Механика

УДК 539.3

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ И БЛОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Гладской И. Б., Горшкова Е. М., Зарецкая М. В., Мухин А. С.

DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF MIXED PROBLEMS AND BLOCK ELEMENTS

Babeshko V. A.*, Evdokimova O. V.*, Babeshko O. M.**, Gladskoy I. B.**, Gorshkova E. M.**, Zaretskaya M. V.**, Mukhin A. S.**

* Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
** Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. A number of mixed boundary-value problems in the theory of elasticity are not traditional in the sense that unstable states of the system arise, leading to destruction. These include mixed problems with discontinuous boundary conditions, in which the behavior of contact stresses and displacements, which indicate the destruction of the medium, appear. In some cases, such boundary problems have unlimited energy. Examples of such mixed boundary problems are the contact problems for two rigid dies, which have approached the contact state but have not merged into one stamp, as well as two adjacent cracks, which disappear with a small distance between them. It is shown that such problems, arising in seismology, theory of strength, construction, have singular components, in some cases with unlimited energy, and can be solved by topological methods with pointwise convergence, in particular, by the block element method. Numerical methods based on the application of the energy integral to such problems are not applicable in connection with its divergence. In the case of cracks, taking into account the investigation of the properties of solutions of integral equations obtained earlier, it is proved that a set of cracks lying in the same plane whose vertices are removed by some distance will uncontrollably merge with logarithmic growth when the distance between the vertices reaches a certain minimum.

Keywords: block element, topology, integral and differential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems, starting earthquakes.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Гладской Игорь Борисович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: i.glad@list.ru.

Горшкова Елена Михайловна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru.

Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru

Мухин Алексей Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: muhin@mail.kubsu.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017, проект (9.8753.2017/БЧ).

1. Постановка задачи

Используется применение интегрального метода факторизации, являющегося фрагментом метода блочного элемента, к исследованию полуполосового жесткого штампа, действующего статически без трения на упругий слой конечной толщины, который может быть как изотропным, так и анизотропным. Кроме этого, объектом исследования являются две полубесконечные трещины Гриффица–Ирвина, перемычка между которыми стремится к нулю. Известно, что смешанные задачи для этих случаев сводятся в случае штампов к интегральным уравнениям следующего вида:

$$\iint\limits_{\Omega} k(x-\xi, y-\eta) g(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = f(x,y),$$

$$x, y \in \Omega,$$

$$k(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} K(\alpha,\beta) e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \equiv$$
$$\equiv \mathbf{F}_2^{-1}(x,y)K(\alpha,\beta), \quad (1.1)$$

$$\Omega(-\infty < x < c;\ -s \leqslant y \leqslant s),$$

$$K(\alpha,\beta) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \to \infty,$$

$$K(\alpha,\beta) = C(\beta)\left[\frac{1}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\right], \quad |\alpha| \to \infty,$$

Для случая трещин интегральное уравнение задачи имеет вид

$$\mathbf{L}(\partial x, \partial y)\iint\limits_{\Omega} t(x-\xi, y-\eta) p(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta =$$
$$= m(x,y), \quad x, y \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$t(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} T(\alpha,\beta) e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \equiv$$
$$\equiv \mathbf{F}_2^{-1}(x,y)T(\alpha,\beta),$$

$$\Omega(-\infty < x < c;\ -s \leqslant y \leqslant s),$$

$$T(\alpha,\beta) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \to \infty,$$

$$T(\alpha,\beta) = C(\beta)\left[\frac{1}{|\alpha|} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\right], \quad |\alpha| \to \infty,$$

$$\mathbf{L}(\partial x, \partial y) = \partial^2 x + \partial^2 y - \varepsilon^2, \quad \varepsilon \geqslant 0.$$

$K(\alpha,\beta)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α,β, четная по обеим переменным, мероморфная, положительная, когда обе переменные вещественны, ее многочисленные примеры приведены в [1–3], $g(x,y)$ — контактное напряжение под штампом, $f(x,y)$ — вертикальное перемещение штампа при внедрении в слой, $\mathbf{F}_2(\alpha,\beta)$, $\mathbf{F}_1(\alpha)$ — операторы двумерного и одномерного преобразования Фурье соответственно, имеющие вид

$$\Phi_n(\alpha,\beta) = \mathbf{F}_2(\alpha,\beta)\phi_n(x,y),$$

$$\Phi_n(\alpha) = \mathbf{F}_1(\alpha)\phi_n(x), \quad \Phi_n(\beta) = \mathbf{F}_1(\beta)\phi_n(y).$$

Обращение оператора $\mathbf{L}(\partial x, \partial y)$ порождает в правой части интегрального уравнения произвольные граничные функции, служащие для нахождения перемещения $p(\xi,\eta)$, ограниченного на границе. Функция $m(x,y)$ описывает напряжения, действующие на берега трещины. Аналогичными $K(\alpha,\beta)$ свойствами обладает функция $T(\alpha,\beta)$.

Предполагается, что функция $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема и (для простоты) экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$.

Численные методы неэффективны для исследования интегрального уравнения (1.1) в анизотропном случае, однако имеются два аналитических метода. Это сведение к теории нормированных колец, приводящее к методу фиктивного поглощения [3, 4], и прямой факторизационный метод — интегральный метод факторизации, фрагмент метода блочного элемента, восходящий к работам Н. Винера [2, 5–9]. Применяя второй метод, введем топологию, индуцированную эвклидовым пространством, и будем рассматривать интегральное уравнение как топологический объект на компакте — всей плоскости.

2. Применение метода факторизации

Продолжим уравнение на всю плоскость, введя новые неизвестные $\phi_n(x,y)$. Введем обозначения

$$\phi_1(x,y) \in \Omega_1(c \leqslant x < \infty;\ s < y < \infty),$$

$$\phi_2(x,y) \in \Omega_2(-\infty < x < c;\ s < y < \infty),$$

$$\phi_6(x,y) \in \Omega_6(-\infty < x < c;\ -\infty < y < -s),$$

$$\phi_7(x,y) \in \Omega_7(c \leq x < \infty;\ -\infty < y < -s),$$

$$\phi_8(x,y) \in \Omega_8(c < x < \infty;\ -s \leqslant y \leqslant s).$$

Положим для функций в полуплоскостях комплексной плоскости знаки регулярности сверху: в верхней полуплоскости t— плюс; в нижней — минус. Нижние индексы указывают, по какому параметру имеет место регулярность — по параметру α или β. В результате имеем

$$\mathbf{F}_2(\alpha,\beta)\phi_1(x,y) = \Phi_1(\alpha,\beta) = \\ = \Phi^+_{1\alpha}(\alpha,\beta) = \Phi^+_{1\beta}(\alpha,\beta),$$

$$\mathbf{F}_2(\alpha,\beta)\phi_2(x,y) = \Phi_2(\alpha,\beta) = \Phi^+_{2\beta}(\alpha,\beta),$$

$$\mathbf{F}_2(\alpha,\beta)\phi_6(x,y) = \Phi_6(\alpha,\beta) = \Phi^-_{6\beta}(\alpha,\beta),$$

$$\mathbf{F}_2(\alpha,\beta)\phi_7(x,y) = \Phi_7(\alpha,\beta) = \\ = \Phi^+_{7\alpha}(\alpha,\beta) = \Phi^-_{7\beta}(\alpha,\beta),$$

$$\mathbf{F}_2(\alpha,\beta)\phi_8(x,y) = \Phi_8(\alpha,\beta) = \Phi^+_{8\alpha}(\alpha,\beta).$$

В дальнейшем, чтобы избежать многочисленных применений символа оператора преобразования и обращения Фурье, будем применять прописные буквы $K(\alpha,\beta)$, $F(\alpha,\beta)$, $\Phi(\alpha,\beta)$ для преобразования Фурье функций, имеющих строчные обозначения $k(x,y)$, $f(x,y)$, $\phi(x,y)$ соответственно. Далее придется осуществлять операции факторизации функций в виде суммы и произведения. Эти операции будут выполняться над функциями, зависящими от двух комплексных переменных α и β. При выполнении операции факторизации в виде суммы будут использоваться принятые в [2] обозначения с применением фигурных скобок. Так, если некоторая функция $G(\alpha,\beta)$ факторизуется в виде суммы по параметру α относительно вещественной оси, то функции, получаемые в результате этой операции, обозначаются как $\{G(\alpha,\beta)\}^{\pm}_{\alpha}$,

$$G(\alpha,\beta) = \{G(\alpha,\beta)\}^+_{\alpha} + \{G(\alpha,\beta)\}^-_{\alpha}. \qquad (2.1)$$

Первое слагаемое правой части (2.1) — функция, регулярна в верхней комплексной плоскости, а второе — в нижней. В том случае, если функции подвергаются факторизации и по другому параметру (β), результат факторизации запишем в виде

$$\{G(\alpha,\beta)\}^+_{\alpha} = \\ = \left\{\{G(\alpha,\beta)\}^+_{\alpha}\right\}^+_{\beta} + \left\{\{G(\alpha,\beta)\}^+_{\alpha}\right\}^-_{\beta}.$$

В том случае, если функции имеют индексы, например, указывающие на квадранты, являющиеся носителями функций, то факторизация обозначается по правилу, при котором индексы являются следующими за обозначением факторизации, то есть

$$G^+_{m\alpha} \equiv \left\{G^+_{m\alpha}\right\}^+_{\beta} + \left\{G^+_{m\alpha}\right\}^-_{\beta},$$

$$\left\{G^+_{m\alpha}\right\}^+_{\beta} = \left\{\left\{G^+_{m\alpha}\right\}^+_{\beta}\right\}^+_{\alpha} + \left\{\left\{G^+_{m\alpha}\right\}^+_{\beta}\right\}^-_{\alpha}.$$

Ниже приводятся выражения операторов, осуществляющих факторизацию в виде суммы [2]:

$$\{G(\alpha,\beta)\}^+_{\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi, \qquad (2.2)$$

$$\operatorname{Im}\alpha > 0,$$

$$\{G(\alpha,\beta)\}^-_{\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{G(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\operatorname{Im}\alpha < 0.$$

Неравенства, следующие за интегральными выражениями, обозначают расположение параметра α выше контура Γ_1, совпадающего с вещественной осью, (в первом случае) или ниже контура Γ_1 (во втором). Факторизация функций в виде произведения в дальнейшем осуществляется только для функции $K(\alpha,\beta)$ и имеет при факторизации по α или по β соответственно вид

$$\begin{aligned} K(\alpha,\beta) &= K_{+\alpha}(\alpha,\beta)K_{-\alpha}(\alpha,\beta), \\ K(\alpha,\beta) &= K_{+\beta}(\alpha,\beta)K_{-\beta}(\alpha,\beta). \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Операторы, осуществляющие операцию факторизации в виде произведения, даются формулами:

$$K_{+\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi\right), \qquad (2.4)$$

$$\operatorname{Im}\alpha > 0,$$

$$K_{-\alpha}(\alpha,\beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi,\beta)}{\xi-\alpha}\,\mathrm{d}\xi\right),$$

$$\operatorname{Im}\alpha < 0.$$

В случаях факторизации по параметру β необходимо во всех формулах заменить α на β вместе с заменой контура Γ_1 на Γ_2, также совпадающего с вещественной осью комплексной плоскости β. Это приводит к следующим выражениям:

$$K_{+\beta}(\alpha,\beta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\xi)}{\xi-\beta}\,\mathrm{d}\xi\right), \quad \operatorname{Im}\beta>0, \tag{2.5}$$

$$K_{-\beta}(\alpha,\beta) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\xi)}{\xi-\beta}\,\mathrm{d}\xi\right), \quad \operatorname{Im}\beta<0.$$

Условия, налагаемые на функции при применении формул факторизации в виде суммы или произведения, детально описаны в литературе [2, 3] и здесь не приводятся.

Применим к интегральному уравнению (1.1) оператор $\mathbf{F}_2(\alpha,\beta)$ и представим его как функциональное уравнение вида

$$KQ = \Phi_1+\Phi_2+\Phi_6+\Phi_7+\Phi_8+F. \tag{2.6}$$

Осуществим в (2.6) факторизацию функций K в виде произведений

$$K = K_{+\alpha}K_{-\alpha}, \quad K = K_{+\beta}K_{-\beta}$$

и выполним преобразования функционального уравнения (2.6), применяя факторизации (2.1)–(2.5) с целью получения системы интегральных уравнений для нахождения введенных новых неизвестных. В результате справедлива теорема.

Теорема. Для выполнения интегрального уравнения (1.1) достаточно, чтобы функции Φ_n удовлетворяли системе интегральных уравнений вида

$$\Phi_{8\alpha}^{\,+} = -\Big\{e^{is\beta}\Big\{e^{-is\beta}K_{+\alpha}e^{ic\alpha}\times \\ \times\left\{K_{+\alpha}^{-1}e^{-ic\alpha}\left(\Phi_{2\beta}^{\,+}+\Phi_{6\beta}^{\,-}+F\right)\right\}_{\alpha}^{+}\Big\}_{\beta}^{-}\Big\}_{\beta}^{+},$$

$$\Phi_{2\beta}^{\,+} = -\Big\{e^{-ic\alpha}K_{+\beta}e^{is\beta}\times \\ \times\left\{K_{+\beta}^{-1}e^{-is\beta}(\Psi_{4\beta}^{\,+}+\Phi_{8\alpha}^{\,+}+F)\right\}_{\beta}^{+}\Big\}_{\alpha}^{-}, \tag{2.7}$$

$$\Phi_{6\beta}^{\,-} = -\Big\{e^{-ic\alpha}K_{-\beta}e^{-is\beta}\times \\ \times\left\{K_{-\beta}^{-1}e^{is\beta}(\Psi_{3\beta}^{\,+}+\Phi_{8\alpha}^{\,+}+F)\right\}_{\beta}^{-}\Big\}_{\alpha}^{-},$$

$$\Psi_{3\beta}^{+} = -K_{+\beta}e^{is\beta}\times \\ \times\left\{K_{+\beta}^{-1}e^{-is\beta}(\Psi_{4\beta}^{\,+}+\Phi_{8\alpha}^{\,+}+F)\right\}_{\beta}^{+},$$

$$\Psi_{4\beta}^{+} = -K_{-\beta}e^{-is\beta}\times \\ \times\left\{K_{-\beta}^{-1}e^{is\beta}(\Psi_{3\beta}^{\,+}+\Phi_{8\alpha}^{\,+}+F)\right\}_{\beta}^{-}.$$

Остальные неизвестные определяются из соотношений

$$\Phi_{1\beta}^{\,+} = \Psi_{3\beta}^{\,+}-\Phi_{2\beta}^{\,+}, \quad \Phi_{6\beta}^{\,-} = \Psi_{4\beta}^{\,-}-\Phi_{7\beta}^{\,-}.$$

Кажущаяся сложной система интегральных уравнений (2.7) в случае граничной задачи для слоистой среды с помощью теории вычетов сводится к системе алгебраических уравнений, приближенные решения которой находятся достаточно просто.

3. Свойства решения интегрального уравнения

Решение интегрального уравнения после нахождения всех неизвестных можно представить в виде

$$g(x,y) = \mathbf{F}_2^{-1}(x,y)K^{-1}(\Phi_1+\Phi_2+ \\ +\Phi_6+\Phi_7+\Phi_8+F).$$

Наделив ядро интегрального уравнения диктуемыми смешанной граничной задачей свойствами, можно без труда исследовать характерные особенности полученного решения, такие как поведение решений в окрестности границы и в угловых точках, которые достаточно хорошо известны.

В задачах сейсмологии литосферные плиты имеют более сложный вид. Несмотря на это, литосферные плиты, имеющие протяженные границы, контактируют между собой именно торцами своих границ. В связи с тем, что стартовое землетрясение [10] возникает именно в зоне контакта границ литосферных плит, роль остальных границ, в связи с масштабами самих плит, незначительна. Чтобы более детально понять особенность взаимодействия литосферных плит, рассмотрим поведение контактных напряжений двух полубесконечных жестких штампов, приблизившихся до контакта, но не взаимодействующих

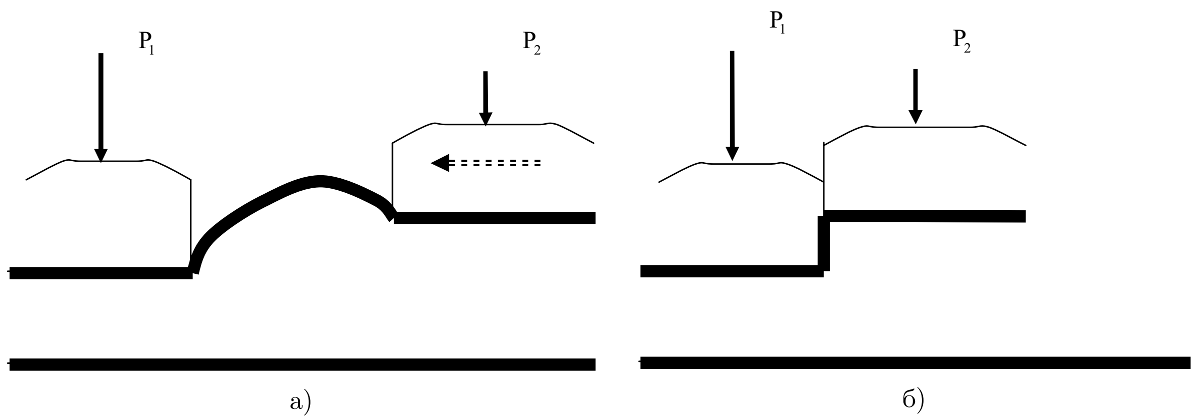

Рис. 1. Два штампа (тонкий контур) вдавливаются в упругий слой (толстый контур) силами P_1 и P_2 в случаях: а) наличия расстояния между ними и движения правого штампа к левому (пунктирная стрелка); б) отсутствия расстояния между ними. В этом случае граница слоя приобрела ступеньку, а контактные напряжения — сингулярность в ее зоне

между собой (рис. 1). Таким образом, рассмотрим случай, когда в предыдущей задаче принято $c = 0$, $s \to \infty$, то есть слева на упругую среду действует полубесконечный штамп. Второй штамп, который строится аналогично первому, занимает полуплоскость $x > 0$ справа от оси oy, то есть расположен зеркально относительно первого. Тогда интегральное уравнение граничной задачи принимает вид уравнения свертки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi, y-\eta) g(\xi,\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = \\ = f(x,y), \quad (3.1)$$

$$x, y \in \Omega(-\infty < x < \infty;\ -\infty \leqslant y \leqslant \infty).$$

Факт наличия двух не взаимодействующих штампов подчеркивается лишь правой частью интегрального уравнения, функцией $f(x,y)$, которая может изменяться отдельно в правой и левой полуплоскостях, имея, в том числе, разрыв при $x = 0$, свидетельствующий о свободных вертикальных перемещениях каждого штампа. Для разрешимости в L_1 этого интегрального уравнения со свойствами ядра (1.1) и требованием принадлежности решения энергетическому пространству [1, 2] достаточно, чтобы имели место неравенства

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|K^{-1}(\alpha,\beta)F(\alpha,\beta)\right| \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta < \infty, \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|K^{-1}(\alpha,\beta)F^2(\alpha,\beta)\right| \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta < \infty.\end{gathered} \quad (3.2)$$

Однако полученные в [10] топологическим методом с поточечной сходимостью без требования принадлежности решения энергетическому пространству концентрации напряжений под деформируемыми литосферными плитами при стартовом землетрясении показали, что и в случае штампов также должны существовать подобные концентрации напряжений. Действительно, они находятся просто, для этого необходимо отказаться от выполнения условий (3.2) и принять правую часть $f(x,y)$ интегральных уравнений в виде

$$f(x,y) = f_0(y) \operatorname{sign} x + f_1(x,y).$$

Функция $f_1(x,y)$ удовлетворяет условиям (3.2), а $f_0(y)$ — финитная функция, равная нулю вместе с производными вне некоторого отрезка. Такой выбор функции означает, что один из штампов углубился в слой сильнее, чем другой, и поверхность претерпела разрыв. Построив решение уравнения (3.1) в обобщенных функциях [11], получим его представление в виде

$$g(x,y) = g_0(y)\frac{2}{\pi x} + g_1(x,y),$$

$$g_0(y)\mathbf{F}_1^{-1}(y)K_0^{-1}(\infty,\beta)F_0(\beta),$$

$$g_1(x,y) = \mathbf{F}_2^{-1}(x,y)K^{-1}(\alpha,\beta)F_2(\alpha,\beta),$$

$$K_0^{-1}(\infty,\beta) = \lim |\alpha|^{-1} K^{-1}(\alpha,\beta), \quad |\alpha| \to \infty,$$

$$F_2(\alpha,\beta) = F_1(\alpha,\beta) + F_0(\beta)\frac{2i}{\alpha} - \\ - 2iK_0^{-1}(\infty,\beta)K(\alpha,\beta)F_0(\beta) \operatorname{sign}\alpha,$$

$$F_0(\beta) = \mathbf{F}_1(\beta) f_0(y),$$

$$F_1(\alpha, \beta) = \mathbf{F_2}(\alpha, \beta) f_1(x, y).$$

Вновь возвратимся к интегральному уравнению (1.1). Рассмотрим тот случай, когда $c \to \infty$, а s остается ограниченным. В этом случае штамп превращается в полосовой, $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, $|y| < s$, и интегральное уравнение оказывается заданным в этой полосе. Пусть полоса представляет совокупность $N + 1$ жестких штампов с вертикальными границами, проходящими через точки x_n, $n = 1,2,\ldots,N$, которые сблизились между собой границами. Это означает, что функция $f(x, y)$ в общем случае имеет ступенчатый вид в точках x_n. Функциональное уравнение (2.6) принимает представление

$$K(\alpha, \beta) Q_N(\alpha, \beta) = \Phi_2 + \Phi_6 + F,$$

$$Q_N(\alpha, \beta) = \mathbf{F_2}(\alpha, \beta) g_N(x, y).$$

Здесь через $g_N(x, y)$ обозначены контактные напряжения под всей совокупностью $N + 1$ штампов. С целью получения сингулярных концентраций напряжений под совокупностью сблизившихся штампов используем свойства решений для полосового штампа, полученные во многих работах [2, 3], где построены энергетические контактные напряжения. Сопоставляя его с полученным выше результатом, показывающим, что только разрыв функции $f(x, y)$ генерирует сингулярности, получим следующее представление концентрации сингулярных контактных напряжений в окрестностях точек x_n в зонах сближения жестких штампов, расположенных в полосе

$$g_N(x, y) = \sum_{n=1}^{N} f_N(y)(x - x_n)^{-1},$$

$$f_N(y) \in L_1(-s, s).$$

В случае уравнения (1.2), описывающего поведение трещины, считаем, что ее плоская полость расположена в многослойной среде параллельно границе. Обратив оператор $\mathbf{L}(\partial x, \partial y)$, приходим к рассмотренному интегральному уравнению для штампа. При этом в правой части интегрального уравнения возникает произвол, позволяющий потребовать ограниченности решения интегрального уравнения, то есть перемещений берегов трещин [12].

Более детальный анализ решения интегрального уравнения с учетом разложения функции $K(\alpha, \beta)$ (1.1) показывает, что в случае $f(x, y) = f_0(y) \operatorname{sign} x + f_1(x, y)$, решение при $x \to 0$ имеет вид [10]

$$\begin{aligned} t_{3\lambda}(x, y) &\to \sigma_{2\lambda}(y) x^{-1} + \sigma_{3\lambda}(y) \ln|x|\,, \\ t_{3r}(x, y) &\to \sigma_{2r}(y) x^{-1} + \sigma_{3r}(y) \ln|x|\,. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Используя имеющийся произвол в правой части, подбором которого можно исключить в последних формулах сингулярный член, получаем перемещения в вершинах трещин. В случае, если бы расстояние между вершинами трещин было конечного размера, указанные перемещения были бы конечными величинами [12], даже нулями. Когда же расстояние между трещинами оказывается очень малым, то из формул (3.3) следует, что перемещения имеют вид

$$\begin{aligned} t_{3\lambda}(x, y) &\to \sigma_{3\lambda}(y) \ln|x|\,, \\ t_{3r}(x, y) &\to \sigma_{3r}(y) \ln|x|\,. \end{aligned}$$

Трещины вершинами логарифмически быстро стремятся друг к другу, то есть сливаются.

Выводы

Решение интегрального уравнения показывает, что в зоне сближения штампов контактные напряжения на границе каждого из них имеют сингулярную особенность, выводящую решение из энергетического пространства. Это обстоятельство свидетельствует о том, что зона сингулярных напряжений в реальности разрушилась еще до того, как напряжения достигли сингулярного значения. Задача теории упругости явилась лишь индикатором того, что такой процесс произошел, вылившись в стартовое землетрясение [10]. В случае трещин, с учетом исследований свойств решений интегральных уравнений, полученных ранее, доказано, что лежащие в одной плоскости трещины, вершины которых удалены на некоторое расстояние, будут безудержно сливаться с логарифмическим ростом, когда расстояние между вершинами достигнет некоторого минимума.

Литература

1. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

2. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.
4. *Крейн М.Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи математических наук. 1958. Т. 13. Вып. 5. С. 3–120.
5. *Wiener N., Hopf E.* Über eine Klasse singuläre Integralgleichungen, S. B. Preuss. Acad. Wiss, 1932. P. 696–706.
6. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Иностранная литература, 1962. 280 с.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962. 600 с.
8. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматлит, 1977. 640 с.
9. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О блочных элементах в приложениях // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15. № 1. С. 95–103.
10. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.
11. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
12. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

References

1. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Nonclassical mixed problems in the theory of elasticity]. Moscow, Nauka Pub., 1974, 456 p. (In Russian)
2. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (In Russian)
3. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh* [Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media]. Moscow, Nauka Pub., 1999, 246 p. (In Russian)
4. Kreyn M.G. Integral'nye uravneniya na polupryamoy s yadrom, zavisyashchim ot raznosti argumentov [Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 1958, vol. 13, iss. 5, pp. 3–120. (In Russian)
5. Wiener N., Hopf E. *Über eine Klasse singuläre Integralgleichungen.* S. B. Preuss. Acad. Wiss, 1932, pp. 696–706.
6. Nobl B. *Metod Vinera–Khopfa* [The Wiener–Hopf method]. Moscow, Inostrannaya literatura Pub., 1962, 280 p. (In Russian)
7. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Pub., 1962, 600 p. (In Russian)
8. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary problems]. Moscow, Fizmatlit Pub., 1977, 640 p. (In Russian)
9. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O blochnykh elementakh v prilozheniyakh [About block elements in applications]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical mesomechanics], 2012, vol. 15, no. 1, pp. 95–103. (In Russian)
10. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K probleme fiziko-mekhanicheskogo predvestnika startovogo zemletryaseniya: mesto, vremya, intensivnost' [To the problem of the physico-mechanical forerunner of the initial earthquake: place, time, intensity]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2016, vol. 466, no. 6, pp. 664–669. (In Russian)
11. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. *Integral'nye preobrazovaniya obobshchennykh funktsiy* [Integral transformations of generalized functions]. Moscow, Nauka Pub., 1977, 288 p. (In Russian)
12. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media]. Moscow, Nauka Pub., 1989, 344 p. (In Russian)

Статья поступила 27 сентября 2017 г.