

УДК 539.3

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ¹*А. О. Ватulyян², О. А. Суворова³*

ON THE INVERSE PROBLEM FOR THE ELASTIC LAYER WITH A CAVITY

Vatulyan A. O., Suvorova O. A.

An antiplane problem on the reconstruction of the cavity shape in an orthotropic elastic layer has been considered based on the data about displacement field measured on its boundary. The problem has been reduced to a set of nonlinear integral-differential equations. The solution technique is based on the linearization of this set in the neighborhood of the known outline. The initial configuration of the defect is looked for in the class of elliptical cavities. The initial approximation of the desired outline has been determined from the condition for minimum of nonquadratic residual composite function. Discretization of computational scheme has been carried out on the basis of boundary elements method. Results of numerical experiments are discussed.

Введение

В последние годы возросли требования к экологической безопасности сооружений и конструкций, работающих в условиях динамического нагружения. Для некоторых сооружений ответственного назначения (например, для оболочки ядерного реактора или самолета) разрушение может привести к широкомасштабной экологической катастрофе. Как известно, прочность конструкции во многом определяется наличием мелкомасштабных дефектов (поры, включения, микротрещины), своевременная диагностика которых позволяет скорректировать рабочий режим и предотвратить разрушение. Для целей диагностики дефектов используются разнообразные методы, основанные на измерении компонент физических полей, причем акустические методы относятся к числу наиболее используемых.

С математической точки зрения обнаружение дефектов в упругой среде по измеренным полям перемещений на границе тела приводит к достаточно сложным и малоизучен-

ным обратным геометрическим задачам теории упругости, для решения которых используются различные подходы. Один из них базируется на дифракционной постановке, в которой неизвестный дефект, расположенный в неограниченной плоскости или пространстве, определяется по данным диаграмм направленности. В то же время такая постановка является неадекватной при наличии дефектов, расположенных близко к границе. В этом случае необходимо рассматривать модель полупространства с внутренней полостью для расчета полей перемещений и в рамках этой модели решать обратную задачу.

Другой подход основан на рассмотрении дефекта в волноводе и определении его характеристик по амплитудам и фазам распространяющихся волн.

В последнее время обратные задачи о восстановлении формы внутреннего или приповерхностного дефекта в упругих средах приобретают все большее значение. Отметим, что граница тела в случае приповерхностного дефекта оказывает существенное влия-

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-2113.2003).

²Ватulyян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Ростовского государственного университета.

³Суворова Ольга Александровна, аспирант кафедры теории упругости механико-математического факультета Ростовского государственного университета.

ние на формирование поля перемещений в упругом теле. Исследованию систем уравнений на границе полости, являющихся базовыми для формулировки разрешающих уравнений в обратных задачах об определении формы полости, посвящены многочисленные работы [1–6]. Следует отметить, что обратные задачи по восстановлению формы полости являются некорректными. При решении таких задач в рамках линейризованного подхода получаются операторные уравнения 1-го рода с гладкими ядрами, которые требуют регуляризации. Они могут быть решены с помощью сочетания метода граничных элементов [7, 8] и методов регуляризации [9]. Такие методы были развиты в работах [1, 2, 10]. В основном, исследования обратных задач для тела с полостью проведены для пространства и полупространства.

Подход, основанный на предварительной линейризации операторных уравнений обратной задачи в окрестности известного контура дефекта, реализован в [1], но в этой работе осуществлена неполная линейризация, при которой кривизна дефекта считается мало изменяющейся. В настоящей работе получено полное линейризованное уравнение для задачи об антиплоских колебаниях слоя с полостью, произведена серия численных экспериментов по расчету волновых полей для различных конфигураций дефекта и его расположения. Проведен также анализ рассчитанных волновых полей на границе слоя, что позволило в дальнейшем оптимально выбирать информацию при решении обратной задачи.

1. Постановка и решение прямой задачи

Рассмотрим установившиеся антиплоские волны в ортотропном упругом слое толщины h с цилиндрической полостью, направляющая которой – гладкая замкнутая кривая l_0 . Считаем, что колебания в слое возбуждаются касательной нагрузкой $p(x_1)$, приложенной на границе слоя $x_3 = h$. Оси упругой симметрии совпадают с осями координат, из компонент вектора перемещений отлична от нуля только компонента $u_2 = u(x_1, x_3)e^{-i\omega t}$, а из компонент тензора напряжений – $\sigma_{12} = c_{66}u_{,1}$, $\sigma_{23} = c_{44}u_{,3}$. Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид

$$c_{66}u_{,11} + c_{44}u_{,33} + \rho\omega^2u = 0,$$

$$x_3 = h : c_{44}u_{,3} = p(x_1), x_3 = 0 : u = 0, \quad (1.1)$$

$$(x_1, x_3) \in l_0 : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

(n_1, n_3 – компоненты единичного вектора нормали к кривой l_0 , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой).

Фундаментальное решение для слоя с граничными условиями (1.1), порожденными исходной задачей [11], имеет вид

$$U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) =$$

$$= \frac{1}{2\pi c_{44}} \int_{\sigma} \frac{e^{i\alpha(x_1 - \xi_1)}}{\lambda} \left[e^{-\lambda|x_3 - \xi_3|} + e^{-\lambda\xi_3} \operatorname{ch} \lambda x_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sh} \lambda x_3}{\operatorname{ch} \lambda h} \left(e^{-\lambda(h - \xi_3)} + e^{-\lambda\xi_3} \operatorname{sh} \lambda h \right) \right] d\alpha.$$

Здесь $\lambda = (\nu\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, $\nu = c_{66}/c_{44}$, $k^2 = \rho\omega^2/c_{44}$.

Контур σ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [12]. Используя теорему взаимности [8], получим представление поля перемещений в среде

$$u(\xi_1, \xi_3) = u^{et}(\xi_1, \xi_3) -$$

$$- \int_{l_0} K(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) u(x_1, x_3) dl_x,$$

$$u^{et}(\xi_1, \xi_3) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) U(x_1, h, \xi_1, \xi_3) dx_1, \quad (1.2)$$

$$K(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) = c_{66}n_1 \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) +$$

$$+ c_{44}n_3 \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3).$$

Здесь $u^{et}(\xi_1, \xi_3)$ – поле перемещений в среде без полости под действием сосредоточенной нагрузки $p(x_1)$.

Если известно $u(x_1, x_3)$ при $(x_1, x_3) \in l_0$, то на основании представления (1.2) можно определить перемещения всюду внутри области, занятой упругой средой.

Соотношение (1.2) дает возможность сформулировать интегральное уравнение только по границе области l_0 , поскольку условия при $x_3 = 0, h$ выполнены автоматически за счет специального выбора фундаментального решения $U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3)$. Осуществим предельный переход $(\xi_1, \xi_3) \rightarrow (y_1, y_3) \in l_0$.

В результате получим граничное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2}u(y_1, y_3) = u^{et}(y_1, y_3) - \int_{l_0} K(x_1, x_3, y_1, y_3)u(x_1, x_3)dl_x, \quad (1.3)$$

$$(y_1, y_3) \in l_0.$$

Интеграл по l_0 понимается в смысле главного значения по Коши.

Отметим, что если контур l_0 имеет особую точку, то коэффициент при $u(y_1, y_3)$ в левой части уравнения отличен от $\frac{1}{2}$ и зависит от угла между касательными в особой точке [7, 8].

Численная реализация при решении сингулярного интегрального уравнения (1.3) проводится на основе метода граничных элементов [5, 8, 10]. Считаем, что гладкая граница аппроксимируется многоугольником (N -угольником): $l = \bigcup_{k=1}^N l_k$. В пределах каждого из элементов l_k функция $u(x_1, x_3)$ постоянна, а в качестве узлов выбраны середины соответствующих отрезков. Обозначим через (x_{1k}^-, x_{3k}^-) и (x_{1k}^+, x_{3k}^+) координаты начала и конца k -го элемента в соответствии с выбранной ориентацией, тогда координатами узлов являются $y_{1k} = \frac{1}{2}(x_{1k}^- + x_{1k}^+)$, $y_{3k} = \frac{1}{2}(x_{3k}^- + x_{3k}^+)$, и уравнение (1.3) относительно $u_k = u(y_{1k}, y_{3k})$ сводится к линейной алгебраической системе

$$\frac{1}{2}u_k = b_k - \sum_{m=1}^N H_{km}u_m, \quad k = \overline{1, N},$$

$$b_k = u^{et}(y_{1k}, y_{3k}),$$

$$H_{km} = \int_{l_m} K_m(x_1, x_3, y_{1k}, y_{3k})dl_x. \quad (1.4)$$

$$K_m(x_1, x_3, y_{1k}, y_{3k}) =$$

$$= c_{66}n_{1m} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_3, y_{1k}, y_{3k}) +$$

$$+ c_{66}n_{3m} \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_3, y_{1k}, y_{3k}),$$

$$m = \overline{1, N}.$$

Основную техническую трудность составляет формирование матрицы системы, так как

функция Грина $U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3)$ не имеет явного представления, и при нахождении H_{km} необходимо вычислять кратные интегралы. Поэтому представление (1.4) требует предварительного упрощения с помощью параметризации на элементе l_m с последующим вычислением интегралов.

В итоге, для коэффициентов H_{km} алгебраической системы (1.4) имеем представление в виде интегралов по контуру σ в комплексной плоскости, которые вычисляются по квадратурным формулам Гаусса 8-го порядка. На основе формулы (1.2) построено волновое поле на поверхности слоя

$$u(\xi_1, h) = u^{et}(\xi_1, h) - \sum_{m=1}^N u_m \int_{l_m} K_m(x_1, x_3, \xi_1, h)dl_x. \quad (1.5)$$

от действия сосредоточенной нагрузки $p(x_1) = -T\delta(x_1)$, приложенной в начале координат.

2. Обратная задача об определении полости

Обратная задача состоит в определении контура l_0 по известному (или измеренному) полю смещений на границе слоя $u(\xi_1, h) = f(\xi_1)$, $\xi_1 \in [c, d]$, которое вызвано приложенной на поверхности слоя осциллирующей касательной нагрузкой $p(x_1) = -T\delta(x_1)$. Эта задача на основе предыдущего решения прямой задачи сводится к решению сложной нелинейной системы интегродифференциальных уравнений (1.3), (1.5) относительно $u(x_1, x_3)|_{l_0, l_0}$.

Осуществим процедуру линеаризации системы операторных уравнений (1.3), (1.5). Рассмотрим задачу на контуре $l^{(1)}$, который близок к $l^{(2)}$ ($l^{(2)} \equiv l^{(0)}$). Величины, относящиеся к задаче с контуром $l^{(1)}$, будем обозначать индексом 1, а величины, относящиеся к контуру $l^{(2)}$ — 2. Будем считать, что контура $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ — звездные относительно некоторой точки, расположенной внутри полости. Введем функцию $\nu(\varphi) = \rho^{(1)}(\varphi) - \rho^{(2)}(\varphi)$, которая характеризует расстояние между контурами $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$. Линеаризация производится в окрестности известного контура и приводит к

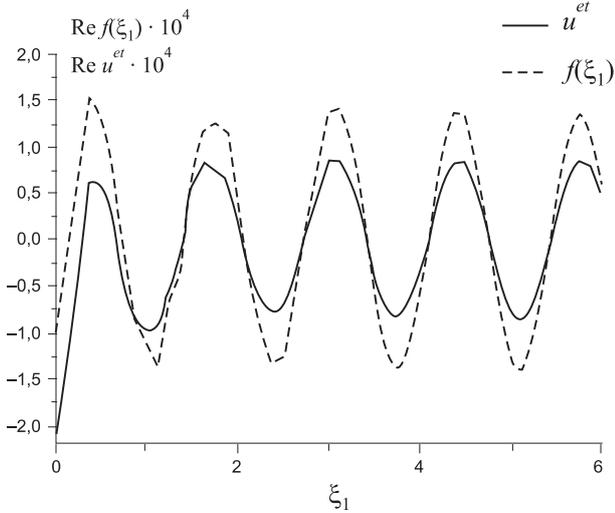


Рис. 1

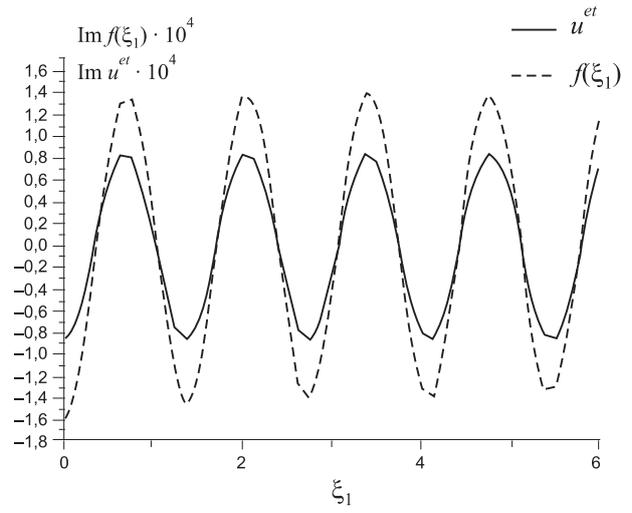


Рис. 2

следующему соотношению:

$$\begin{aligned}
 V(\xi_1, \xi_3) = & \\
 = - \int_0^{2\pi} V(x_1, x_3) & \left(-c_{44} \frac{\partial U}{\partial x_3} \left(\rho^{(1)}(\varphi) \cos \varphi \right)' + \right. \\
 & \left. + c_{66} \frac{\partial U}{\partial x_1} \left(\rho^{(1)}(\varphi) \sin \varphi \right)' \right) d\varphi + \\
 + \int_0^{2\pi} \rho^{(1)}(\varphi) \nu(\varphi) & \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(c_{66} \frac{\partial U}{\partial x_1} u(x_1, x_3) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(c_{44} \frac{\partial U}{\partial x_3} u(x_1, x_3) \right) \right] d\varphi, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

$$U = U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3),$$

$$V(\xi_1, \xi_3) = u^{(1)}(\xi_1, \xi_3) - u^{(2)}(\xi_1, \xi_3).$$

Основная идея метода линеаризации состоит в построении итерационной процедуры многократного применения линеаризованных уравнений к системе контуров $l^{(N)}$, $N = 1, 2, \dots$. Переход от контура $l^{(N)}$ к контуру $l^{(N+1)}$ осуществляется в соответствии с уравнениями (1.5), (2.1) в которых используются функции $u_N(\xi_1, h)$, $u_N|_{l^{(N)}} = u_N(x_{1N}, x_{3N})$, причем для их нахождения решается соответствующая прямая задача.

Для реализации итерационной процедуры необходимо знать начальное приближение определяемого контура. Характеристики

начального приближения найдены из условия минимума построенного неквадратичного функционала невязки

$$\begin{aligned}
 \Phi[x_{10}, x_{30}, a] = \sum_{k=1}^N & \left(f(\xi_{1k}) - u^{et}(\xi_{1k}, h) + \right. \\
 & \left. + \int_{l_0} K(x_1, x_3, \xi_{1k}, h) u(x_1, x_3) dl_x \right)^2. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Здесь x_{10} , x_{30} — горизонтальная и вертикальная координата центра дефекта, a — характерный размер дефекта.

Проведена серия численных экспериментов для отыскания характеристик начального приближения для различных конфигураций и расположений контура. Сначала решалась прямая задача на контуре l_0 и рассчитывалось поле перемещений поверхности слоя в дальней зоне для значений безразмерного параметра $\kappa = \omega h \sqrt{\rho/c_{44}}$, отвечающего за число распространяющихся волн в слое. Это служило исходной информацией для решения обратной задачи. При расчетах принято: $T = 10^7$ Н, $h = 1$ м, $\rho = 7100$ кг/м³, упругие постоянные (в Н/м²) $c_{66} = 5,05 \cdot 10^{10}$, $c_{44} = 5,05 \cdot 10^{10}$, $\kappa = 4,0$, что соответствовало одной распространяющейся моде в слое. Число граничных элементов изменялось и принималось равным 8, 16, 32. При изменении числа элементов в указанных пределах незначительно (2–3%) изменялись амплитудные значения поля перемещений в дальней зоне.

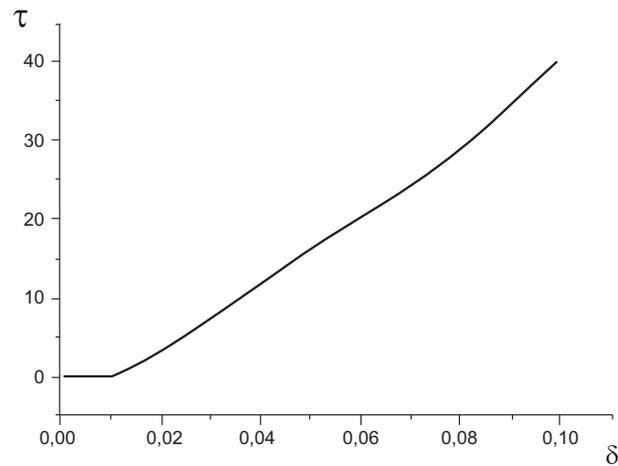


Рис. 3

На рис. 1 и 2 представлены соответственно действительная и мнимая части перемещений поверхности слоя без дефекта — u^{et} и с эллипсоидальным дефектом с центром в точке $(0, h/2)$, полуоси эллипса $a_1 = 0,3$, $a_2 = 0,125$, расположены под углом 45^{circ} к координатным осям.

Эта информация являлась входной при решении обратной задачи.

Начальное приближение разыскивалось в классе окружностей при помощи некоторого итерационного процесса, основанного на методе оврагов. Для определяемого контура l_0 из того же класса относительная погрешность восстановления площади дефекта и вертикальной координаты его центра составляла менее 2%. При этом координата x_{10} была фиксирована. Отметим, что погрешность восстановления координат центра полости при фиксированном радиусе в (2.2) составляла менее 1%.

Серия экспериментов для неизвестного контура l_0 , находящегося в классе эллипсов, показала, что относительная погрешность восстановления площади дефекта не превосходит 16%, а погрешность восстановления вертикальной координаты его центра — менее 5% при фиксации x_{10} в (2.2). Погрешность восстановления полуосей эллипса при фиксированных координатах его центра в (2.2) не превышала 4%.

Отметим, что при увеличении волнового числа $\kappa = 4,0 \div 11,0$ (одна — три распространяющиеся моды), погрешность восстановления площади начального приближения относительно площади разыскиваемого конту-

ра уменьшалась, что связано с уменьшением длины волны зондирующего сигнала. В случае приповерхностного дефекта и переноса отрезка наблюдения в область над дефектом скорость сходимости итерационной процедуры уменьшалась.

Проведен численный эксперимент по зашумлению входной информации, то есть возмущению поля перемещений на поверхности слоя при помощи аддитивной случайной функции с равномерным законом распределения и амплитудой δ . На рис. 3 приведена зависимость погрешности восстановления площади эллиптического дефекта τ (%) от амплитуды погрешности входной информации. Относительная погрешность восстановления площади эллиптического отверстия возрастала при увеличении порядка зашумления входной информации.

Литература

1. Ватульян А. О., Гусева И. А. О восстановлении формы полости в ортотропной полуплоскости по заданному на границе волновому полю // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 154–157.
2. Ватульян А. О., Коренский С. А. О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве // ДАН. 1995. Т. 334. № 6. С. 753–755.
3. Ватульян А. О., Коренский С. А. Метод линеаризации в обратной задаче для среды со свободной границей // Акуст. журнал. 1995. Т. 41. № 3. С. 395–399.
4. Ватульян А. О., Коренский С. А. Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 639–646.

-
5. *Morassi A., Rosset E.* Stable determination of cavities in elastic bodies // *Inverse Problems* 2004. V. 20. P. 453–480
 6. *Ameur H., Burger M., Hackl B.* Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity // *Inverse Problems* 2004. V. 20. P. 673–696.
 7. *Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
 8. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
 9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
 10. *Ватульян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // *Изв. СКНЦ. Естеств. науки.* 1989. № 2. С. 81–85.
 11. *Ватульян А. О., Кацевич А. Я.* Колебания ортотропного упругого слоя с полостью // *ПМТФ.* 1991. № 1. С. 95–97.
 12. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
-

Статья поступила 11 декабря 2004 г.
Ростовский государственный университет
© Ватульян А. О., Суворова О. А., 2005