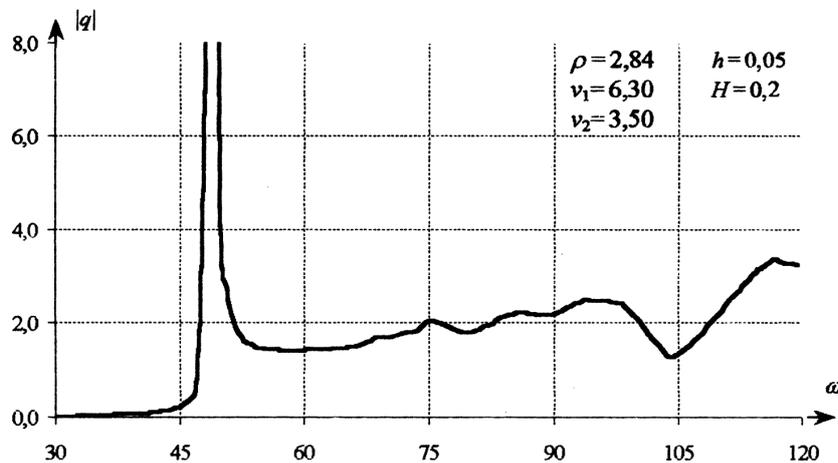


Рис. 6. Распределение $|q|$ для задачи о колебаниях жидкого слоя на упругом слое $\nu_1 = 10,48$, $\nu_2 = 5,9$, $\rho = 4,2$, $h = 0,05$, $H = 0,2$, $s = 0,5$

нии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 4. С. 75–81.

11. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
12. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
13. Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С., Зарецкая М.В. Исследование напряженного состояния слоистой среды с жидким включением // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 1. С. 71–78.
14. Рубцов С.Е. Исследование установившихся колебаний ограниченного объема жидкости на упругом слое // Известия высших учебных

заведений, Северо-Кавказский регион, естественные науки, Ростов-на-Дону, 2000. № 1. С. 49–51.

References

1. Vajnberg A.I. *Nadezhnost' i bezopasnost' gidrotekhnicheskikh sooruzhenij. Izbrannye problemy* [Reliability and safety of hydraulic structures. Selected Problems], Har'kov, Tyazhpromavtomatika Pub., 2008. 304 p. (In Russian)
2. Bellendir E.N., Ivashincov D.A, Stefanishin D.V., Finagenov O.M., Shul'man S.G. *Veroyatnostnye metody ocenki nadezhnosti gruntovykh gidrotekhnicheskikh sooruzhenij* [Probabilistic methods for assessing the reliability of groundwater hydraulic structures], Saint-Petersburg, Izd-vo VNIIG im. B.E. Vedeneeva. T. 1. 2003. 553 p., T. 2. 2004. 524 p. (In Russian)

3. Sejmov V.M., Ostroverh B.N., Ermolenko A.I. *Dinamika i sejsmostojkost' gidrotekhnicheskikh sooruzhenij* [The dynamics and earthquake resistance of hydraulic structures]. Kiev, Nauk. dumka, 1983. 320 p. (In Russian)
4. Ostroverh B.N. *Chislennaya realizaciya sejsmicheskogo vozdejstviya na gidrosooruzheniya* [Numerical realization of the seismic effect on hydraulic structures]. Sejsmostojkoe stroitel'stvo [Seismic resistant construction], 1976. Ser. XIV. Is. 7. pp. 34–37. (In Russian)
5. Lyahtera V.M., Ykovleva Y.S. (eds.) *Dinamika sploshnyh sred v raschetah gidrotekhnicheskikh sooruzhenij* [Dynamics of continuous media in the calculation of hydraulic structures]. Moscow, Energiya, 1976. 392 p.
6. Korenev B.G. Impul'snye vozdejstviya na cilindricheskie rezervuary, napolnennye zhidkost'yu. V kn.: *Stroitel'stvo v sejsmicheskikh rajonah* [Impulse effects on cylindrical tanks filled with liquid]. Moscow, Strojizdat Pub., 1957. pp. 35–44.
7. Korenev B.G. Dejstvie impul'sa na cilindricheskie i prizmaticheskie rezervuary, napolnennye zhidkost'ju. V kn.: *Stroitel'naja mehanika*. [Pulse action on the cylindrical and prismatic tanks filled with liquid. In book: Structural mechanics]. Moscow, Strojizdat Pub., 1966. pp. 213–266. (In Russian)
8. Klimov M.A. Opredelenie prisoedinennoj massy zhidkosti v sluchae neosesimmetrichnyh kolebanij dnishh rezervuarov. V kn.: *Dinamicheskie naprjazheniya i deformacii v jelementah jenergeticheskogo oborudovaniya* [Defining the associated mass of liquid in the case of axisymmetric vibrations of tank bottoms. Proc: Dynamic stresses and strains in power equipment elements]. Moscow, Nauka Pub., 1977. pp. 76–83. (In Russian)
9. Trofimchuk A.N. Vliyanie zhidkosti na osnovnyu chastotu kolebanij bassejna konechnoj zhestkosti na uprugoj poluploskosti [Influence of a liquid on the fundamental frequency of oscillations of a finite stiffness pool on an elastic half-plane]. *Matematicheskie metody mekhaniki zhidkosti i gaza* [Mathematical methods of fluid and gas mechanics]. Dnepropetrovsk, DSU Pub., 1981. pp. 119–126.
10. Rubtsov S.E., Pavlova A.V., K issledovaniyu dinamicheskikh smeshannyh zadach dlya ogranichenogo ob"ema zhidkosti na uprugom osnovanii [To study of the mixed dynamic problems for a limited volume of fluid on an elastic foundation]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 4, pp. 75–81. (In Russian)
11. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problem of elasticity theory]. Moscow, Nauka Pub., 1974, 455 p. (In Russian)
12. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastei* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 319 p. (In Russian)
13. Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Telyatnikov I.S., Zaretskaja M.V. Issledovanie naprjazhennogo sostojaniya sloistoj sredy s zhidkim vkljucheniem [Investigation of the stress state of layered medium with liquid inclusion]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 1, pp. 71–78. (In Russian)
14. Rubtsov S.E. Issledovanie ustanovivshijsja kolebanij ogranichenogo ob"ema zhidkosti na uprugom sloe [The study stationary vibrations limited volume of fluid in the elastic layer]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij, Severo-Kavkazskij region, estestvennye nauki* [Proc. of the Universities. North-Caucasian region. Natural Sciences], Rostov-on-Don, 2000. no 1. pp. 49–51. (In Russian)