

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОБ ИНДЕНТИРОВАНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ

Ватульян А. О., Плотников Д. К.

ON INDENTATION OF HETEROGENEOUS STRIP

Vatulyan A. O.^{*,**}, Plotnikov D. K.^{*}^{*} Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russia^{**} National University of Science and technology “MISIS”, Moscow, 119049, Russia
e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Abstract. This paper presents a method for constructing approximate solutions to the problem of parabolic stamp indentation into heterogeneous elastic strip tightly engaged with the non-deformable base. The proposed method is based on the variational formulation of the problem and involves simplification of the potential energy functional through hypothesis of displacement fields introduction. Auxiliary problem of the action of a concentrated load on the boundary of an inhomogeneous strip is solved using the variational Lagrange principle. A system of two second order differential equations with variable coefficients with respect to the displacement vector components on the upper bound of the strip is obtained. Solution of the contact problem of parabolic stamp indentation into heterogeneous elastic strip in the case when the elasticity moduli depend only on the transverse coordinate is obtained. The characteristic relations such as “force – size of the contact area”, “indentation – size of the contact area” and the stress distribution in the contact zone for some different laws of heterogeneity are plotted.

Keywords: heterogeneous, elasticity, strip, variational method, indentation, contact problem.

Введение

В последние годы задачи об определении физических свойств твердых тел играют большую роль при оценке локальных и интегральных свойств функционально-градиентных структур, горных пород и углей. Одним из наиболее часто используемых методов идентификации свойств является контактный способ оценки податливости среды, опирающийся на процедуры микро- и наноиндентирования. При этом различные аспекты наноиндентирования, влияние податливости основания, трещиноватости обсуждались в ряде работ [1, 2]. Данные наноиндентирования углей представлены в работах [2, 3] в виде зависимостей сила – внедрение при активном нагружении и разгрузке. Обычно по данным индентирования определяется эффективный модуль Юнга [4]. Для неоднородных материалов в качестве такой характеристики может выступать некоторая усредненная характеристика. Отметим, что в настоящее время усилился интерес к определению неоднородных упругих характеристик твердых тел, а наиболее подходящей

моделью, позволяющей оценивать характеристики контактного взаимодействия, является модель полосы. Решению контактных задач о вдавливании индентора в однородную или неоднородную упругую полосу посвящен ряд монографий [5–7]. В этих работах построение решения осуществлялось при помощи сведения смешанной задачи к интегральному уравнению с ядром, имеющим логарифмическую особенность, а символ ядра для однородной среды строится явно и представляет собой мероморфную в комплексной плоскости функцию, имеющую счетное множество нулей и полюсов. Для неоднородной среды такое аналитическое представление получить невозможно для произвольных законов неоднородности и эта функция определяется на основе трехступенчатой процедуры [7]. На первом этапе решается краевая задача для матричного дифференциального оператора с параметром (параметром преобразования Фурье); на втором этапе строится аппроксимация полученной численно функциональной зависимости дробно-рациональными и степен-

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

Плотников Дмитрий Константинович, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: dplotnikov@sfned.ru.

Работа выполнена при частичной поддержке программы Президиума РАН I.33П.

ными функциями [8]; далее строится решение интегрального уравнения.

Возможно построение прикладной модели деформирования неоднородной полосы при контактном взаимодействии с параболическим индентором [9], в которой приближенное выражение для символа ядра строится аналитически на основе различных подходов, в частности вариационного, и представляет собой рациональную функцию параметра преобразования Фурье. Этот подход и особенности его реализации представлены в настоящей работе.

1. Вдавливание параболического индентора в неоднородную упругую полосу

Пусть симметричный гладкий недеформируемый штамп вдавливается в верхнюю границу упругой неоднородной полосы. Предполагается, что силы трения между штампом и полосой отсутствуют, вне штампа нагрузка отсутствует. Под действием силы P штамп смещается по оси x_3 на величину δ .

Будем считать, что коэффициенты Ляме λ и μ представляют собой ограниченные положительные функции и зависят от координат

$$\lambda = \lambda(x_1, x_3), \quad \mu = \mu(x_1, x_3),$$

$$x_1 \in [-\infty, \infty], \quad x_3 \in [0, h].$$

Связь между напряжениями и перемещениями определяется законом Гука

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) u_{1,1} + \lambda u_{3,3},$$

$$\sigma_{33} = \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu) u_{3,3},$$

$$\sigma_{13} = \mu (u_{1,3} + u_{3,1}),$$

где u_1, u_3 — компоненты вектора смещений.

Нижнюю границу полосы предполагаем жестко заземленной. Граничные условия для данной задачи имеют вид

$$u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0,$$

$$\sigma_{13}(x_1, h) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad |x_1| > a,$$

$$u_3(x_1, h) = \delta - \frac{1}{2R} x_1^2, \quad |x_1| \leq a,$$

где a — размер площадки контакта, δ и R — внедрение и радиус кривизны штампа соответственно.

Обезразмерим задачу, введя новые переменные и параметры:

$$\eta = x_1/h, \quad \xi = x_3/h,$$

$$\lambda = \mu_0 f_1(\eta, \xi), \quad \mu = \mu_0 f_2(\eta, \xi),$$

$$\hat{u}_i = u_i/h, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\mu_0, \quad i, j = 1, 3,$$

$$\beta = a/h, \quad \delta_* = \delta/h, \quad r = R/h.$$

Для изучения контактного взаимодействия, как обычно, рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки, локализованной на отрезке $[-\beta, \beta]$, на верхнюю границу полосы

$$\hat{\sigma}_{13}(\eta, 1) = 0, \quad \hat{\sigma}_{33}(\eta, 1) = q.$$

Для решения краевой задачи теории упругости с переменными коэффициентами используем приближенный подход, основанный на вариационном принципе Лагранжа. Запишем безразмерный функционал потенциальной энергии (полная энергия системы)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_S \hat{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{-\beta}^{\beta} q \hat{u}_3(\eta, 1) d\eta,$$

$$S = [-\infty, \infty] \times [0, 1].$$

Упростим его в рамках метода Канторовича [10], принимая следующие гипотезы относительно компонент перемещений и полагая линейные законы изменения перемещений по толщине $\hat{u}_1 = \xi u(\eta)$, $\hat{u}_3 = \xi w(\eta)$; при этом удовлетворены граничные условия при $\xi = 0$. Компоненты тензоров деформаций и безразмерных напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \xi u', \quad \varepsilon_{33} = w, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} (u + \xi w'),$$

$$\hat{\sigma}_{11} = (f_1 + 2f_2) \xi u' + f_1 w,$$

$$\hat{\sigma}_{33} = (f_1 + 2f_2) w + f_1 \xi u',$$

$$\hat{\sigma}_{13} = f_2 (u + \xi w').$$

Здесь и далее штрих означает производную по η . Интегрируя по ξ , получим следующее представление

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} & \left(A_{11} u'^2 + 2(A_{12} u'w + A_{21} uw') + \right. \\ & \left. + A_{20} w^2 + A_{10} u^2 + A_{22} w'^2 \right) d\eta - \\ & - \int_{-\beta}^{\beta} q w d\eta, \quad (1.1) \end{aligned}$$

причем коэффициенты A_{ij} определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_0^1 (f_1 + 2f_2) \xi^2 d\xi, & A_{10} &= \int_0^1 f_2 d\xi, \\ A_{12} &= \int_0^1 f_1 \xi d\xi, & A_{21} &= \int_0^1 f_2 \xi d\xi, \\ A_{22} &= \int_0^1 f_2 \xi^2 d\xi, & A_{20} &= \int_0^1 (f_1 + 2f_2) d\xi. \end{aligned}$$

В соответствии с вариационным принципом Лагранжа найдем первую вариацию функционала (1.1) и приравняем ее нулю

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-(A_{11}u')' \delta u - \right. \\ &\quad - (A_{12}w)' \delta u + A_{12}u' \delta w + A_{21}w' \delta u - \\ &\quad - (A_{21}u)' \delta w + A_{20}w \delta w + A_{10}u \delta u - \\ &\quad \left. - (A_{22}w)' \delta w \right) d\eta - \int_{-\beta}^{\beta} q \delta w d\eta = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях δu , δw , получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно смещений на верхней границе полосы

$$\begin{aligned} (A_{11}u')' + (A_{12}w)' - \\ - A_{21}w' - A_{10}u &= 0, \\ A_{12}u' - (A_{21}u)' - (A_{22}w)' + \\ + A_{20}w &= q. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отметим, что эта система уравнений может служить в качестве исходной при анализе контактных задач для покрытий, имеющих переменные свойства вдоль оси η , в частности при наличии границ между различными материалами. Система (1.2) в случае постоянных коэффициентов, то есть в той ситуации, когда f_1 и f_2 зависят только от ξ , допускает решение с помощью преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \hat{u}(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\alpha) e^{-i\alpha\eta} d\alpha, \\ \hat{w}(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\alpha) e^{-i\alpha\eta} d\alpha, \\ q(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\alpha) e^{-i\alpha\eta} d\alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в систему (1.2), имеем

$$\begin{aligned} (\alpha^2 A_{11} + A_{10}) \tilde{u} - i\alpha (A_{21} - A_{12}) \tilde{w} &= 0, \\ (\alpha^2 A_{22} + A_{20}) \tilde{w} + i\alpha (A_{21} - A_{12}) \tilde{u} &= \tilde{q}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Исключая \tilde{u} из (1.4), получим соотношение

$$\tilde{w} = K(\alpha) \tilde{q}, \quad (1.5)$$

где $K(\alpha)$ — передаточная функция вида

$$K(\alpha) = \frac{a_0 + a_1 \alpha^2}{b_0 + b_1 \alpha^2 + b_2 \alpha^4}, \quad (1.6)$$

которая связывает трансформанты вертикального смещения и нормального напряжения. Приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_0 &= A_{10}, & a_1 &= A_{11}, \\ b_0 &= A_{10}A_{20}, & b_2 &= A_{11}A_{22}, \end{aligned}$$

$$b_1 = A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - (A_{12} - A_{21})^2.$$

На основе (1.5) можно построить дифференциальное уравнение, связывающее сами смещения и нормальные напряжения при $\xi = 1$. Преобразуя (1.5) к виду

$$(b_0 + b_1 \alpha^2 + b_2 \alpha^4) \tilde{w} = (a_0 + a_1 \alpha^2) \tilde{q}$$

и переходя от трансформант Фурье к исходным функциям w и q , аналогично [6] получим операторное уравнение четвертого порядка

$$b_2 w^{IV} - b_1 w'' + b_0 w = -a_1 q'' + a_0 q. \quad (1.7)$$

Подобное операторное уравнение исследовалось в [6], где оно получалось из решения задачи для однородной полосы путем асимптотического анализа. После построения операторного уравнения (1.7) перейдем к решению контактной задачи. Решение уравнения (1.7) должно удовлетворять следующим условиям:

$$w \rightarrow 0 \quad (|\eta| \rightarrow \infty), \quad q = 0 \quad (|\eta| > \beta),$$

$$w = \delta_* - \frac{1}{2r}\eta^2 \quad (|\eta| \leq \beta).$$

При $|\eta| > \beta$ уравнение (1.7) принимает вид

$$b_2 w^{IV} - b_1 w'' + b_0 w = 0. \quad (1.8)$$

Решение (1.8) является четной функцией и для $\eta > 0$ общее решение (1.8), убывающее при $\eta \rightarrow \infty$, имеет вид

$$w(\eta) = C_1 e^{-\lambda_1 \eta} + C_2 e^{-\lambda_2 \eta},$$

$$\lambda_{1,2} = \left[\frac{1}{2b_2} \left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая в уравнении (1.7)

$$w = \delta_* - \frac{1}{2r}\eta^2,$$

в зоне контакта $|\eta| \leq \beta$ получим

$$\begin{aligned} q'' - k^2 q &= \\ &= -\frac{1}{a_1 r} \left(b_1 + \frac{1}{2} b_0 (2\delta_* r - \eta^2) \right), \quad (1.9) \\ k^2 &= a_0 / a_1. \end{aligned}$$

Учитывая, что ввиду симметричности задачи нормальное напряжение на верхней границе полосы является четной функцией, запишем общее решение уравнения (1.9)

$$\begin{aligned} q(\eta) &= C_3 \operatorname{ch}(k\eta) + \\ &+ \frac{1}{r a_1 k^2} \left(b_1 - \frac{b_0}{k^2} + \frac{1}{2} b_0 (2\delta_* r - \eta^2) \right). \end{aligned}$$

Неизвестные константы интегрирования C_1, C_2, C_3 , а также связь между зоной контакта β и внедрением штампа δ_* найдем из условий стыковки на границе зоны контакта $\eta = \beta$:

$$q(\beta) = 0, \quad w(\beta) = \delta_* - \frac{1}{2r}\beta^2,$$

$$w'(\beta) = -\frac{\beta}{r},$$

условие непрерывности горизонтальных смещений верхней границы дает соотношение

$$w'''(\beta) = \frac{1}{A_{22}} q'(\beta).$$

Таким образом, контактное напряжение в зоне контакта ($|\eta| \leq \beta$) имеет вид

$$\begin{aligned} q(\eta) &= \frac{1}{r a_1 k^2} \left[\left(1 - \frac{\operatorname{ch}(k\eta)}{\operatorname{ch}(k\beta)} \right) \times \right. \\ &\quad \left(b_1 - \frac{b_0}{k^2} + b_0 \delta_* r \right) + \\ &\quad \left. + \frac{b_0}{2} \left(\frac{\operatorname{ch}(k\eta)}{\operatorname{ch}(k\beta)} \beta^2 - \eta^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Вертикальное смещение верхней границы полосы вне зоны контакта ($|\eta| > \beta$) является экспоненциально убывающим и определяется согласно следующей формуле:

$$w(\eta) = g_2 e^{\lambda_1(\beta-\eta)} - g_1 e^{\lambda_2(\beta-\eta)},$$

$$g_i = \lambda_i \frac{\lambda_i^2 \frac{\beta}{r} + \frac{1}{A_{22}} q'(\beta)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}.$$

Наконец, безразмерную силу P_* (сила, отнесенная к $\mu_0 h$), действующую на штамп, найдем, используя условие равновесия

$$P_*(\beta) = \int_{-\beta}^{\beta} q d\eta.$$

2. Результаты

Ниже приведены некоторые результаты решения контактной задачи вышеизложенным методом. Проведено сравнение предлагаемого подхода и точного решения при постоянных значениях параметров Ляме с некоторыми результатами, полученными другими авторами.

В работе [5] получено точное аналитическое решение передаточной функции $K_t(\alpha)$ и асимптотическое выражение безразмерного значения $P_t(\beta)$

$$\begin{aligned} K_t(\alpha) &= \frac{1-\nu}{\alpha f_2} \times \\ &\times \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2\alpha - 4\alpha}{2\kappa \operatorname{ch} 2\alpha + 1 + \kappa^2 + 4\alpha^2}, \quad (2.1) \\ \kappa &= 3 - 4\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_t(\beta) &= \frac{\pi f_2}{(1-\nu)2r} \beta^2 \times \\ &\times [1 - d_1 \beta^2 - (3d_2 - d_1^2) \beta^4 + O(\beta^6)], \quad (2.2) \\ d_1 &= -0,716, \quad d_2 = 0,245. \end{aligned}$$

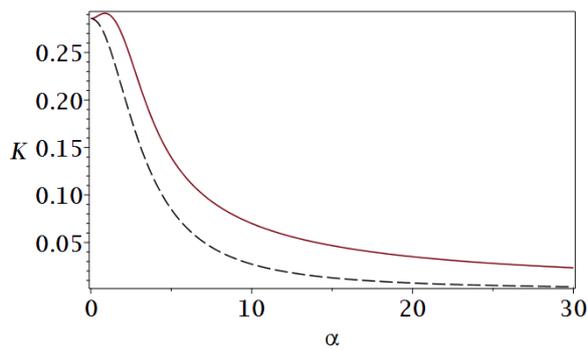


Рис. 1

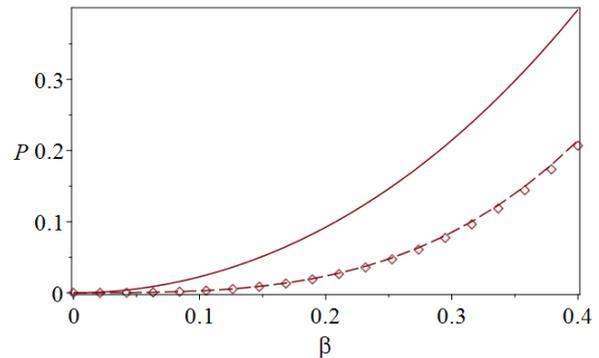


Рис. 2

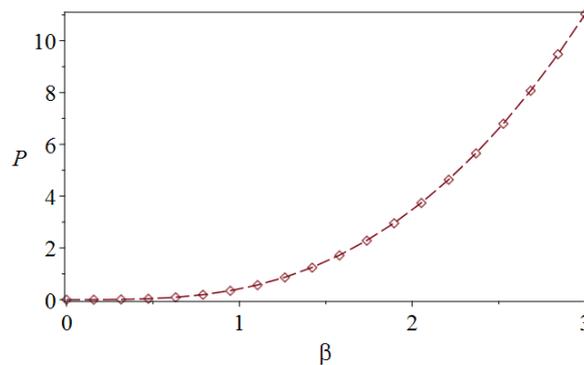


Рис. 3

На рис. 1 изображено сравнение передаточной функции $K(\alpha)$, определяемой согласно (1.6), с точным аналитическим выражением (2.1) для постоянных значений параметров Ляме $f_1 = 1,5$, $f_2 = 1$, что соответствует значению $\nu = 0,3$. Пунктирная кривая соответствует результатам вычислений, произведенным по формуле (1.6), сплошная кривая — точному решению для однородной полосы $K_t(\alpha)$ согласно (2.1).

На рис. 2 представлено сравнение зависимости сила — размер площадки контакта $P_*(\beta)$ при малых β . Пунктирная кривая соответствует приближенному решению, сплошной кривой изображена та же зависимость в соответствии с (2.2), квадратиками обозначена зависимость, построенная по модели типа Рейсснера, согласно уравнению, полученному на основе асимптотического анализа решения для полосы [6], имеющему структуру (1.7) с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_0 = b_1 = 1, \quad a_1 &= \frac{3 - 2\nu}{3(1 - \nu)}, \\ b_0 = f_1 + 2f_2, \quad b_2 &= \frac{4}{3} \frac{f_2}{1 - \nu}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

что соответствует коэффициенту постели упругого основания $l = (\lambda + 2\mu)/h$.

На рис. 3 представлено сравнение зависимости $P_*(\beta)$, полученной с помощью предложенной в данной работе приближенной модели (пунктирная линия) и по модели из [6] с параметрами (2.3) (квадратики) при больших значениях β .

Подытожим результаты сравнительного анализа. Отметим, что точное решение для $K(\alpha)$ имеет максимум в некоторой точке α_* , в то время как приближенная модель дает монотонное убывание передаточной функции. Известно, что структура контактного давления, зависимость $P_*(\beta)$ определяются поведением передаточной функции $K(\alpha)$ в нуле и на бесконечности.

При $\alpha \rightarrow 0$ приближенное значение передаточной функции совпадает с точным,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} K_t(\alpha) = \frac{1}{f_1 + 2f_2}.$$

В то же время, на бесконечности приближенное и точное значения для передаточной функции имеют разный характер убывания.

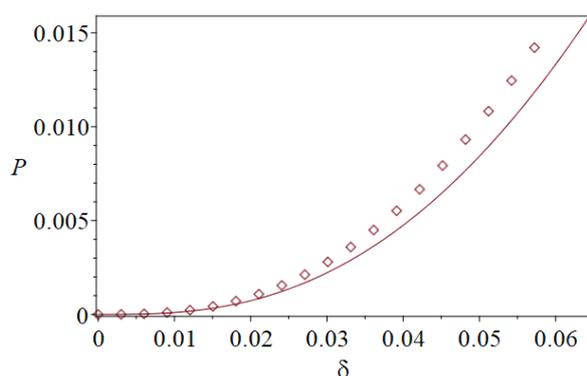


Рис. 4

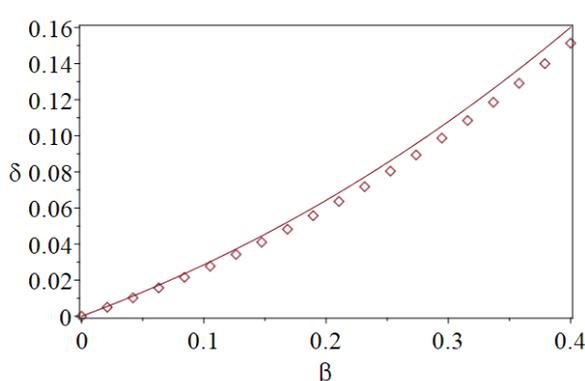


Рис. 5

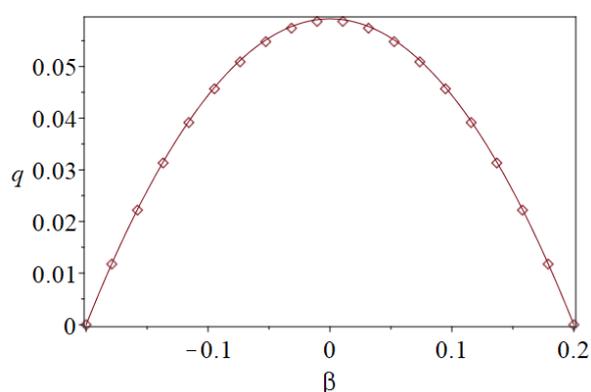


Рис. 6

Так,

$$K(\alpha) = \frac{a_1}{b_2} \alpha^{-2}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

$$K_t(\alpha) = \frac{1 - \nu}{f_2} |\alpha|^{-1}, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

В силу асимптотического поведения (2.4) контактное давление в окрестности границы области контакта уже не имеет корневой структуры, присущей задаче для полуплоскости, а имеет структуру, подобную решениям контактных задач для пластин [6, 11]. При этом из рис. 2 видно, что приближенное выражение $P_*(\beta)$ хорошо согласуется с решением по теории типа Рейсснера [6].

Таким образом, сравнительный анализ свидетельствует о том, что предложенная модель дает результаты, близкие к полученным на основе асимптотического метода в [6].

На основе представленной модели произведен ряд расчетов по определению контактного давления, зависимости сила – внедрение для различных законов неоднородности. На рис. 4–6 приведены графики зависимо-

стей $P_*(\delta)$, $\delta_*(\beta)$ и распределение контактного напряжения в зоне контакта для случая $\beta = 0,2$ соответственно для неоднородной по толщине полосы для разных законов неоднородности. Квадратиками изображен график для убывающих законов неоднородности $f_1 = 1 - 1/4\xi^2$, $f_2 = 1 - 1/2\xi^2$, сплошная линия соответствует расчетам, проведенным для кусочно-постоянных законов неоднородности. Расчеты проведены для полосы, состоящей из трех слоев одинаковой толщины, безразмерные параметры верхнего и нижнего слоев полосы $f_{10} = 3/4$ и $f_{20} = 1$, среднего — $f_{11} = 5/4$ и $f_{21} = 1/2$ выбраны так, чтобы интегралы по толщине от законов неоднородности $\int_0^1 f_i d\xi$ ($i = 1,2$) были одинаковыми для рассматриваемых случаев.

Отметим, что зависимость $P_*(\beta)$ и распределение контактного напряжения для этих законов неоднородности практически одинаковы. Такой же результат имеет место и для некоторых других видов неоднородностей (линейных, экспоненциальных) при одинаковых средних. Это свидетельствует о том, что для

тонких покрытий вид зависимости $P_*(\beta)$ определяется усредненными значениями модулей. Зависимость $P_*(\delta)$ для этих законов имеет различия, которые могут быть положены в основу идентификации неоднородных свойств покрытия для простых законов неоднородности, например, линейных.

3. Заключение

Разработан метод исследования контактной задачи для тонкой неоднородной полосы, найдено контактное давление для разных законов неоднородности, получена зависимость $P_*(\beta)$, обсуждены возможные приложения при индентировании неоднородных слоистых и функционально-градиентных структур.

Литература

1. *Epshtein S. A., Borodich F. M., Bull S. J.* Nanoindentation in studying mechanical properties of heterogeneous materials // J. Min. Sci. 2016. Vol. 51, № 3. P. 470-476.
2. *Коссович Е. Л., Добрякова Н. Н., Эпштейн С. А., Белов Д. С.* Определение механических свойств микрокомпонентов углей методом непрерывного индентирования // ФТПРПИ. 2016. № 5. С. 84-91.
3. *Коссович Е. Л., Добрякова Н. Н., Минин М. Г., Эпштейн С. А., Агарков К. В.* Применение техники непрерывного нано- и микроиндентирования для определения механических свойств микрокомпонентов углей // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 2016. Т. 2, С. 30-33.
4. *Булычев С. И., Алексин В. П., Шоршоров М. Х., Терновский А. П., Шнырев Г. Д.* Определение модуля Юнга по диаграмме вдавливания // Завод. лаб. 1975. № 9. С. 1137-1140.
5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
7. *Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А. В., Кренев Л. И., Трубчик И. С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 240 с.
8. *Айзикович С. М., Волков С. С., Васильев А. С.* Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием. // Прикладная математика и механика, 2015, № 5, Т. 79, С. 710-716.
9. *Ватульян А. О., Плотников Д. К.* О некоторых контактных задачах для неоднородных

упругих тел // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 2016. Т. 1, С. 125-129.

10. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
11. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.

References

1. *Epshtein S. A., Borodich F. M., Bull S. J.* Nanoindentation in studying mechanical properties of heterogeneous materials. J. Min. Sci. 2016. Vol. 51, № 3. P. 470-476.
2. *Kossovich E. L., Dobryakova N. N., Epstein S. A., Belov D. S.* Opredelenie mekhanicheskikh svoystv mikrokomponentov uglei metodom neprerivnogo indentirovaniya [Determination of the mechanical properties of coal by continuous microindentation]. *FTPRPI* [J. Min. Sci.], 2016, no. 5, pp. 84-91. (In Russian)
3. *Kossovich E. L., Dobryakova N. N., Minin M. G., Epshtein S. A., Aarkov K. V.* Primenenie tehniki neprerivnogo nano- i mikroindentirovaniya dlya opredeleniya mekhanicheskikh svoystv mikrokomponentov uglei [Depth-sensing nano- and microindentation for characterization of coals microcomponents mechanical properties]. *Trudi XVIII Mejdunarodnoi konferencii 'Sovremennye problemi mehaniki sploshnoi sredi'* [Works of 18th international conf. 'Modern problems of continuum mechanics']. Rostov-on-Don, 2016. vol. 2, pp. 30-33. (In Russian)
4. *Bulichev S. I., Alehin V. P., Shorshorov M. H., Ternovskiy A. P., Shnirev G. D.* Opredelenie modulya Unga po diagramme vдавlivaniya [Determination of Young's modulus by indentation diagram] *Zavod. lab.* [Industrial Laboratory]. 1975. no 9. pp. 1137-1140. (In Russian)
5. *Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babeshko V. A.* *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problem in elasticity theory]. Moscow, Science, 1974, 456 pp. (In Russian)
6. *Aleksandrov V. M., Mhitaryan S. M.* *Kontaktne zadachi dlya tel s tonkimi pokritiyami i prosloikami* [Contact problems for bodies with thin coatings and layers]. Moscow, Science, 1983. 488 pp. (In Russian)
7. *Aizikovich S. M., Aleksandrov V. M., Belokon A. V., Krenov L. I., Trubchik I. S.* *Kontaktne zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnih sred* [Contact problems of theory of elasticity for inhomogeneous media]. Moscow, FIZMATLIT, 2006. 240 pp. (In Russian)
8. *Aizikovich S. M., Volkov S. S., Vasilev A. S.* *Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha o vдавlivanii konicheskogo shtampa v poluprostranstvo s neodnorodnim po glubine pokritiem* [The ax-

- isymmetric contact problem of the indentation of a conical punch into a half-space with a coating inhomogeneous in depth]. *Prikladnaya matematika i mehanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 2015, no 5, vol 79, pp. 710-716. (In Russian)
9. Vatulyan A. O., Plotnikov D. K. О некоторых контактных задачах для неоднородных упругих тел [On some contact problems for inhomogeneous elastic bodies]. *Trudi XVIII Mejdunarodnoi konferencii 'Sovremennye problemi mehaniki sploshnoi sredi'* [Works of 18th international conf. 'Modern problems of continuum mechanics']. Rostov-on-Don, 2016. vol. 1, pp. 125-129. (In Russian)
 10. Mihlin S. G. *Variacionnye metody v matematicheskoj fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Science, 1970. 512 pp. (In Russian)
 11. Grigoluk E. I., Tolkachev V. M. *Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek* [Contact problems of the theory of plates and shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 411 pp. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2017

© Ватульян А. О., Плотников Д. К., 2017

Статья поступила 30 июня 2017 г.