

УДК 539.3

## РАВНОВЕСИЕ УПРУГОГО КЛИНА С ТОНКИМ ПОКРЫТИЕМ, ОСЛАБЛЕННОГО ВНУТРЕННЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Соболь Б. В., Рашидова Е. В.

EQUILIBRIUM STATE OF THE INTERNAL CRACK IN INFINITE ELASTIC WEDGE WITH THE THIN COATING

Sobol B. V., Rashidova E. V.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, 344000, Russia  
e-mail: b.sobol@mail.ru

*Abstract.* The research of stress concentration in the neighborhood of internal crack's tops, which is on a bisector of an infinite elastic wedge, is conducted. The normal efforts are applied to crack's coast for providing her opening. Wedge's sides are supported with a thin flexible coating, free from tension from outer side. Coating influence on an intense and deformable state of a wedge is modelled by a special boundary condition which correctness is confirmed experimentally. Mellin's integral transformation has allowed to reduce the task to the solution of the singular integrated equation of the first kind with Cauchy's kernel of rather derivative function of crack opening. Solutions of the integral equation constructed by the collocation method. With various combinations of geometric and physical parameters of the problem. The aim of the research was to determine the values of the influence factor – a reduced stress intensity factor in the neighborhood of the crack's tops. Analysis of influences of task's geometrical and physical parameters on size of the studied parameter is carried. In particular, it is established that with increasing the wedge's angle, with unchanged other parameters, the values of the influence factor are increasing; the increasing in the thickness and hardness of the coating leads to a decrease of the influence factor; the increase of the relative crack's length or approaching to wedge's top implies an increase of influence factor. The known special cases of task are considered, their results are compared with available data published.

*Keywords:* crack, infinite elastic wedge, thin coating, Mellin's integral transformation, collocation method, stress intensity factor, influence factor.

### Введение

Потеря работоспособности деталей машин, инструментального оборудования и механизмов в большинстве случаев связаны с износом их поверхностного слоя. Перспективным направлением создания износостойких и высоконадежных деталей и механизмов являются технологии нанесения тонких функциональных покрытий, повышающих их специальные свойства. При этом тонкие покрытия, выполняющие защитные функции, меняют механические свойства изделий, что ставит задачи разработки и развития методов оценки напряженного состояния в конструкциях, усиленных тонкими покрытиями, на первоочередное место в современном технологическом производстве. Наряду с этим, учет

таких факторов, как наличие скрытых внутренних дефектов, трещин, позволяет более точно проводить оценку работоспособности изделий и конструкций.

Первые результаты исследований изучения тонких покрытий, в которых можно пренебречь изгибной жесткостью, представлены в работах [1–4]. В.М. Александровым и С.М. Мхитаряном [5] собраны и обобщены результаты работы многих авторов по контактным задачам для тел с тонкими покрытиями. В работах [6–8] рассмотрены смешанные задачи для составных тел, ослабленных трещинами. Задачи о влиянии гибкого покрытия на прочность пластинок, ослабленных различными системами трещин рассмотрены в [9]. В [10] исследована задача о взаимодей-

Соболь Борис Владимирович, д-р тех. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: b.sobol@mail.ru

Рашидова Елена Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: el.rash@mail.ru

ствии бесконечного или конечного стрингера с упругой полуплоскостью, содержащей вертикальный разрез.

Ряд исследований посвящен изучению концентрации напряжений в окрестности вершин поперечных трещин в полубесконечных упругих телах при разных условиях на границах. Некоторые результаты приведены в работах [11–14], а также в справочнике по коэффициентам интенсивности напряжений [15].

Проведены исследования задачи в двумерной постановке для упругого клина с боковыми гранями, свободными от напряжений, содержащего прямолинейные трещины на оси симметрии. Получены приближенные и точные решения в случае задачи, когда конечная трещина исходит из вершины клина [16–32, 37], когда полубесконечная трещина начинается на некотором расстоянии от вершины клина [33–37], а также в случае, когда клин содержит внутреннюю конечную трещину [25, 37]. В работе [38] получены асимптотические решения контактной задачи для трехмерного клина. В [39] численно решена двумерная задача Лапласа об упругой клиновидной области в условиях плоского напряженного состояния.

Авторам данного исследования неизвестны публикации, посвященные исследованию задач, рассматривающих клин, усиленный тонким гибким покрытием.

В данной работе наличие тонкого гибкого покрытия моделируется математически, применением специального граничного условия, сформулированного на основе исследования [5]. В различных диапазонах изменения геометрических и физических параметров построены решения методом коллокации по технологии, описанной в [14].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный упругий клин  $r \geq 0$ ,  $|\varphi| \leq \alpha$ , ослабленный прямолинейной конечной трещиной, расположенной на биссектрисе его угла  $\varphi = 0$ ,  $a \leq r \leq b$  (рис. 1). К берегам трещины приложены нормальные усилия интенсивности  $-p(r)$ , обеспечивающие ее раскрытие. Грани клина покрыты тонкой гибкой накладкой. Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений при  $r \rightarrow \infty$  отсутствуют. Введем обозначения для разрывов функций в области трещины (при

$\varphi = 0$ ,  $a \leq r \leq b$ )

$$[v(r, \varphi)] = \gamma(r), \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] = \beta(r); \quad (1.1)$$

$$[f] = f|_{x=-0} - f|_{x=+0}.$$

Здесь и далее  $u(r, \varphi)$  и  $v(r, \varphi)$  — соответственно, радиальная и тангенциальная компоненты вектора перемещений.

Решение задачи находим из основных уравнений теории плоской деформации в полярной системе координат (уравнений Ламе) и соотношений закона Гука

$$(1 - 2\nu) Lu + \frac{\partial \theta}{\partial r} - 2(1 - 2\nu) \frac{1}{r^2} v'_\varphi = 0,$$

$$(1 - 2\nu) Lv + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + 2(1 - 2\nu) \frac{1}{r^2} u'_\varphi = 0, \quad (1.2)$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$\theta = u'_r + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} v'_\varphi,$$

$\nu$  — коэффициент Пуассона.

Выражения для напряжений

$$\sigma_\varphi = 2G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \theta \right), \quad (1.3)$$

$$\tau_{r\varphi} = G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v \right),$$

$G$  — модуль сдвига.

## 2. Интегральное уравнение

Используем интегральное преобразование Меллина [40]

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(s, \varphi) r^{-s} ds,$$

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} V(s, \varphi) r^{-s} ds,$$

$$U(s, \varphi) = \int_0^\infty u(\rho, \varphi) \rho^{s-1} d\rho,$$

$$V(s, \varphi) = \int_0^\infty v(\rho, \varphi) \rho^{s-1} d\rho.$$

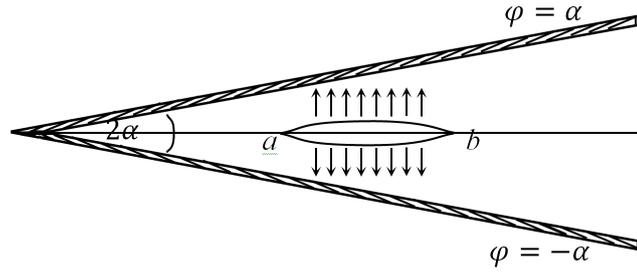


Рис. 1. Постановка задачи

В результате уравнения равновесия (1.2) сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(1 + \varkappa) (s^2 - 1) U + (\varkappa - 1) U'' - 2(s + \varkappa) V' = 0, \quad (2.1)$$

$$(\varkappa - 1) (s^2 - 1) V + (1 + \varkappa) V'' - 2(s - \varkappa) U' = 0, \\ \varkappa = 3 - 4\nu.$$

Общее решение уравнений (2.1) имеет вид

$$U = (s + \varkappa) [a_1 \sin(s + 1) \varphi + a_2 \cos(s + 1) \varphi] + (s - 1) [a_3 \sin(s - 1) \varphi + a_4 \cos(s - 1) \varphi],$$

$$V = -(s - \varkappa) [a_1 \cos(s + 1) \varphi - a_2 \sin(s + 1) \varphi] - (s - 1) [a_3 \cos(s - 1) \varphi - a_4 \sin(s - 1) \varphi],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{G}{i\pi} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} [a_1 \sin(s + 1) \varphi + a_2 \cos(s + 1) \varphi + a_3 \sin(s - 1) \varphi + a_4 \cos(s - 1) \varphi] s(s - 1) r^{-s-1} ds,$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{G}{i\pi} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} ((s + 1) [a_1 \cos(s + 1) \varphi - a_2 \sin(s + 1) \varphi] + (s - 1) [a_3 \cos(s - 1) \varphi - a_4 \sin(s - 1) \varphi]) sr^{-s-1} ds,$$

В силу симметрии задачи относительно оси  $\varphi = 0$ , далее рассматриваем область  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ .

Запишем граничные условия задачи:

$$\varphi = 0: \quad \sigma_\varphi = -p(r) \quad \text{при } a \leq r \leq b, \quad (2.2)$$

$$v = 0, \quad \text{при } 0 \leq r < a \text{ и } r > b; \quad (2.3)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad r \geq 0,$$

$$\varphi = \alpha: \quad \sigma_\varphi = 0, \\ 4G_1 h u_r'' = (1 - \nu_1) \tau_{r\varphi} - 2\nu_1 h \sigma_\varphi'. \quad (2.4)$$

Условие (2.4) моделирует влияние тонкого гибкого покрытия на напряженно-деформируемое состояние рассматриваемого тела. Оно вытекает из асимптотического анализа решения задачи для упругой полосы при принятых допущениях [5].

Учитывая неизвестный разрыв тангенциальной компоненты вектора перемещений (1.1), удовлетворим граничному условию (2.3) и условию (2.4). В результате задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений для определения  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ :

$$a_1(1 + s) + a_3(-1 + s) = 0,$$

$$a_1(-s + \varkappa) - a_3(-1 + s) = \gamma^*,$$

$$a_1 \sin(1 + s) \alpha + a_2 \cos(1 + s) \alpha + a_3 \sin(s - 1) \alpha + a_4 \cos(s - 1) \alpha = 0,$$

$$\begin{aligned}
& 2G_1 h (s+1) r^{-1} ((s+\varkappa) \times \\
& \quad \times [a_1 \sin(s+1)\alpha + a_2 \cos(s+1)\alpha] + \\
& (s-1) [a_3 \sin(s-1)\alpha + a_4 \cos(s-1)\alpha]) = \\
& \quad = (1-\nu_1) G((s+1) \times \\
& \quad \times [a_1 \cos(s+1)\alpha - a_2 \sin(s+1)\alpha] + \\
& + (s-1) [a_3 \cos(s-1)\alpha - a_4 \sin(s-1)\alpha]) - \\
& \quad - 2\nu_1 h G(s-1) \times \\
& \times [(s+1) (a_1 \cos(s+1)\alpha - a_2 \sin(s+1)\alpha) + \\
& + (s-1) (a_3 \cos(s-1)\alpha - a_4 \sin(s+1)\alpha)].
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\gamma(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \gamma^*(s) r^{-s} ds, \\
\gamma^*(s) &= \int_0^\infty \gamma(\rho) \rho^{s-1} d\rho.
\end{aligned}$$

Находим

$$a_1 = \frac{\gamma^*}{1+\varkappa}, \quad a_2 = \frac{-2\gamma^* \Omega_{12}}{1+\varkappa \Omega_{11}},$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \\
&= 4G_1 h (1+s) (1-\nu) (\cos 2\alpha + \cos 2s\alpha) + \\
& \quad + Gr (1-\nu_1) (s \sin 2\alpha + \sin 2s\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{12} &= Gr(1-\nu_1)(s \sin^2 \alpha + \sin^2 s\alpha) + \\
& \quad + 2G_1 h (1+s) (1-\nu) (\sin 2\alpha + \sin 2s\alpha),
\end{aligned}$$

$$a_3 = -\frac{(1+s)\gamma^*}{(s-1)(1+\varkappa)},$$

$$a_4 = \frac{-2(s+1)\gamma^* \Omega_{13}}{(s-1)(1+\varkappa) \Omega_{11}}.$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{13} &= Gr(1-\nu_1)(s \sin^2 \alpha - \sin^2 s\alpha) + \\
& \quad + 2G_1 h (1+s) (1-\nu) (\sin 2\alpha - \sin 2s\alpha),
\end{aligned}$$

Удовлетворяя условию (2.2), получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{4G}{i\pi(1+\varkappa)} \int_a^b \frac{\gamma(\rho)}{\rho} d\rho \times \\
& \quad \times \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} L(s, r) \left(\frac{\rho}{r}\right)^s s ds = -rp(r).
\end{aligned}$$

Здесь

$$L(s, r) = -\frac{\Omega_{21}}{\Omega_{11}},$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{21} &= Gr(1-\nu_1)(s^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 s\alpha) + \\
& \quad + 2G_1 h (1+s) (1-\nu) (s \sin 2\alpha - \sin 2s\alpha).
\end{aligned}$$

Используем замену переменных  $s = iu \Rightarrow u = -is, ds = i du, s ds = -u du,$

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^{iu} = \cos\left(u \ln \frac{\rho}{r}\right) + i \sin\left(u \ln \frac{\rho}{r}\right).$$

Учитывая, что  $\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \cos(iz) = \operatorname{ch} z, \sin^2(s\alpha) = -\operatorname{sh}^2(u\alpha).$

$$\tilde{L}(u, r) = -\frac{\Omega_{31}}{\Omega_{32}},$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{31} &= Gr(1-\nu_1) (\operatorname{sh}^2 u\alpha - u^2 \sin^2 \alpha) + \\
& \quad + 2iG_1 h (1+iu) (1-\nu) (u \sin 2\alpha - \operatorname{sh} 2u\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{32} &= \\
&= 4G_1 h (1+iu) (1-\nu) (\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2u\alpha) + \\
& \quad + iGr(1-\nu_1) (u \sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2u\alpha).
\end{aligned}$$

Представим

$$\tilde{L}(u, r) = \operatorname{Re}(\tilde{L}(u, r)) + i \operatorname{Im}(\tilde{L}(u, r)),$$

где

$$\operatorname{Re}(\tilde{L}(u, r)) = \frac{\Omega_{41}}{\Omega_{42}},$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{41} &= 8GG_1 hr (1+u^2) (1-\nu) \times \\
& \quad \times (1-\nu_1) \sin^2 \alpha \operatorname{sh}^2 u\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{42} &= 16G_1^2 h^2 (1-\nu)^2 (\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2u\alpha)^2 + \\
& \quad + (4G_1 hu(1-\nu)(\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2u\alpha) + \\
& \quad + Gr(1-\nu_1)(u \sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2u\alpha))^2,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(\tilde{L}(u, r)) = \frac{\Omega_{51}}{\Omega_{42}},$$

$$\Omega_{51} = - (8G_1^2 h^2 (1 - \nu)^2 (\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2u\alpha) \times \text{ния относительно производной искомой функции}$$

$$\times (u \sin 2\alpha - \operatorname{sh} 2u\alpha) -$$

$$(Gr(\nu_1 - 1) (\operatorname{sh}^2 u\alpha - u^2 \sin^2 \alpha) -$$

$$- 2G_1 hu (1 - \nu) (u \sin 2\alpha - \operatorname{sh} 2u\alpha)) \times$$

$$\times (4G_1 hu (1 - \nu) (\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2u\alpha) +$$

$$Gr (1 - \nu_1) (u \sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2u\alpha)),$$

$$\frac{4G}{\pi(1 + \varkappa)} \int_a^b \gamma'(\rho) d\rho \times$$

$$\times \int_0^\infty \left( 2 \operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \cos \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) -$$

$$\tilde{L}(u, r) \left( \frac{\rho}{r} \right)^{iu} = \operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \cos \left( u \ln \frac{\eta}{r} \right) u -$$

$$- \operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \sin \left( u \ln \frac{\eta}{r} \right) u +$$

$$+ iu \left( \operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \sin \left( u \ln \frac{\eta}{r} \right) +$$

$$+ \operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \cos \left( u \ln \frac{\eta}{r} \right) \right).$$

$$- 2 \operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) \right) du = -rp(r).$$

Проведен анализ подынтегральных функций при  $u \rightarrow \infty$

$$\operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) = O(e^{-2u\alpha}),$$

$$\operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) = -\frac{1}{2} + O(e^{-2u\alpha}), \quad 0 < \alpha < \pi.$$

При интегрировании учтем, соответственно, четность  $\operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right)$  и нечетность  $\operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right)$  по переменной  $u$ . В результате получаем интегральное уравнение

$$\frac{4G}{\pi(1 + \varkappa)} \int_a^b \frac{\gamma(\rho)}{\rho} d\rho \times$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty \left( \operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) +$$

$$+ \operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \cos \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) \right) u du =$$

$$= -rp(r). \quad (2.5)$$

С учетом четности подынтегральной функции внутреннего интеграла, (2.5) принимает вид

$$\frac{4G}{\pi(1 + \varkappa)} \int_a^b \frac{\gamma(\rho)}{\rho} d\rho \times$$

$$\times \int_0^\infty 2 \left( \operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) +$$

$$+ \operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \cos \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) \right) u du = -rp(r)$$

Произведя интегрирование по частям, сведем задачу к решению интегрального уравне-

Вводим обозначения

$$\theta = \frac{G}{1 - \nu}, \quad \frac{4G}{\pi(1 + \varkappa)} = \frac{\theta}{\pi},$$

$$K(u, r) = 2 \operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \cos \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) -$$

$$- \left( 2 \operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) + 1 \right) \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) +$$

$$+ \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right),$$

$$M(u, r) = 2 \operatorname{Re} \left( \tilde{L}(u, r) \right) \cos \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) -$$

$$- \left( 2 \operatorname{Im} \left( \tilde{L}(u, r) \right) + 1 \right) \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right),$$

тогда

$$K(u, r) = M(u, r) + \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right).$$

$$\int_a^b \gamma'(\rho) d\rho \int_0^\infty k(r, \rho) du = -\frac{\pi}{\theta} rp(r),$$

Здесь

$$k(r, \rho) = \int_0^\infty \left( M(u, r) + \sin \left( u \ln \frac{\rho}{r} \right) \right) du.$$

Переходим к безразмерным переменным, используя замены

$$r = a\eta(x), \quad \rho = a\eta(\xi),$$

$$\eta(z) = \exp\left(\frac{1+z}{\mu}\right),$$

$$\mu = 2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}, \quad d\rho = a\eta(\xi)\frac{1}{\mu}d\xi,$$

$$\varphi(\xi) = \gamma'(a\eta(\xi))\eta(\xi),$$

Учитывая значение интеграла  $\int_0^\infty \sin(ut) du = 1/t$  [41], получаем

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[ \frac{\mu}{\xi-x} + \int_0^\infty M(u, a\eta(x)) du \right] d\xi = -\frac{\pi\mu}{\theta}q(x), \quad (2.6)$$

$$|x| \leq 1,$$

$$q(x) = \eta(x)p(a\eta(x)),$$

Таким образом, исследуемая задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения I рода с ядром Коши.

### 3. Решение интегрального уравнения

Построим решение интегрального уравнения (2.6) методом коллокаций в виде линейной комбинации базисных функций, явно учитывающую особенность в окрестности вершин трещины,

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{n=1}^m X_n T_n(\xi), \quad (3.1)$$

где  $T_n$  и  $U_n$  — полиномы Чебышева первого и второго рода,  $X_n$  — коэффициенты при базисных функциях,  $m$  — количество узловых точек. Узловые точки — корни полиномов Чебышева

$$x_i = \cos \frac{\pi(2i-1)}{2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Учитывая (3.1), сводим задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $X_i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi f(x_1) \\ \pi f(x_2) \\ \dots \\ \pi f(x_m) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

где  $f(x) = -\mu q(x)/\theta$ .

Вычисление коэффициентов

$$a_{ij} = \int_{-1}^1 T_j(\xi) \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \times \left[ \frac{1}{\xi-x_i} + \frac{1}{\mu} \int_0^\infty M(u, a\eta(x)) du \right] d\xi. \quad (3.3)$$

системы (3.2) осуществляется в два этапа. Сингулярная часть (т.е. интеграл (3.3) без второго слагаемого в квадратных скобках) представляет собой табличный интеграл [41]; он равен  $\pi U_{n-1}(x)$ , а регулярная часть находится численно. Зная  $\varphi(x)$ , легко установить значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности вершин трещины

$$K_I = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left( \theta \sqrt{2\pi(1+x)} \varphi(x) \right);$$

$$K_I = - \lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \theta \sqrt{2\pi(1-x)} \varphi(x) \right).$$

При выборе числа узлов коллокации необходимо учитывать значение параметра  $\lambda = l/(a+l)$ , с его увеличением снижается точность решения. Последующие вычисления показывают, что при  $\lambda = 0,75$  нахождение решения с точностью не менее 95 % требует использования, как минимум, 8 узлов коллокации. Столь высокая эффективность метода в данном случае объясняется удачным подбором базисных функций.

### 4. Обсуждение результатов

Для исследования интенсивности концентрации напряжений в окрестности вершин трещины используется *фактор влияния*  $N(\pm 1)$  — приведенный коэффициент интенсивности напряжений

$$N(\pm 1) = \frac{K_I}{K_{I\infty}}, \quad (4.1)$$

$K_I$  — коэффициент интенсивности нормальных напряжений (КИН) в исследуемом случае;  $K_{I\infty}$  — соответствующая величина в классическом случае, в задаче об изолированной трещине в неограниченной упругой среде [42].

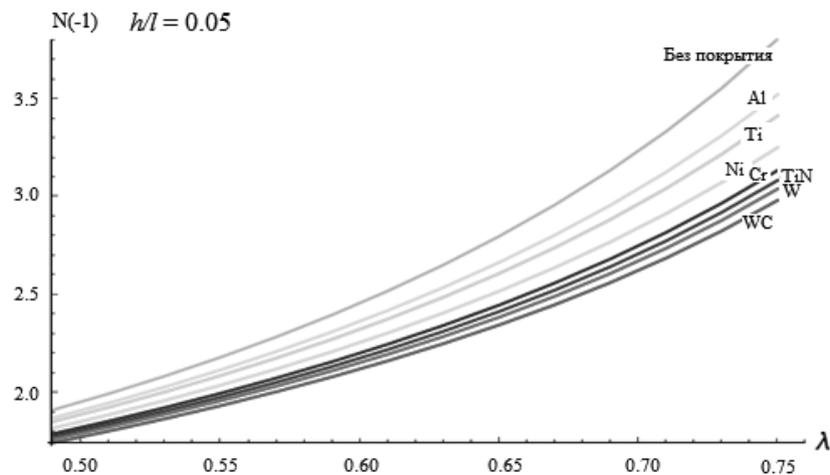


Рис. 2. Результаты расчетов зависимости фактора влияния от положения трещины для случаев разных материалов накладки. Относительная толщина накладки  $h/l = 0,05$

Таким образом, фактор влияния характеризует вклад геометрических и физических параметров задачи в значения КИН. Расчеты выполнены для накладок из разных материалов: PTFE — тефлон ( $\nu_1 = 0,46$ ,  $e = 0,0025$ ), Al — алюминий ( $\nu_1 = 0,34$ ,  $e = 0,35$ ), Ti — титан ( $\nu_1 = 0,32$ ,  $e = 0,56$ ), Ni — никель ( $\nu_1 = 0,28$ ,  $e = 1,02$ ), Cr — хром ( $\nu_1 = 0,35$ ,  $e = 1,44$ ), TiN — нитрид титана ( $\nu_1 = 0,28$ ,  $e = 1,80$ ), W — вольфрам ( $\nu_1 = 0,30$ ,  $e = 2,10$ ), WC — карбид вольфрама ( $\nu_1 = 0,26$ ,  $e = 2,66$ );  $e = E_2/E_1$ ,  $E_1$  и  $E_2$  — модули Юнга материалов покрытия и клина; во всех расчетах материалом клина выбрана конструкционная сталь ( $\nu_2 = 0,28$ ,  $E_2 = 200$  ГПа). Положение трещины относительно вершины клина определяется параметром  $\lambda = l/(a + l)$  ( $l = (b - a)/2$  — полудлина трещины, в расчетах равна 0,2).

На рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов зависимости фактора влияния от положения трещины относительно вершины клина. Рассмотрены случаи: разной относительной толщины накладки ( $h/l = 0,01$ ; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05); когда материал накладки более мягкий (алюминий), и когда он более жесткий (карбид вольфрама), чем основной материал клина. Выявлено, что, чем мягче материал накладки, тем меньше его влияние на раскрытие трещины, причем увеличение толщины накладки для мягких материалов не является сдерживающим фактором. Например, в случае материала накладки — тефлон, наличие покрытия практически не влия-

ет на результат. Если материал накладки более жесткий, чем материал клина, накладка оказывает сдерживающее влияние, причем, чем больше ее толщина, тем больше влияние.

Проведено исследование зависимости фактора влияния от угла раствора клина; результаты расчетов представлены на рис. 4. В расчетах принята относительная толщина накладки  $h/l = 0,02$ . Расположение трещины определяется параметром  $\lambda = l/(a + l)$  ( $\lambda = 0,75$ ,  $\lambda = 0,65$ ,  $\lambda = 0,55$ ). В частности, установлено, что с увеличением угла раствора клина влияние накладки уменьшается. Так, для углов больших, чем  $\pi/2$  значения фактора влияния «стабилизируются» и уже не зависят от угла раствора клина.

Исследованы известные частные случаи рассматриваемой задачи. Так, в случае отсутствия покрытия ( $h = 0$ ), а также в случаях, когда угол раствора клина соответствует полуплоскости  $\alpha = \pi/2$  и плоскости  $\alpha = \pi$  (при толщине покрытия  $h = 0$ ), результаты сопоставлены с имеющимися в литературе [12, 14, 23, 36] данными с точностью до 2 %.

При изучении сходимости решения, полученного методом коллокаций, проведено сравнение значений фактора влияния, рассчитанного методом коллокаций с разным числом  $n$  узловых точек ( $n = 8, 10, 15$ ). Установлено, что во всех трех случаях, в достаточно широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров задачи ( $\lambda < 0,75$ ), различие результатов не превышает 3 %.

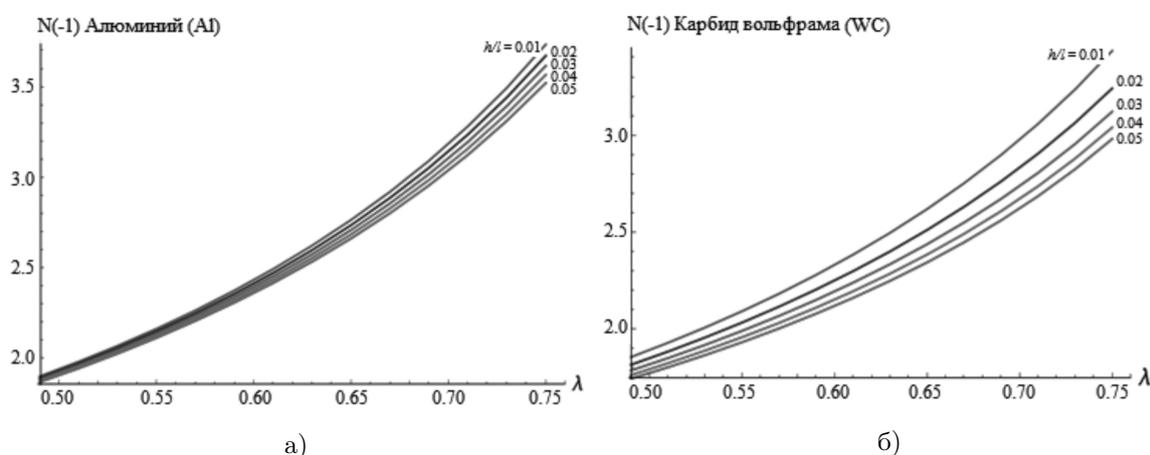


Рис. 3. Результаты расчетов зависимости фактора влияния от положения трещины для случаев разной относительной толщины ( $h/l = 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05$ ) и разных материалов накладки. Материал накладки в случае а) алюминий; б) карбид вольфрама

### Выводы

Целью исследования в каждом конкретном случае стало определение значений фактора влияния — приведенного коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершин трещины. Проведен анализ влияния геометрических и физических параметров задачи на величину исследуемого параметра. В частности, установлено:

- увеличение толщины и жесткости покрытия ведет к снижению фактора влияния;
- увеличение относительной длины трещины или ее приближение к вершине клина влечет увеличение фактора влияния.
- с увеличением угла раствора клина влияние покрытия на интенсивность концентрации напряжений в окрестности вершин снижается.

Рассмотрены известные частные случаи исследуемой задачи. Так, в случае отсутствия покрытия, а также в случае, когда угол раствора клина соответствует полуплоскости, результаты сопоставлены с имеющимися в литературе данными.

### Литература

1. Melan E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums // Archive J. Appl. Mech., 1938. No. 9/2. P. 116-126.
2. Рейсснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек. Упругие оболочки. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 263 с.
3. Koiter W., Warner T. On the nonlinear theory of thin elastic shells // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1966. Vol. 69, No. 1. P. 1-54.
4. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1979. 486 с.
6. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Изв. НАН Армении, механика. 1995. Т. 48, № 4. С. 57-65.
7. Арутюнян Л.А. Плоские задачи со смешанными краевыми условиями для составной плоскости с трещинами // Изв. НАН Армении. Механика, 2012. Т. 65, № 3. С. 5-9.
8. Rizk A. Stress intensity factor for an edge crack in two bonded dissimilar materials under convective cooling // Theoretical and Appl. Fracture Mech. 2008. Vol. 49. No. 3. P. 251-267. doi: 10.1016/j.tafmec.2008.02.006
9. Шацкий И.П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // Прикладная механика и техническая физика, 1989. № 5. С. 163-165.
10. Antipov Y., Bardzokas D., Exadaktylos G. Partially stiffened elastic half-plane with an edge crack // International Journal of Fracture. 1997. Vol. 85. No. 3. P. 241-263. doi: 10.1023/A:1007428813410
11. Cook T.S., Erdogan F. Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface // Int. J. Engng Sci. 1972. Vol. 10. No. 8. P. 677-697. doi: 10.1016/0020-7225(72)90063-8
12. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.

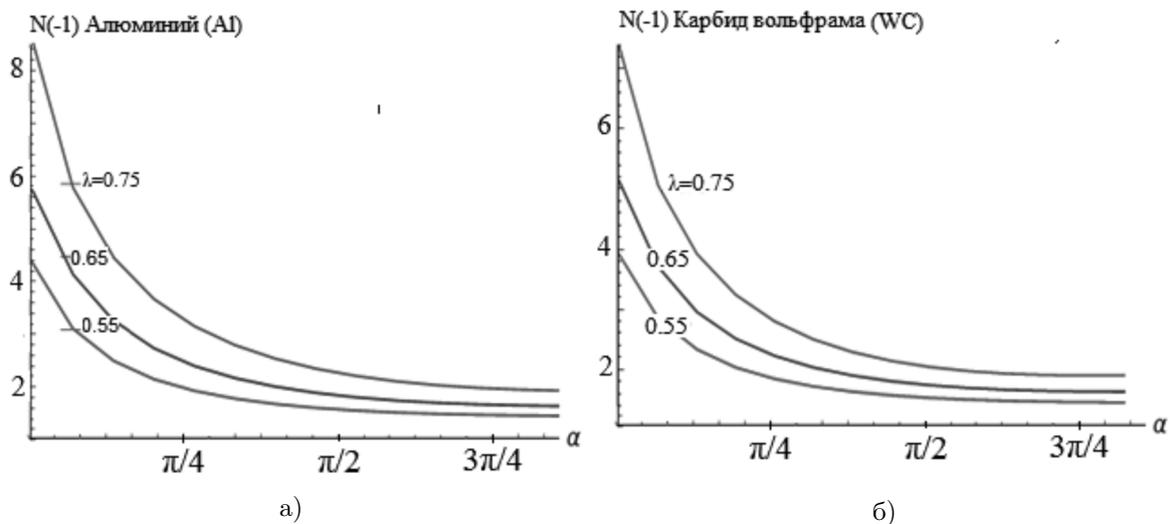


Рис. 4. Результаты расчетов зависимости фактора влияния от угла раствора клина для разного положения трещины (случаи: а) материал покрытия — алюминий; б) материал покрытия — карбид вольфрама). В расчетах относительная толщина накладки  $h/l = 0,02$ ; положение трещины определяется параметром  $\lambda$

- Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1976. 443 с.
13. Греков М.А., Даль Ю.М., Курочкин В.А. Предельное состояние упругой полосы с внутренней трещиной // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 6. С. 148–155.
  14. Краснощекоев А.А., Соболев Б.В. Равновесное состояние внутренней поперечной трещины в полубесконечном упругом теле с тонким покрытием // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2016. № 1. С. 136–150.
  15. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах, Т. 1: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. 448 с.
  16. Wigglesworth L.A. Stress distribution in a notched plate // Mathematika. 1957. Vol. 4. No. 7. P. 76–96. doi: 10.1112/S002557930000111X
  17. Irwin G.R. The crack-extension force for a crack at a free surface boundary // Report № 5120, Naval Research Lab., 1958.
  18. Bowie O.L. Rectangular tensile sheet with symmetric edge cracks // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. Vol. 31. No. 2. P. 208–212. doi: 10.1115/1.3629588
  19. Bowie O.L., Neal D.M. Single edge cracks in rectangular tensile sheet // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. Vol. 32. No. 3. P. 708–709. doi:10.1115/1.3627290
  20. Srivastav R.P., Narain Prem. Certain two-dimensional problems of stress distributions in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1965. Vol. 61. No. 4. P. 945–954. doi: 10.1017/S0305004100039347
  21. Srawley J.E., Gross B. Stress intensity factors for crackline-loaded edge-crack specimens // Mater. Res. and Stand. 1967. Vol. 7. No. 4. P. 155–162.
  22. Сметанин Б.И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 2. С. 115–122.
  23. Сметанин Б.И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 708–714.
  24. Tamate O., Kondo T. Stress singularities around a crack in an elastic wedge // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1978. Vol. 44. No. 379. P. 756–761. doi: 10.1299/kikai1938.44.756
  25. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224 с.
  26. Банцури Р.Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 6. С. 1256–1259.
  27. Doran H.E. The wedge with a symmetric crack at the vertex in plane elastostatics // IMA J. Appl. Math. 1969. Vol. 5. No. 4. P. 363–372. doi: 10.1093/imamat/5.4.363
  28. Храпков А.А. Бесконечный треугольный клин с надрезом на биссектрисе под действием сосредоточенных сил, приложенных к берегам надреза // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1972. №5. С. 88–97.
  29. Quchterlony F. Symmetric cracking of a wedge by concentrated load // Int. J. Engng Sci. 1977.

- Vol. 15. No. 2. P. 109–116. doi: 10.1016/0020-7225(77)90026-X
30. *Quchterlony F.* Some stress intensity factors for self-similar cracks, derived from path-independent integrals // *J. Elast.* 1978. Vol. 8, No. 3. P. 259–271. doi: 10.1007/BF00130465
  31. *Gregory R.D.* The edge-cracked circular disc under symmetric pin-loading // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1979. Vol. 85. No. 3. P. 523–538. doi: 10.1017/S030500410005595X
  32. *Stone S.F., Westmann R.A.* Stress intensity factors for cracked wedges // *Int. J. Solids and Struct.* 1981. Vol. 17. No. 3. P. 345–358. doi: 10.1016/0020-7683(81)90068-8
  33. *Садыхов А.Э.* Клин с трещиной // Баку: Азерб. гос. пед. ин-т, 1979. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 28.03.79. №1091.
  34. *Кипнис Л.А.* Упругое равновесие клина с трещиной // *Прикладная математика и механика.* 1979. Т. 43, Вып. 1. С. 153–159.
  35. *Садыхов А.Э.* Об одной задаче теории упругости для клина с полубесконечной трещиной под действием сосредоточенного момента // *Прикладная механика.* 1980. Т. 16. № 5. С. 91–96.
  36. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Под ред. В.В. Панасюка. Киев: Наук. думка, 1988. 619 с.
  37. *Некислых Е.М., Острик В.И.* Задача об упругом равновесии клина с трещинами на оси симметрии // *Изв. РАН, механика твердого тела.* 2010. № 5. С. 111–129.
  38. *Пожарский Д.А., Молчанов А.А.* Асимптотические решения смешанных задач для упругой полосы и клина // *Вестник ДГТУ.* 2010. Т. 10. № 4(47). С. 447–454.
  39. *Elliotis M.C., Charmpis D.C., Georgiou G.C.* The singular function boundary integral method for an elastic plane stress wedge beam problem with a point boundary singularity // *J. Appl. Math. and Computation.* 2014. Vol. 248. P. 93–100. doi: 10.1016/j.amc.2014.09.090
  40. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
  41. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
  42. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *J. Appl. Mech.* 1957. V. 24. No. 3. P. 361–364.
  3. lems in shell theory. Elastic casing]. Moscow, Inostr. lit. Publ., 1962, 263 p. (In Russian)
  4. Koiter W.T., Warner T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 1966, vol. 69, no. 1, pp. 1–54.
  5. *Razvitie teorii kontaktnyh zadach v SSSR* [The development of the theory of contact problems in the USSR]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 493 p. (In Russian)
  6. Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiami i proslojkami* [Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 493 p. (In Russian)
  7. Akopyan V.N. Ob odnoj smeshannoj zadache dlja sostavnoj ploskosti, oslablennoj treshhinnoj [On a mixed problem for a compound plane weakened by a crack]. *Izv. NAN Armenii, Mehanika* [Mech. Proc. National Acad. Sci Armenia], 1995, vol. 48, no. 4, pp. 57–65. (In Russian)
  8. Arutyunyan L.A. Ploskie zadachi so smeshannymi kraevymi usloviyami dlya sostavnoj ploskosti s treshhinami [Plane problems with mixed boundary conditions for a composite plane with cracks]. *Izv. NAN Armenii, Mekhanika* [Mech. Proc. National Acad. Sci Armenia], 2012, vol. 65, no. 3, pp. 5–9. (In Russian)
  9. Rizk A. Stress intensity factor for an edge crack in two bonded dissimilar materials under convective cooling. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2008, vol. 49, no. 3, pp. 251–267. doi: 10.1016/j.tafmec.2008.02.006
  10. Shatskij I.P. Rastyazhenie plastiny, sodержashhej pryamolinejnyj razrez s sharnirno soedinennymi kromkami [Stretching of a plate containing a rectilinear cut with pivotally connected edges]. *Prikl. mehanika i tehničeskaja fizika* [J. Appl. Mechanics and Technical Physics], 1989, no. 5, pp. 163–165. (In Russian)
  11. Antipov Y., Bardzokas D., Exadaktylos G. Partially stiffened elastic half-plane with an edge crack. *International journal of fracture*, 1997, vol. 85, no. 3 pp. 241–263. doi: 10.1023/A:1007428813410
  12. Cook T.S., Erdogan F. Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface. *Int. J. Engng Sci.*, 1972, vol. 10, pp. 677–697. doi: 10.1016/0020-7225(72)90063-8
  13. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Dacyshin A.P. *Raspredelenie napryazhenij okolo treshhin v platinakh i obolochkakh* [Distribution of stresses near cracks in plates and shells]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1976, 443 p. (In Russian)
  14. Grekov M.A., Dal' Yu. M., Kurochkin V.A. Predel'noe sostoyanie uprugoj polosity s vnutrennej treshhinnoj [Limit state of an elastic strip with an internal crack]. *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela* [J. Russ. Acad. Sci., Mechanics of

## References

- Solids], 1992, no. 6, pp. 148-155. (In Russian)
14. Krasnoshhekov A.A., Sobol' B.V. Ravnovesnoe sostoyanie vnutrennej poperechnoj treshhiny v polubeskonechnom uprugom tele s tonkim pokrytiem [Equilibrium of an Internal Transverse Crack in a Semiinfinite Elastic Body with Thin Coating]. *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela* [J. Russ. Acad. Sci., Mechanics of Solids], 2016, no. 1, pp. 136-150. (In Russian)
  15. *Spravochnik po koehffitsientam intensivnosti napryazhenij: V 2-kh tomakh, T. 1* [Handbook on stress intensity factors: In 2 volumes, vol. 1], Moscow, Mir Publ., 1990, vol. 1, 448 p. (In Russian)
  16. Wigglesworth L.A. Stress distribution in a notched plate. *Mathematika*, 1957, vol. 4, no. 7, pp. 76-96. doi: 10.1112/S002557930000111X
  17. Irwin G.R. The crack-extension force for a crack at a free surface boundary, *NRL Rept*, 1958, no. 5120, PB 132875.
  18. Bowie O.L. Rectangular tensile sheet with symmetric edge cracks. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1964, vol. 31, no. 2, pp. 208-212. doi:10.1115/1.3629588
  19. Bowie O.L., Neal D.M. Single edge cracks in rectangular tensile sheet. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, no. 3, pp. 708-709. doi:10.1115/1.3627290
  20. Srivastav R.P., Narain Prem. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1965, vol. 61, no. 4, pp. 945-954. doi: 10.1017/S0305004100039347
  21. Srawley J.E., Gross B. Stress intensity factors for crackline-loaded edge-crack specimens. *Mater. Res. and Stand.*, 1967, vol. 7, no. 4, pp. 155-162.
  22. Smetanin B.I. Nekotorye zadachi o shhelyakh v uprugom kline i sloe [Certain Problems of Cracks in Elastic Wedge and Plate], *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela* [J. Acad. Sci USSR, Mechanics of Solids], 1968, no. 2, pp. 115-122. (In Russian)
  23. Smetanin B.I. Ob odnoj smeshannoj zadache teorii uprugosti dlya klina [On a Mixed Problem of Elasticity Theory for a Wedge] *Prikl. Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech], 1968, vol. 32, no. 4, pp. 708-714. (In Russian)
  24. Tamate Î., Kondo Ô. Stress singularities around a crack in an elastic wedge. *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1978, vol. 44, no. 379, pp. 756-761. doi: 10.1299/kikai1938.44.756
  25. Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V. *Tonkie kontsentratory napryazhenij v uprugikh telakh* [Thin stress concentrators in elastic bodies]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 1993, 224 p. (In Russian)
  26. Bantsuri R.D. Reshenie pervoj osnovnoj zadachi teorii uprugosti dlya klina, imeyushhego konechnyj razrez [Solution of the first fundamental problem of the theory of elasticity for a wedge having a finite cut]. *Dokl. AN SSSR* [DAN SSSR], 1966, vol. 167, no. 6, pp. 1256-1259.
  27. Doran H.E. The wedge with a symmetric crack at the vertex in plane elastostatics. *IMA J. Appl. Math.*, 1969, vol. 5, no. 4, pp. 363-372. doi: 10.1093/imamat/5.4.363
  28. Khrapkov A.A. Beskonechnyj treugol'nyj klin s nadrezom na bissektre pod dejstviem sosredotochennykh sil, prilozhennykh k beregam nadreza [An endless triangular wedge with a notch on the bisector under the action of concentrated forces applied to the banks of the incision] *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela* [J. Acad. Sci USSR, Mechanics of Solids], 1972, no. 5, pp. 88-97. (In Russian)
  29. Quchterlony F. Symmetric cracking of a wedge by concentrated load. *Int. J. Engng Sci.*, 1977, vol. 15, no. 2, pp. 109-116. doi: 10.1016/0020-7225(77)90026-X
  30. Quchterlony F. Some stress intensity factors for self-similar cracks, derived from path-independent integrals. *J. Elast.*, 1978, vol. 8, no. 3, pp. 259-271. doi: 10.1007/BF00130465
  31. Gregory R.D. The edge-cracked circular disc under symmetric pin-loading *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1979, vol. 85, no. 3, pp. 523-538. doi: 10.1017/S030500410005595X
  32. Stone S.F., Westmann R.A. Stress intensity factors for cracked wedges. *Int. J. Solids and Struct.*, 1981, vol. 17, no. 3, pp. 345-358. doi: 10.1016/0020-7683(81)90068-8
  33. Sadykhov A. Eh. Klin s treshhinoj [Cracked Wedge]. *Azerb. Gos. Ped. Inst., Baku Dep. VINITI AN SSSR 28.03.79* [Baku State Ped. University Azerbaijan], 1979, no. 1091, 32 p. (in Russian).
  34. Kipnis L.A. Uprugoe ravnovesie klina s treshhinoj [Elastic Equilibrium of a Wedge with a Crack]. *Prikl. Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech], 1979, vol. 43, no. 1, pp. 153-159. (In Russian)
  35. Sadykhov A. Eh. Ob odnoj zadache teorii uprugosti dlya klina s polubeskonechnoj treshhinoj pod dejstviem sosredotochennogo momenta [Elasticity-Theory Problem for Wedge with Semiinfinite Crack Subjected to Point Moment]. *Prikl. Mekh.* [Int. Appl. Mech.], 1980, vol. 16, no. 5, pp. 91-96. (In Russian)
  36. Savruk M.P. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov. T. 2: Koehffitsienty intensivnosti napryazhenij v telakh s treshhinami* [Mechanics of failure and strength of materials. Vol. 2: Coefficients of stress intensity in bodies with cracks]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, 619 p. (In Russian)
  37. Nekislykh E.M., Ostriuk V.I. Zadacha ob uprugom ravnovesii klina s treshhinami na osi simmetrii [The problem of elastic equilibrium of a

- wedge with cracks on the axis of symmetry]. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela* [J. Russian Academy Sci., Mechanics of Solids], 2010, no. 5, pp. 111–129. (In Russian)
38. Pozharskij D.A., Molchanov A.A. Asimptoticheskie resheniya smeshannykh zadach dlya uprugoj polosy i klina [Asymptotic solutions of mixed problems for an elastic strip and a wedge]. *Vestnik DGTU* [Vestnik Don State Technical University], 2010, vol. 10, no. 4(47), pp. 447–454. (In Russian)
39. Elliotis M.C., Charmpis D.C., Georgiou G.C. The singular function boundary integral method for an elastic plane stress wedge beam problem with a point boundary singularity. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 248, pp. 93–100. doi: 10.1016/j.amc.2014.09.090
40. Lur'e A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 940 p. (In Russian)
41. Gradshtejn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenij* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 1100 p. (In Russian)
42. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol. 24, no. 3, pp. 361–364.

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2017

© Соболь Б. В., Рашидова Е. В., 2017

Статья поступила 10 апреля 2017 г.