

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ДВИЖЕНИЕ КОРНЕЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН ЛЭМБА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Евдокимов А. А.

## ALLOCATION AND MOVEMENT OF ROOTS OF THE LAMB WAVE DISPERSION EQUATION IN COMPLEX PLANE

Evdokimov A. A.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia  
e-mail: sfom@yandex.ru

*Abstract.* The classical Lamb problem is considered for steady-state harmonic waves in a free elastic layer under the applied load. An integral representation of the solution is reduced to an infinite series in terms of residues at the poles of Green's matrix. These poles coincide with the roots of the Lamb's dispersion equation and define eigenwaveforms that are normal modes of the layer. The pole arrangement on the continual dispersion curves in complex plane of wave number and their frequency dependency are studied. Two transformation mechanisms of the complex wave numbers into the real ones are observed. The first mechanism is regular. In this case, complex roots become real through the imaginary axis. Second one is irregular, when complex pole becomes real without passing imaginary axis and forms a backward wave. These Lamb waves have zero group velocity at the cutoff frequencies. Their appearances are accompanied by resonance phenomena.

*Keywords:* elastic layer, dispersion equation, Lamb wave.

## Введение

Волны Лэмба [1], распространяющиеся вдоль свободного слоя, используются во многих технических приложениях, таких, например, как акустоэлектронные приборы и устройства, работающие на поверхностных волнах [2], или системы ультразвукового мониторинга состояния протяженных конструкций с помощью сети активных пьезосенсоров [3]. Математически волны Лэмба, возбуждаемые некоторой заданной поверхностной нагрузкой, описываются вычетами в вещественных полюсах  $\zeta_n$  Фурье-символа матрицы Грина в интегральном представлении решения соответствующей краевой задачи в виде обратного преобразования Фурье [4–6]. Комплексным полюсам соответствуют неоднородные волны, амплитуда которых экспоненциально убывает с удалением от области приложения нагрузки или препятствия (для отраженных и рассеянных волн). Поэтому при проведении расчетов вкладом вычетов в комплексных полюсах обычно пренебрегают.

Однако в некоторых случаях, например, при решении контактной задачи методом бесконечных систем [7], или при удовлетворении граничных условий на поверхности препятствия в задачах дифракции [8], необходимо использовать полное разложение в виде ряда по вычетам не только в ограниченном числе вещественных, но и в бесконечном наборе комплексных полюсов.

Со времени первой публикации Лэмба [1] зависимость вещественных полюсов  $\zeta_n$  от безразмерной круговой частоты  $\omega = 2\pi fh/c_s$ , которая визуализируется с помощью дисперсионных кривых для волн Лэмба, изучена досконально (рис. 1). Здесь и далее результаты приводятся в безразмерном виде, получаемом при отнесении размерных величин к толщине слоя  $h$ , скорости распространения поперечных волн в упругой среде  $c_s$ , плотности  $\rho$  или к единицам измерения, выраженным через данные три величины;  $f$  — размерная частота установившихся колебаний. Полюса  $\zeta_n$ , совпадающие с корнями дисперсионного уравнения, являются точками спектра

Евдокимов Александр Александрович, аспирант кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: evdokimovmail27@gmail.com.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 17-11-01191).

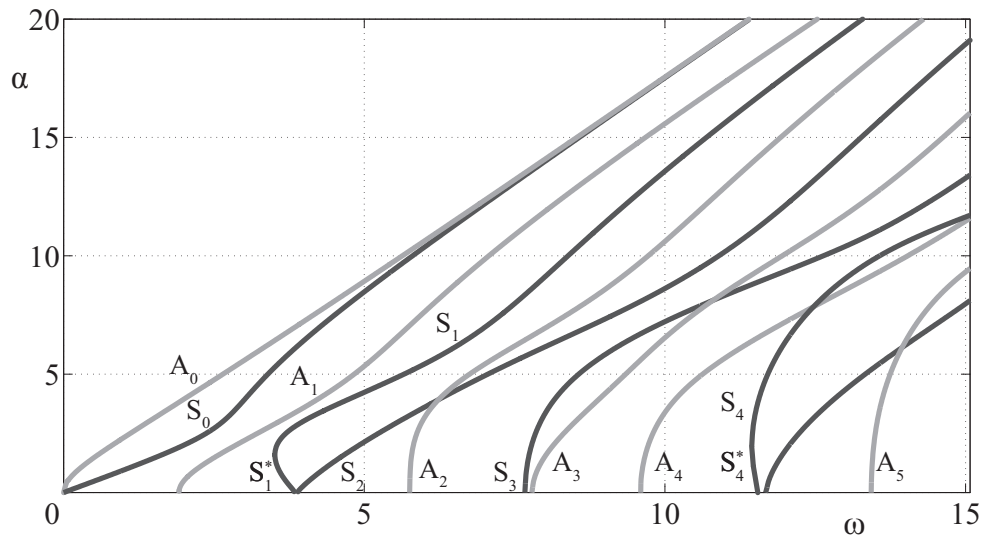


Рис. 1. Зависимость вещественных полюсов от круговой частоты

(собственными числами) краевой задачи об установившихся гармонических колебаниях упругого слоя с круговой частотой  $\omega$ . Соответствующие собственные решения (нормальные моды) по типу описываемых ими колебаний делятся на две группы: антисимметричные и симметричные ( $A_n$  и  $S_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) [4, 5]. Соответственно маркируются и вещественные ветви дисперсионных кривых (рис. 1). Их вид указывает на то, что при любой фиксированной частоте  $\omega$  в слое может возбуждаться конечное число симметричных и антисимметричных мод, описывающих бегущие волны Лэмба, причем с ростом частоты их количество увеличивается за счет новых ветвей, выходящих на определенных частотах (частотах отсечки  $\omega_n$ ) с оси абсцисс.

Вещественные ветви кривых не появляются ниоткуда — они продолжают комплексные ветви, а частоты отсечки — это точки перехода от комплексных значений к вещественным (или наоборот, для обратных волн). Очевидно, что перед частотами отсечки ( $\omega < \omega_n$ ) среди комплексных корней имеются близкие к вещественным, которые становятся вещественными при  $\omega > \omega_n$ . За счет слабого экспоненциального затухания амплитуды соответствующих волн Лэмба их вклад в решение соизмерим с вкладом вещественных полюсов даже на значительных расстояниях от источника, где его также следует учитывать при численном анализе, в то время как вкладом остальных комплексных полюсов, находящихся далеко от вещественной оси, мож-

но пренебречь. С ростом частоты «дальние» комплексные полюса по очереди спускаются к вещественной оси, становясь «ближними», почти вещественными перед частотами отсечки. Поэтому интерес представляет как характер распределения «дальних» полюсов в комплексной плоскости, так и закономерностей их движения к вещественной оси.

### Математическая модель

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания  $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$  упругого изотропного слоя толщины  $h$  под действием нагрузки  $\mathbf{q}e^{-i\omega t}$ , приложенной к поверхности слоя в области  $\Omega$ . Гармонический множитель  $e^{-i\omega t}$  далее опущен, комплексная амплитуда  $\mathbf{u} = (u_x, u_z)^T$  и компоненты тензоров напряжений и деформаций упругой среды не зависят от координаты  $y$  (плоская постановка). Вне области приложения нагрузки верхняя и нижняя поверхность слоя  $z = 0$  и  $z = -h$  считаются свободными от напряжений.

Колебания точек упругого слоя описываются уравнениями Ламе

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\Delta \mathbf{u} + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\sigma|_{z=0} = \begin{cases} q(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}, \quad \sigma|_{z=-h} = 0, \quad (2)$$

а также условиями на бесконечности, вытекающими из принципа предельного поглощения [6]. Здесь  $\sigma = (\sigma_{xz}, \sigma_{zz})$  — вектор напря-

жений на поверхности слоя,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе,  $\rho$  — плотность,  $\omega$  — круговая частота,  $f$  — частота,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость поперечных волн в упругой среде.

Решение краевой задачи (1), (2) имеет явное интегральное представление в виде свертки матрицы Грина слоя  $\mathbf{k}(x, z)$  и нагрузки  $\mathbf{q}(x)$  или в альтернативной форме обратного преобразования Фурье от произведения их Фурье-символов  $\mathbf{K} = F[\mathbf{k}]$  и  $\mathbf{Q} = F[\mathbf{q}]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, z) &= \int_{\Omega} \mathbf{k}(x - \xi, z) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Контур  $\Gamma$  почти всюду совпадает с вещественной осью, отклоняясь от неё в комплексную плоскость при обходе вещественных полюсов  $\zeta_n$  матрицы Грина  $\mathbf{K}(\alpha, z)$ . В традиционных обозначениях [6] Фурье-символ матрицы Грина выражается через четыре функции  $M, P, R, S$ :

$$\mathbf{K}(\alpha, z) = \begin{pmatrix} -\alpha^2 M & -i\alpha P \\ \alpha S & R \end{pmatrix}.$$

Представление (3) справедливо для любой упругой среды с плоско-параллельными границами (полупространство, слой, пакет слоев м.т.п.), меняется только конкретный вид элементов матрицы  $\mathbf{K}$ , т.е. указанных функций  $M, P, R$  и  $S$ . Во всех случаях они могут быть представлены в виде отношения двух целых функций с одним и тем же не зависящим от  $z$  знаменателем  $\Delta(\alpha, \omega) = \det \mathbf{A}(\alpha, \omega)$ :

$$\begin{aligned} M &= M_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), \\ P &= P_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), \\ R &= R_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), \\ S &= S_1(\alpha, z)/\Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{A}$  — матрица линейной алгебраической системы, возникающей при подстановке в граничные условия общего решения обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые трансформируется исходное уравнение движения в результате преобразования Фурье.

Для рассматриваемого случая свободно-упругого слоя подробный вывод и явное

представление элементов матрицы  $\mathbf{K}$  можно найти, например, в работах [9, 10],

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= 2\mu[-2\alpha^2\sigma_{12}\gamma^4 - \\ &-(\gamma^8 + \alpha^4\sigma_{12}^2)s_1s_2 + 2\alpha^2\sigma_{12}\gamma^4c_1c_2], \\ s_n &= \text{sh } \sigma_n h, \quad c_n = \text{ch } \sigma_n h, \\ \sigma_{12} &= \sigma_1\sigma_2, \\ \sigma_n &= \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad n = 1, 2 \\ \kappa_1 &= \omega/c_p, \quad \kappa_2 = \omega/c_s, \\ c_p &= \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полюсами  $\zeta_n$  элементов матрицы  $\mathbf{K}(\alpha, z)$ , т.е. функций (4) являются корни дисперсионного уравнения

$$\Delta(\alpha, \omega) = 0. \quad (6)$$

Это уравнение имеет счетный набор корней, симметричных в силу зависимости  $\Delta$  от  $\alpha^2$ , относительно начала координат:  $\alpha = \pm\zeta_n(\omega)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для определенности считаем, что  $\zeta_n$  — полюса, расположенные в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\alpha$ ,  $\text{Im } \zeta_n \geq 0$  (выше контура интегрирования  $\Gamma$ ), а  $-\zeta_n$ , соответственно, в нижней полуплоскости. Полюса упорядочены по возрастанию мнимой части:  $\text{Im } \zeta_{n+1} \geq \text{Im } \zeta_n$ . Для вещественных полюсов  $\zeta_{n+1} \geq \zeta_n \geq 0$ . Наряду с симметрией относительно начала координат, в распределении полюсов  $\zeta_n$  в комплексной плоскости  $\alpha$  наблюдается также симметрия и относительно вещественной и мнимой оси.

Вместе с расположенным в первом квадранте корнем  $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ ,  $\xi_n > 0$ ,  $\eta_n > 0$ , уравнению (6) удовлетворяет и расположенный симметрично относительно мнимой оси корень  $\zeta_{n+1} = \xi_{n+1} + i\eta_{n+1} = -\xi_n + i\eta_n$ , а вместе с ними и расположенные в нижнем полупространстве корни  $-\zeta_n = -\xi_n - i\eta_n = \zeta_{n+1}^*$  и  $-\zeta_{n+1} = \xi_n - i\eta_n = \zeta_n^*$ . Звездочкой здесь и далее обозначаются комплексно сопряженные величины.

С использованием леммы Жордана и теоремы Коши контурный интеграл (3) для точек  $x$ , лежащих вне области приложения нагрузки  $\Omega$ , сводится к ряду по вычетам [5–10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{u}_n(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^{\pm}(z) e^{\pm i\zeta_n x}, \\ &x \notin \Omega, \\ \mathbf{a}_n^{\pm}(z) &= \mp i \text{res } \mathbf{K}(\alpha, z) \mathbf{Q}(\alpha) |_{\alpha = \mp \zeta_n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Верхний знак берется для положительных  $x$  правее  $\Omega$ , нижний — для отрицательных  $x$  левее  $\Omega$ . Слагаемые ряда, нормальные моды  $\mathbf{u}_n(x, z)$ , с точностью до постоянных множителей совпадают с ненулевыми собственными решениями однородной ( $\mathbf{q} \equiv 0$ ) краевой задачи, соответствующими собственным значениям  $\pm\zeta_n$ . При вещественных  $\zeta_n$  они описывают незатухающие бегущие волны (волны Лэмба), распространяющиеся вправо и влево от нагрузки с фазовой скоростью  $c_n = \omega/\zeta_n$  и групповой скоростью  $\nu_n = d\omega/d\zeta_n$  ( $\zeta_n$  — волновые числа этих волн). Амплитудные множители  $\mathbf{a}_n^\pm(z)$  определяют пространственную форму колебаний частиц в поперечном сечении слоя для каждой моды.

Пара комплексных, но не чисто мнимых, корней  $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$  и  $\zeta_{n+1} = -\xi_n + i\eta_n$  дают стоячую волну с амплитудой, экспоненциально убывающей как  $e^{-\eta_n|x|}$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . В поле стоячей волны нет переноса волновой энергии в среднем за период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ . Аналогичными свойствами обладает и поле, описываемое вкладом чисто мнимого корня  $\zeta_n = i\eta_n$  ( $\xi_n = 0$ ).

### Движение корней в комплексной плоскости

Корни уравнения (6) являются непрерывными функциями частоты  $\alpha = \zeta_N(\omega)$ , поэтому с изменением частоты полюса движутся в комплексной плоскости по определенным траекториям. В то время как зависимость вещественных полюсов от частоты хорошо визуализируется с помощью дисперсионных кривых на плоскости  $(\omega, \zeta)$  (рис. 1), для комплексных полюсов требуется изображение в трехмерном пространстве  $(\omega, \xi, \eta)$ , где  $\xi = \text{Re } \zeta$ ,  $\eta = \text{Im } \zeta$ . Изображение пространственных кривых сложно реализовать с помощью двумерных рисунков, хотя такие примеры имеются [5]. Более удобным оказалось построение графиков  $\xi = \text{Re } \zeta_n(\omega)$  и  $\eta = \text{Im } \zeta_n(\omega)$  с единой осью абсцисс  $\omega$  (рис. 2). Ось  $\eta$  для мнимых частей направлена вниз.

Другим способом двумерной визуализации является изображение траекторий движения полюсов в комплексной плоскости  $\alpha$ . Такое изображение дает представление об общем характере перемещения полюсов. На рис. 3 показаны траектории движения полюсов в зависимости от частоты  $\omega$ . Каждый полюс пронумерован, закрашенным маркером обозначено положение полюсов при

$\omega = 0$ , незакрашенным — их положения на указанных частотах. Пунктирными линиями на рис. 3б–3е указывается движение от  $\omega = 0$  до частоты, для которой были подсчитаны полюса на предыдущем рисунке из этой серии, тогда как сплошной линией показано движение полюса от частоты на предыдущем рисунке до текущей частоты на графике.

Анализ траектории движения полюсов с ростом  $\omega$  следует начать с определения их исходного расположения при  $\omega = 0$ . В этом случае  $\alpha = 0$  является шестикратным корнем уравнения  $\Delta(\alpha, 0) = 0$ . При небольшом увеличении частоты эти шесть корней расходятся из начала координат: по две пары вправо и влево вдоль вещественной оси и по одному вверх и вниз вдоль мнимой. На рис. 3а показано расположение полюсов на частоте  $\omega = 0,18$ .

Пара вещественных положительных корней даёт начало вещественным ветвям дисперсионных кривых  $A_0$  и  $S_0$ , выходящих на рис. 1 из нуля. Соответствующие им моды, называемые фундаментальными симметричной и антисимметричной волнами Лэмба, возбуждаются во всем частотном диапазоне  $0 \leq \omega \leq \infty$  и им традиционно присваивается нулевой порядковый номер. Поэтому с номера 1 на рис. 3а начинается нумерация полюсов, находящихся в комплексной плоскости на низких частотах  $\omega < \omega_1$ , где  $\omega_1 = 1,92$  первая частота отсечки при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,34$ , и модуля Юнга  $E = 1$  для которых приводятся численные результаты в данной статье.

Номером 1 обозначается чисто мнимый полюс  $\zeta_1$ , вышедший из начала координат и двигающийся вверх по мнимой оси, а симметричный ему полюс  $\zeta_1^* = -\zeta_1$  отмечен на рис. 3а номером 1' (здесь и далее штрихом обозначается полюса, начальная часть траектории которых проходит в нижней полуплоскости симметрично к траектории полюса с соответствующим номером в верхней полуплоскости). Выше чисто мнимого полюса  $\zeta_1$  идут пары комплексных полюсов  $\zeta_n$  и  $\zeta_{n+1}$ ,  $n = 2m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , симметричных относительно мнимой оси. Их начальное расположение аппроксимируется асимптотикой [5, 10]

$$\zeta_n = (-1)^n \ln \pi(1 + 2m) + i\pi(m + 1/2),$$

$$m = [n/2] \rightarrow \infty.$$

С ростом частоты движение полюсов  $\zeta_1$  и  $\zeta_1^*$  в противоположных направлениях сме-

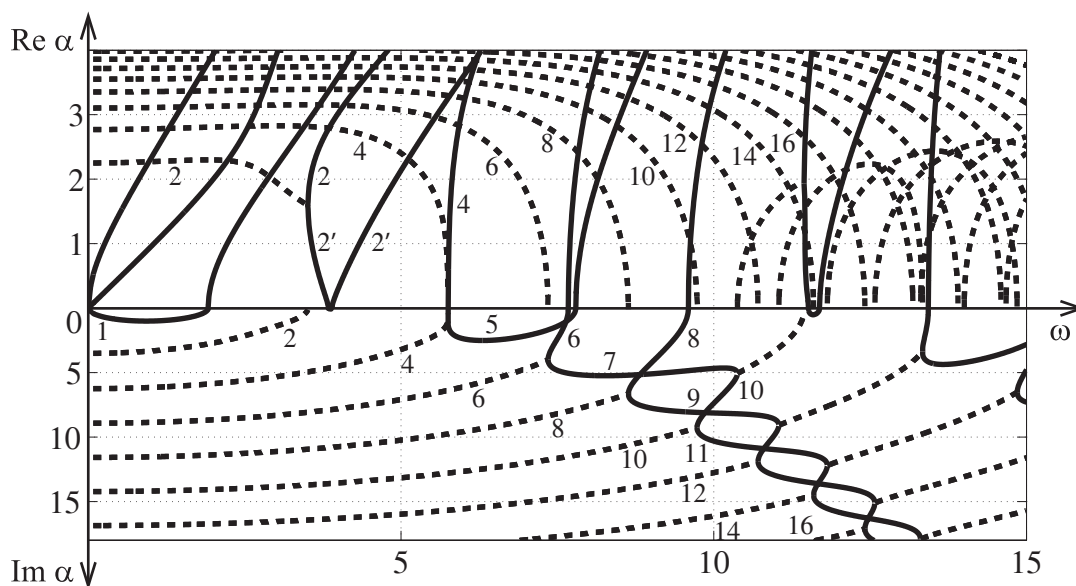


Рис. 2. Зависимость вещественной (вверху) и мнимой (внизу) части полюсов  $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$  от частоты; сплошные линии для вещественных (как на рис. 1) и чисто мнимых полюсов, пунктир — для вещественной и мнимой части комплексных полюсов.

няется встречным движением к началу координат вплоть до встречи в точке  $\alpha = 0$  на частоте отсечки  $\omega_1$ , при которой сплошная кривая 1 для  $\eta = \text{Im } \zeta_1$  в нижней части рис. 2 упирается в ось  $\omega$  и идет далее из неё вверх в виде вещественной ветви  $A_1$ . Это означает, что чисто мнимые полюса 1 и  $1'$ , встретившись в начале координат и образовав там двукратный полюс при  $\omega = \omega_1$ , расходятся при  $\omega > \omega_1$  вправо и влево вдоль вещественной оси. На рис. 3б для  $\omega = 4$  они еще не вышли за пределы диапазона рисунка, в то время как полюса фундаментальных мод  $A_0$  и  $S_0$  уже вне отрезка  $|\text{Re } \alpha| \leq 5$ , поэтому присутствуют только на рис. 3а.

При этом до выхода  $\zeta_1$  на вещественную ось ( $\omega < \omega_1$ ) расположенные выше него комплексные полюса  $\zeta_n$ ,  $n \geq 2$ , почти не смещаются от начального расположения. Но после выхода ( $\omega > \omega_1$ ) начинается быстрое движение следующей пары корней 2 и 3, которые вместе со своими комплексно сопряженными  $2'$  и  $3'$  выходят на вещественную ось в точках  $\alpha = 1,59$  и  $\alpha = -1,59$  соответственно на частоте отсечки  $\omega_2 = 3,51$ . Полюса  $2'$  и  $3'$  на вещественной оси становятся симметричными, с ростом частоты движутся в направлении  $\alpha = 0$ , образуя тем самым обратную волну (см. рис. 2 и рис. 3б).

Остальные корни в комплексной плоскости смещаются незначительно, пока пара 2, 3 вместе с симметричной парой  $2'$ ,  $3'$  не выйдет на вещественную ось. После этого ускоряется движение следующей пары 4, 5 и т.д. Общее направление движения полюсов — вниз к вещественной оси, но не монотонно, а с возможным локальным отступлением вверх вдоль мнимой оси. Как правило, комплексные полюса симметричной пары  $\zeta_{2n}$ ,  $\zeta_{2n+1}$  сначала движутся навстречу друг другу с небольшим монотонным снижением и встречаются на чисто мнимой оси. Эта часть траектории выглядит как выгнутые вниз дуги или чаши (рис. 3). Затем полюса расходятся вдоль мнимой оси вверх и вниз. Для определенности считаем, что вниз идет полюс с меньшим номером  $n = 2m$ , а навстречу ему из нижней полуплоскости движется комплексно сопряженный полюс  $\zeta'_n$ . Их встреча в начале координат происходит на очередной частоте отсечки  $\omega_n$ , после чего они расходятся вправо и влево по вещественной оси, давая начало новой вещественной ветви дисперсионных кривых.

Выгнутые вверх дуги траекторий на рис. 3г–3е возникают из-за повторного выхода чисто мнимых полюсов в комплексную плоскость, которые также постепенно спус-

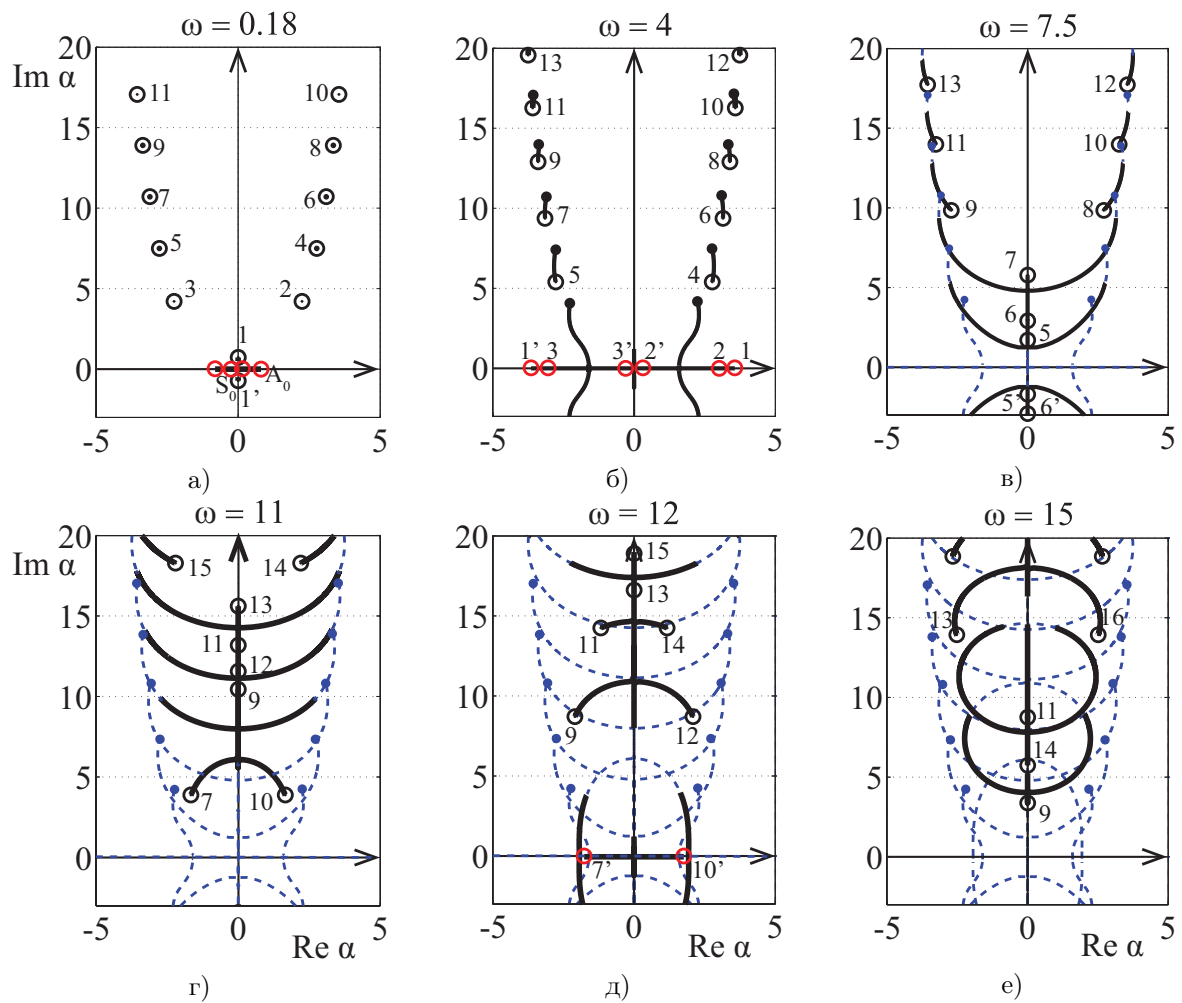


Рис. 3. Движение полюсов в комплексной плоскости волновых чисел в зависимости от частоты; сплошными линиями показаны траектории их движения от положения на предыдущем рисунке до обозначенного кружочками текущего для указанных фиксированных частот, а пунктирными — от начального положения до конечного положения на рис. 2

каются вниз, сначала удаляясь от мнимой оси, а потом возвращаясь к ней. В результате вычерчиваются эллипсообразные кривые, которые хорошо видны на рис. 3е. Повторно в комплексную плоскость выходят чисто мнимые полюса, которые, двигаясь вверх по оси, встречают идущий вниз полюс следующей комплексной пары, пришедшей выше на мнимую ось.

Выход комплексных полюсов на вещественную ось через мнимую ось и начало координат является типичным для большинства комплексных пар, поэтому соответствующие вещественные полюса называются регулярными. Нерегулярным случаем считается выход комплексных полюсов непосредственно на вещественную ось без захода на чисто мнимую.

В качестве иллюстрации на рис. 4а и 4б показаны участки траектории при выходе на вещественную ось регулярного полюса 4 и нерегулярного 2.

Спускающийся из комплексной плоскости полюс 2 встречается не с полюсом 3 из своей пары, как в регулярном случае, а сразу с комплексно-сопряженным полюсом 2', образуя ненулевой положительный двукратный полюс  $\zeta_2 = 1,59$  на частоте  $\omega = 3,51$ . Одновременно парный ему полюс 3 встречается с 3' на отрицательной полуоси, образуя отрицательный двукратный полюс  $-\zeta_2$ . При  $\omega > 3,5$  полюса 2, 2' и 3, 3' расходятся вдоль вещественной оси. Для определенности считаем, что к началу координат движутся полюса со штрихом. Они называются нерегулярными,

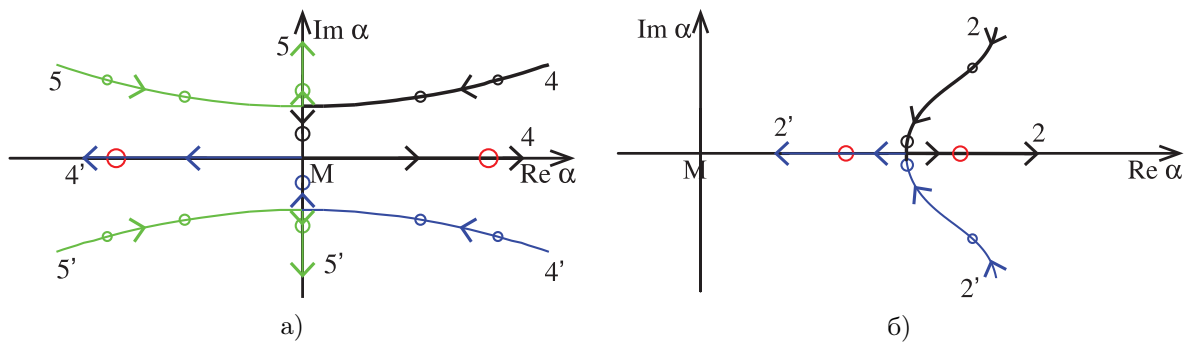


Рис. 4. Различные способы выхода комплексных полюсов на вещественную ось: а) регулярный полюс, выход через мнимую ось; б) случай нерегулярного полюса, выход непосредственно на вещественную ось, появление обратной волны. Линиями и стрелками показаны траектории и направление движения полюсов при вариации частоты, маркерами — их положение на указанных частотах

так как в разложении (7) им соответствуют бегущие волны с противоположным направлением фазовой и групповой скорости [4–6]. Тангенс угла наклона касательной к участку дисперсионной кривой для нерегулярного полюса отрицательный. В рассматриваемом примере это участок  $S_1^*$  кривой  $S_1$  (рис. 1). Полюса  $2'$  и  $3'$  встречаются в начале координат на частоте  $\omega = 3,84$ , незначительно поднимаются вверх по мнимой оси и сразу возвращаются вниз, снова выходя на вещественную ось в виде полюсов  $\zeta_3$  и  $-\zeta_3$  на частоте отсечки  $\omega_3 = 3,89$ . (ветвь  $S_2$  на рис. 1).

В диапазоне  $3,51 < \omega < \omega_3 = 3,89$  на положительной вещественной полуоси присутствует сразу два корня  $2$  и  $2'$ , соответствующие одной и той же дисперсионной кривой  $S_1$ , имеющей в этом диапазоне характерный изгиб. В начале этого диапазона полюса  $2$  и  $2'$  сливаются в один двукратный, угол наклона касательной к кривой равен  $\pi/2$ , а групповая скорость соответствующей волны  $S_2$  равна нулю. Такие волны называются волнами с нулевой групповой скоростью. С ними связаны резонансные явления, которые можно наблюдать экспериментально [11].

### Заключение

Исследовано движение комплексных и вещественных корней дисперсионного уравнения для свободного упругого слоя в зависимости от частоты. Указаны механизмы выхода комплексных корней на вещественную ось регулярного и нерегулярного типов с появлением обратных волн.

Автор благодарит проф. Е. В. Глушкова и проф. Н. В. Глушкову за руководство и ценные замечания при работе над материалом статьи.

### Литература

1. Lamb H. On Waves in an Elastic Plate // The Royal Society. 1917. Vol. 93. Iss. 648. P. 114–128.
2. Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
3. Giurgiutiu B. Structural health monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. 2nd ed. USA: Academic Press, 2014. 1024 pp.
4. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 284 с.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
6. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
7. Глушков Е. В., Глушкова Н. В. К определению динамической контактной жесткости упругого слоя // ПММ СССР. 1990. Т. 54. № 3. С. 474–479.
8. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Латина О. Н. Дифракция нормальных мод в составных и ступенчатых упругих волноводах // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. № 2. С. 297–303.
9. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Зеemann В., Кваши О. В. Возбуждение упругих волн в слое пьезокерамическими накладками // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 4. С. 470–479.
10. Глушкова Н. В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упру-

гости. Дисс. докт. физ.-мат. наук. Краснодар: КубГУ, 2000, 220 с.

11. Prada C., Clorennec D., Royer D. Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. Vol. 124 № 1. P. 203–212.
- References**
1. Lamb H. On Waves in an Elastic Plate. *The Royal Society*, 1917, vol. 93, iss. 648, pp. 114–128.
  2. Balakirev M. K., Gilinsky I. A. *Volny v pe-zokristallah* [Waves in piezoelectric crystals]. Novosibirsk, Nauka publish, 1982, 239 p. (In Russian)
  3. Giurgiutiu V. *Structural health monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. 2nd ed. USA, Academic Press, 2014, 1024 p. (In Russian)
  4. Viktorov I. A. *Zvukovye poverhnostnye volny v tverdyh telah* [Sound surface waves in solids]. Moscow, Nauka publish, 1981, 284 p. (In Russian)
  5. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. *Garmonich-eskie kolebaniya i volny v uprugih telah* [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Kiev, Naukova Dumka publish, 1981, 283 p. (In Russian)
  6. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklas-sicheskikh oblastej* [Dynamic mixed problems of the theory of elasticity for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publish, 1979, 319 p. (In Russian)
  7. Glushkov E. V., Glushkova N. V. K opredeleniyu dinamicheskoy kontaktnoy zhestkosti uprugogo sloya [Definition of the dynamic contact stiffness of an elastic layer]. *PMM SSSR* [PMM USSR], 1990, vol. 54, no. 3, pp. 474–479. (In Russian)
  8. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Lapina O. N. Difraktsiya normal'nykh mod v sostavnykh i stupenchatykh uprugikh volnovodakh [Diffraction of Normal Modes in Composite and Stepped Elastic Waveguides]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1998, vol. 62, no. 2, pp. 297–303. (In Russian)
  9. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Seemann W., Kvasha O. V. Vozbuzhdeniye uprugikh voln v sloye p'yezokeramicheskimi nakladkami [Elastic wave excitation in a layer by piezoceramic patch actuators]. *Akusticheskii zhurnal* [Acoustic journal], 2006, vol. 52, no. 4, pp. 470–479. (In Russian)
  10. Glushkova N. V. *Opredeleniye i uchet singul-yarnykh sostavlyayushchikh v zadachakh teorii uprugosti. Dis. d-ra fiz.-mat. nauk* [Definition and allowance for singular components in problems of the theory of elasticity. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Krasnodar, 2000, 220 p. (In Russian)
  11. Prada C., Clorennec D., Royer D. Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008, vol. 124, no. 1, pp. 203–212.