

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН С ПЛАСТИНОЙ,
ПОГРУЖЕННОЙ В ЖИДКОСТЬ

Мякишева О. А.

THE INTERACTION OF SOURCE-GENERATED SPHERICAL WAVES
WITH AN ELASTIC PLATE IMMERSSED IN ACOUSTIC FLUID

Miakisheva O. A.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: miakisheva.olga@gmail.com

Abstract. The interaction of acoustic waves excited by a point source with an elastic plate immersed in an acoustic fluid is considered. To estimate the range of applicability of various approaches, the mathematical models has been developed on the base of the simplified Kirchhoff–Love plate and the full set of 3D Navier—Lamé equations for elastic laminate structures. Explicit integral representations for excited and scattered wave fields have been derived using the Fourier transform technique. In the far-field, the bulk and guided waves are described by an asymptotic representations obtained from those integrals using the stationary phase method and the residual technique. Among others, the derived solutions enable quantitative analysis of time-averaged wave energy fluxes in the considered source-structure system. The representations for the total source energy and its portions carried by reflected, transmitted and guided waves have also been obtained. The test comparisons with the numerical results of other authors are presented.

Keywords: elastic plate, integral and asymptotics representations, acoustic medium, point source, balance energy.

Введение

Исследование взаимодействия акустических волн с упругой пластиной, погруженной в акустическую жидкость (вода или воздух), является классической задачей структурной акустики. Она возникает в многочисленных технических приложениях, таких, например, как расчет оптимальных параметров виброизоляции и контроль уровня шума. Одной из мотиваций настоящего исследования является изучение волновых процессов, лежащих в основе работы акустического микроскопа и бесконтактных пьезоактуаторов [1, 2]. Данные устройства используются для неразрушающего ультразвукового контроля слоистых композитов и различных сотовых или пористых материалов, используемых в аэрокосмических изделиях, для волновой дефектоскопии микрорелектронных схем, при исследовании внутреннего строения биологических материалов и объектов и др.

В настоящее время стандартным подходом к решению таких задач является применение лучевого метода [3], в рамках которого

анализируются закономерности отражения и прохождения плоских волн, падающих из бесконечности на поверхность пластины. Однако, если относительное (в длинах волн) расстояние от источника до пластины невелико, то формулы, полученные для плоских волн, становятся неприменимыми для анализа взаимодействия с пластиной возбуждаемых им сферических волн. Сферические волны можно представить в виде бесконечного набора (суперпозиции) плоских волн, т.е. в виде интегралов по их волновым числам, поэтому общим подходом к изучению взаимодействия сферических волн с плоской поверхностью является использование техники интегральных преобразований по координатам, параллельным поверхности пластины.

1. Постановка задачи

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ упругой пластины, погруженной в акустическую жидкость. В декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ пластина толщи-

Мякишева Ольга Александровна, аспирант кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: miakisheva.olga@gmail.com.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 17-11-01191).

ны h занимает объем $V : -\infty < x, y < +\infty, -h \leq z \leq 0$ (рис. 1). В общем случае в качестве пластины может быть рассмотрен слой с произвольной анизотропией упругих свойств. Вектор $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ перемещения удовлетворяет в этом случае уравнениям движения

$$C_{ijkl}u_{i,jk} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

в которых упругие модули C_{ijkl} и плотность ρ являются кусочно-постоянными функциями вертикальной координаты z . Здесь и далее гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен.

В более простом случае изотропного материала пластины ее колебания описываются уравнениями Ляме

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu\Delta \mathbf{u} + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

где λ и μ — упругие модули.

В акустической среде поле давления $p(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца [4]

$$\Delta p + \kappa_0^2 p = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (1.3)$$

где $\kappa_0 = \omega_0/c_0$, c_0 — скорость звука, δ — дельта-функция Дирака, моделирующая источник, расположенный в точке $\mathbf{x} = (0, 0, d)$ на расстоянии d от поверхности пластины (рис. 1а).

На границах контакта упругого слоя с акустической средой $z = 0$ и $z = -h$ выполняются условия непрерывности нормальных смещений u_3 и напряжений $\sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z}$. В акустической среде вектор смещения \mathbf{u} выражается через градиент давления, а тензор напряжений \mathbf{T} вырождается в диагональную матрицу [4]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0\omega^2} \nabla p(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{T} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Соответственно, условия непрерывности принимают вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.5)$$

и $\sigma_{zz} = -p$ при $z = 0$ и $z = -h$.

В случае относительно тонкой пластины используется модель Кирхгофа–Лява, в рамках которой рассматриваются только ее вертикальные колебания $w(x, y) = u_3(x, y, 0)$, удовлетворяющие уравнению [5]

$$\Delta \Delta w - \xi^4 w = q/D, \quad (1.6)$$

Здесь $\xi = \sqrt[4]{\rho\omega^2 h/D}$ — волновое число изгибных волн в пластине, $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — ее изгибная жесткость, $q(x, y)$ — суммарная нормальная нагрузка, возникающая на поверхности пластины при взаимодействии с ней падающего волнового поля $p_0(\mathbf{x})$, приходящего от точечного источника.

В верхнем акустическом полупространстве $z \geq 0$ давление p можно представить как сумму падающего и отраженного полей: $p = p_0 + p_{sc}^+$. Сферические волны, излучаемые точечным источником, задаются классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца (1.3)

$$p_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa_0 R}}{R}, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad (1.7)$$

Отраженное поле p_{sc}^+ в верхнем полупространстве ($z \geq 0$), прошедшее p_{sc}^- в нижнем ($z \leq -h$) и поле смещений \mathbf{u} в пластине ($-h \leq z \leq 0$) определяются из решения краевой задачи, содержащей одно из уравнений (1.1), (1.2) или (1.6) для пластины, уравнение (1.3) для акустической среды и условия непрерывности перемещений и напряжений на поверхностях пластины (1.5). Кроме того, для обеспечения однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи требуется выполнение условий излучения на бесконечности, вытекающих из принципа предельного поглощения [6].

В случае пластины Кирхгофа–Лява из условий на границах раздела сред остается только условие непрерывности смещений

$$w = \frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p_{sc}^+) |_{z=0} = \frac{1}{\rho_0\omega^2} \frac{\partial p_{sc}^-}{\partial z} |_{z=-h}, \quad (1.8)$$

в то время как равнодействующая давления

$$q = q^+ + q^- = -(p_0 + p_{sc}^+) |_{z=0} + p_{sc}^- |_{z=-h} \quad (1.9)$$

входит в правую часть уравнения (1.6).

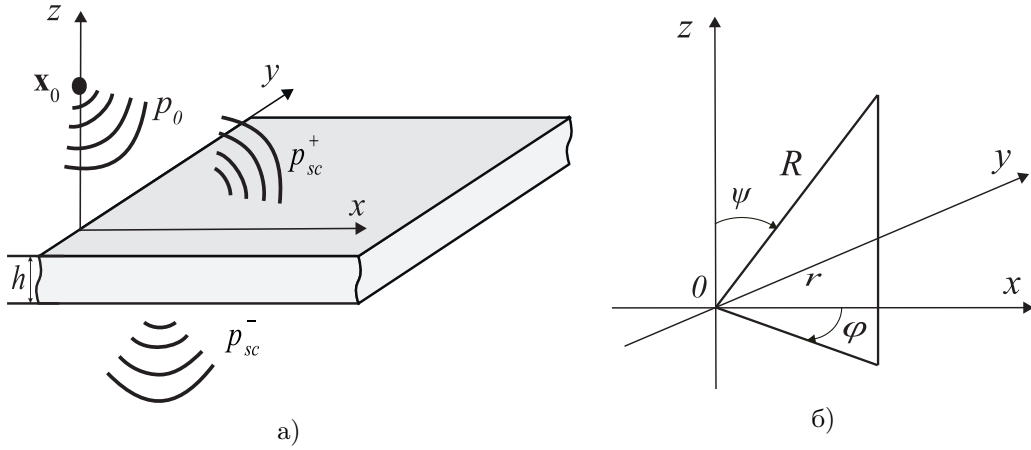


Рис. 1. а) геометрия задачи; б) сферические координаты

2. Общая схема решения

К уравнениям и граничным условиям краевой задачи применяется преобразование Фурье F_{xy} по горизонтальным координатам x и y , что позволяет получить интегральное представление решения в Фурье-символах $P = F_{xy}[p]$ и $\mathbf{U} = F_{xy}[\mathbf{u}]$:

$$p(\mathbf{x}) = F_{xy}^{-1}[P] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} P(\boldsymbol{\alpha}, z) \times e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = F_{xy}^{-1}[\mathbf{U}] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}, z) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \times e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (2.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ — параметры преобразования Фурье, \mathbf{K} — Фурье-символ матрицы Грина для упругого слоя или пакета слоев, лежащего на акустическом полупространстве: $\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q} = F_{xy}[\mathbf{q}]$, а \mathbf{q} — нагрузка, действующая на дневную поверхность $z = 0$. В силу диагональности тензора напряжений \mathbf{T} ((1.4)), давление со стороны жидкости вызывает чисто нормальную нагрузку $\mathbf{q} = (0, 0, q)$. Контуры интегрирования Γ_1 и Γ_2 идут вдоль вещественных осей комплексных плоскостей α_1 и α_2 , обходя вещественные полюса подынтегральных функций. В случае пластины Кирхгофа–Лява или однородного изотропного слоя элементы матрицы \mathbf{K} могут быть выписаны в явном виде. При более сложном строении пластины (многослойность, анизотропия, непрерывная зависимость упругих свойств от глубины и т.п.)

матрица \mathbf{K} строится численно [7, 11, 12]. В силу того, что только третья компонента вектора $\mathbf{Q}^+ = (0, 0, Q)$ отлична от нуля, в представлении (2.2) фактически работает только третий столбец матрицы $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1; \mathbf{K}_2; \mathbf{K}_3)$, $\mathbf{K}_3 = (K_{31}, K_{32}, K_{33})^T$. Кроме того, в силу соотношения (1.4) в нижнем (акустическом) полупространстве $z \leq -h$ все компоненты вектора \mathbf{K}_3 выражаются через функцию Грина $G(\boldsymbol{\alpha}, z)$, связывающую поле давлений P_{sc}^- с нагрузкой Q , приложенной к поверхности $z = 0$

$$P_{sc}^+(\boldsymbol{\alpha}, z) = G(\boldsymbol{\alpha}, z)Q(\boldsymbol{\alpha}),$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} (-i\alpha_1 G, -i\alpha_2 G, G'_z), \quad z \leq -h.$$

В Фурье-символах условия непрерывности (1.5) на поверхности $z = 0$ принимают вид

$$U_3(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} P'_z(\boldsymbol{\alpha}, 0), \quad (2.3)$$

$$Q(\boldsymbol{\alpha}) = -P(\boldsymbol{\alpha}, 0).$$

При определении неизвестной вспомогательной нагрузки Q принимается во внимание, что

$$P = P_0 + P_{sc}^+, \quad U_{33} = K_{33}Q,$$

$$P_0 = -\frac{1}{2\sigma_0} e^{-\sigma_0 z}, \quad P_{sc}^+ = A e^{-\sigma_0 z}.$$

Здесь $\sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_0^2}$, $\alpha = |\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $K_{33} = \hat{K}_{33}(\boldsymbol{\alpha}, z)/\Delta(\boldsymbol{\alpha})$ — элемент матрицы Грина \mathbf{K} . Знаменатель Δ определяет характеристическое уравнение $\Delta(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, корнями которого являются вещественные и комплексные волновые числа поверхностных и псевдоповерхностных (вытекающих) волн, распространяющихся вдоль свободной поверхности

упругого полупространства $z \leq 0$. Константа A — неизвестная амплитуда отраженного поля давлений P_{sc}^+ . Коэффициент A и неизвестная нагрузка Q определяются из условий непрерывности (2.3)

$$A = -(Q + P_0), \quad Q(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\Delta}{\Delta_0} e^{-\sigma_0 d}, \quad (2.4)$$

где $\Delta_0 = \sigma_0 \Delta - \omega^2 \rho_0 K_0$, $K_0 = \hat{K}_{33}(\boldsymbol{\alpha}, 0)$.

Таким образом, решение краевой задачи в Фурье-символах принимает вид

$$P_{sc}^\pm(\boldsymbol{\alpha}, z) = P^\pm(\boldsymbol{\alpha}) e^{\mp \sigma_0(z \pm d)}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\alpha}, z) = \hat{K}_3(\boldsymbol{\alpha}, z) e^{-\sigma_0 d} / \Delta_0(\boldsymbol{\alpha}), \quad (2.6)$$

где

$$P^+ = (\Delta_0 - 2\sigma_0 \Delta) / (2\sigma_0 \Delta_0),$$

$$P^- = \hat{G}(\boldsymbol{\alpha}) e^{\sigma_0 h} / \Delta_0,$$

$\hat{K}_3 = \mathbf{K}_3 \Delta$ и $\hat{G} = G \Delta$ — числители элементов третьего столбца матрицы \mathbf{K} и функции G для нижнего акустического полупространства $z \leq -h$. Последнее определяет давление p_{sc}^- , создаваемое в нижнем полупространстве поверхностной нагрузкой q

$$P_{sc}^-(\boldsymbol{\alpha}, z) = G(\boldsymbol{\alpha}, z) Q(\boldsymbol{\alpha}), \quad z \leq -h.$$

Подстановка выражения (2.5) в интеграл (2.1) дает интегральное представление искомого поля давления в акустической среде. Его оценка методом стационарной фазы позволяет получить асимптотическое представление в дальней зоне для отраженного и прошедшего акустических полей p_{sc}^+ и p_{sc}^- в виде сферических волн

$$p_{sc}^+(\mathbf{x}) = a^\pm(\varphi, \psi) \frac{e^{i\kappa_0 R^\pm}}{R^\pm} \left[1 + O\left(\frac{1}{\kappa_0 R^\pm}\right) \right], \quad \kappa_0 R^\pm \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

$$a^\pm = \frac{i|\cos \psi|}{2\pi} P^\pm(\boldsymbol{\alpha}_0) \kappa_0, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}),$$

$$\alpha_{1,0} = -\kappa_0 \cos \varphi \sin \psi, \quad \alpha_{2,0} = -\kappa_0 \sin \varphi \sin \psi.$$

Здесь используется две системы сферических координат (R^\pm, φ, ψ) с радиусами $R^\pm = |\mathbf{x} \pm \mathbf{x}_0|$, центрированные в точке расположения источника $\mathbf{x}_0 = (0, 0, d)$ для прошедшего поля p_{sc}^- и в зеркальной точке $\mathbf{x}_0 = (0, 0, -d)$ для отраженного поля давлений p_{sc}^+

$$x = R^\pm \cos \varphi \sin \psi,$$

$$\begin{aligned} y &= R^\pm \sin \varphi \sin \psi, \\ z &= R^\pm \cos \psi \mp d, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 0 &\leq \psi < \pi/2 \quad \text{для } p_{sc}^+, \\ \pi/2 &< \psi \leq \pi \quad \text{для } p_{sc}^-. \end{aligned}$$

Верхний и нижний знаки в представлении (2.7) относятся к представлению полей p_{sc}^+ и p_{sc}^- , соответственно. Амплитудные коэффициенты a^\pm определяются значением подынтегральных функций $P^\pm(\boldsymbol{\alpha})$ в стационарной точке $\boldsymbol{\alpha}_0$ осциллирующих экспонент $\exp[\pm \sqrt{\kappa_0^2 - \boldsymbol{\alpha}^2} - \alpha_1 x - \alpha_2 y]$, $\boldsymbol{\alpha} < \kappa_0$. В случае изотропной пластины отраженное поле осесимметрично, поэтому значения $P^\pm(\boldsymbol{\alpha}_0)$ зависят только от $\alpha_0 = |\boldsymbol{\alpha}_0| = \kappa_0 \sin \psi$, т.е. только от азимутального угла ψ , и не зависят от полярного угла φ .

Корни ζ_n характеристического уравнения $\Delta_0(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ (полюса подынтегральных функций (2.1) и (2.2)) также дают вклад в асимптотику в дальней зоне. Вычеты в этих полюсах описывают цилиндрические бегущие волны, распространяющиеся вдоль пластины в горизонтальном направлении $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. В изотропном случае асимптотика поверхностных волн, возбуждаемых источником p_0 , имеет вид

$$\mathbf{u}(r, z) \sim \sum_n \mathbf{b}_n(z) e^{i\zeta_n r} / \sqrt{\zeta_n r}, \quad \zeta_n r \rightarrow \infty, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{b}_n = i \hat{K}_3(\zeta_n, r) e^{-i\sigma_0(\zeta_n) d} \zeta_n / (2\Delta_0'(\zeta_0)).$$

В случае вытекающих волн асимптотика (2.8) для точек на поверхности пластины также справедлива с учетом мнимой части полюса ζ_n . Однако вытекающие волны способны распространяться в окружающей пластину среде достаточно глубоко. Для получения асимптотических формул для вытекающих волн в направлениях, не параллельных пластине, необходимо в методе стационарной фазы учитывать сближение двух или трех особенностей: стационарных точек, полюса, а также точек ветвления [8–10].

В анизотропном случае амплитудные коэффициенты \mathbf{b}_n и волновые числа ζ_n зависят от полярного угла φ . Вид асимптотики поверхностных волн в этом случае можно найти в работе [11].

С помощью полученных интегральных и асимптотических представлений можно рассчитать потоки волновой энергии в гармоническом волновом поле. Среднее за период колебаний изменение количества энергии E

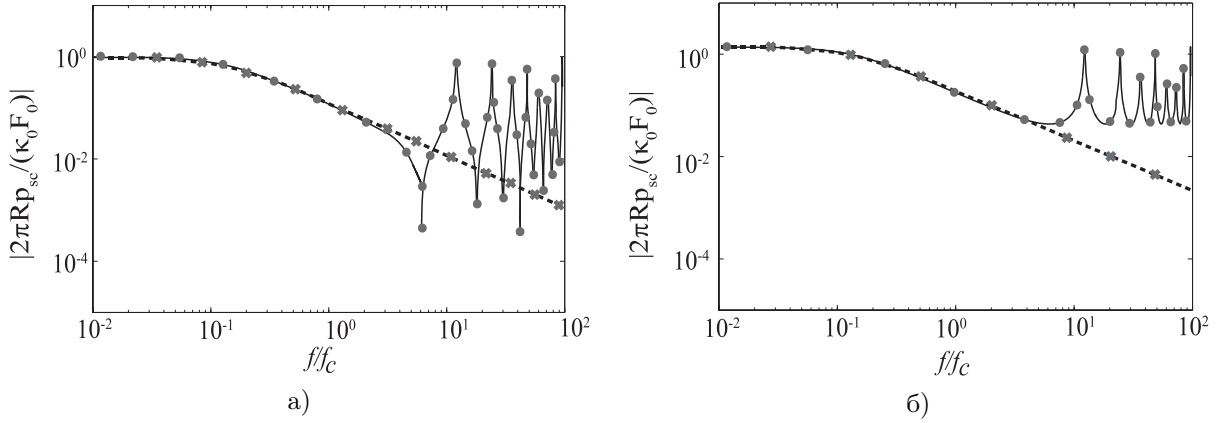


Рис. 2. Тестовые сопоставления для слоя на акустическом полупространстве: сила приложена к поверхности $z = 0$ (а) и $z = -h$ (б): сплошная линия — результаты работы [15] для упругого слоя, пунктирная линия — для пластины Кирхгофа; маркеры — результаты, полученные в рамках разрабатываемых моделей

в объеме с поверхностью S определяется поверхностным интегралом [13]

$$E = \iint_S e_s(\mathbf{x}) dS, \quad e_s = (\mathbf{e}, \mathbf{n}). \quad (2.9)$$

Здесь e_s — проекция вектора \mathbf{e} плотности потока энергии на поверхность с нормалью \mathbf{n} . В акустической среде

$$e_s = \frac{1}{2\rho_0\omega} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} p^* \right),$$

где звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина.

Мощность источника может быть получена путем интегрирования e_s по сфере S_ε : $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \varepsilon$ малого радиуса $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$E_0 = E_\infty + E_{sc}, \quad (2.10)$$

$$E_\infty = \frac{1}{8\pi\rho_0 c_0}, \quad E_{sc} = \frac{1}{2\rho_0\omega} \operatorname{Im}[p_{sc}^+(\mathbf{x}_0)].$$

E_∞ — энергия точечного источника в безграничной акустической среде, а E_{sc} — добавочное слагаемое, возникающая за счет отражения поля источника от пластины.

Энергия, отдаваемая источником в акустическую среду, переносится на бесконечность сферическими волнами p_0 и p_{sc}^\pm , а также бегущими поверхностными волнами, соответствующими в представлении (2.8) вещественным полюсам ζ_n . Энергия отраженных волн E^+ получается интегрированием e_s по верхней полусфере S^+ радиуса $\kappa_0 R \gg 1$: $0 \leq \psi < \pi/2$,

$0 \leq \varphi < 2\pi$, где e_s может быть представлена через явные выражения (2.1) и (2.4). Подобным же образом, т.е. интегрированием по нижней полусфере S^- радиуса $\kappa_0 R \gg 1$: $\pi/2 < \psi \leq \pi$, определяется и количество энергии прошедших волн E^- . Энергия E_c , переносимая цилиндрическими поверхностными волнами вдоль пластины, определяется интегрированием e_s по боковой поверхности цилиндра S_c радиуса $\kappa_0 R \gg 1$: $0 \leq \varphi < 2\pi$, $|z| < \infty$.

В силу закона сохранения энергии должен выполняться баланс энергии $E_0 = E^+ + E^- + E_c$. Следовательно, коэффициенты отражения и прохождения $\kappa^\pm = E^\pm/E_0$ и коэффициент бокового излучения $\kappa_c = E_c/E_0$ должны удовлетворять соотношению $\kappa^+ + \kappa^- + \kappa_c = 1$. Данное равенство используется для контроля полученных численных результатов. Более подробную информацию о методах энергетического анализа можно найти в работах [12, 14].

3. Численные примеры

Ниже приводятся численные примеры для случая стальной пластины, погруженной в воду. В литературе широко представлены характеристики звукового давления, излучаемого такой пластиной, которые можно использовать для тестовых сравнений. На рис. 2 дается сравнение с результатами работы [15], в которой был рассмотрен случай пластины, нагруженной жидкостью только с одной стороны.

Волны возбуждаются точечной силой $\sigma_{zz} = F_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, приложенной или к свобод-

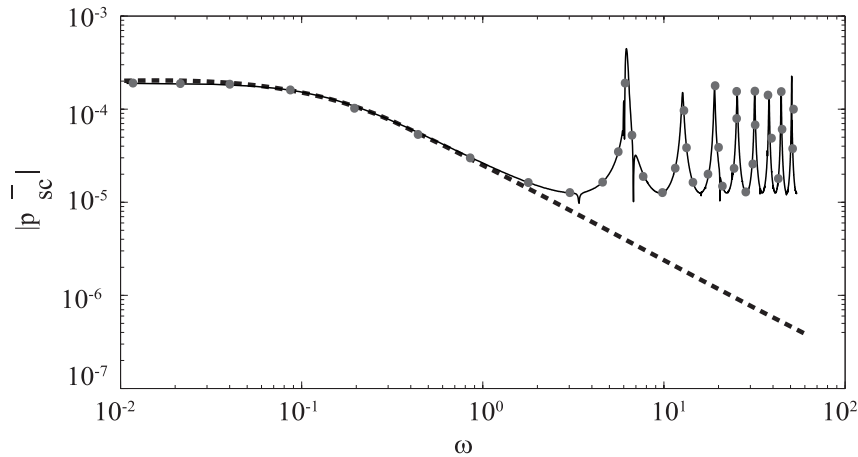


Рис. 3. Пластина, полностью погруженная в жидкость, интегральное представление (1.6) (сплошная линия); асимптотика (2.3) (маркеры); теория тонких пластин (пунктирная линия)

ной поверхности $z = 0$ (рис. 2а), или к контактирующей с жидкостью $z = -h$ (рис. 2б). Приводятся графики зависимости от частоты нормированного акустического давления в дальней зоне в направлении строго вниз ($\psi = 0$). В соответствии с асимптотикой (2.7) это графики (в логарифмическом масштабе) зависимостей от нормированной частоты f/f_c отношения амплитудных коэффициентов $|a^\pm(\psi = 0, \omega)/a^\pm(\psi = 0, 0)|$, нормированных на начальное значение при $f = 0$; $f_c = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\rho h/D}$ — критическая частота, на которой длина изгибной волны в пластине совпадает с длиной акустической волны [16].

Результаты, полученные с помощью разработанных моделей на основе уравнений (1.2) и (1.6), отмечены маркерами и показывают полное совпадение со сравниваемыми. Очевидно, что теория тонких пластин дает хорошее приближение в низкочастотном диапазоне, но ее нельзя использовать в диапазоне высоких частот $f > f_c$, где кривые давления характеризуются резонансными пиками и впадинами, которые не учитываются в модели тонкой пластины. Эти пики и впадины наблюдаются на частотах резонансов и анти-резонансов для волн сжатия, проходящих сквозь пластину в поперечном направлении.

В случае пластины, полностью погруженной в жидкость с удаленным источником ($d > 0$), давление p_{sc}^- показывает резонансные пики на тех же безразмерных круговых частотах $\omega_n = n\pi c_p/h$, как и в предыдущем случае полупогруженной пластины. В качестве иллюстрации на рис. 3 представлена частотная зависимость амплитуды дав-

ления прошедшего волнового поля $|p_{sc}^-|$, возбуждаемого источником, расположенным на расстоянии $d/h = 10$; точка наблюдения $x_1/h = (0, 0, -200)$. Сплошная линия показывает результаты расчетов, полученные, исходя из интегрального представления (2.1), которое в случае осевой симметрии сводится к однократному интегралу. Резонансные пики наблюдаются здесь на тех же частотах, что и в предыдущем случае. Маркерами показаны результаты, полученные в рамках асимптотического представления (2.7), и пунктирная линия соответствует модели тонкой пластины, которая, как и ранее, показывает применимость только на низких частотах $0 < \omega < 1$. Здесь и далее все результаты приводятся в безразмерном виде, в котором все линейные размеры отнесены к толщине пластины h , а скорости и плотности — к c_s и ρ для упругой среды; безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi f h/c_s$, где f — размерная частота. В численных примерах были зафиксированы следующие безразмерные параметры: скорости P - и S -волн в пластине: $c_p = 1,87$ и $c_s = 1$, плотность $\rho = 1$; в жидкости — $c_0 = 0,48$ и $\rho_0 = 0,127$.

На рис. 4 изображена частотная зависимость мощности источника E_0 и количества энергии E_s , уходящей на бесконечность от источника, расположенного в верхнем акустическом полупространстве на расстоянии $d = 2$ от пластины через поверхность сферы радиуса $R = 0,1, 10$ и 100 . Расчеты показывают, что при всех частотах количество энергии, уходящей на бесконечность, не меняется, т.е. баланс энергии сохраняется.

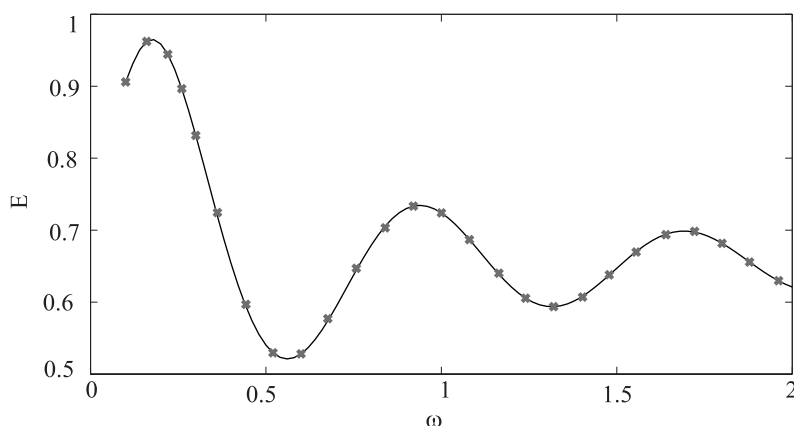


Рис. 4. Мощность источника E_0 , рассчитанная по формуле (2.10) (сплошная линия) и энергия E_s , уносимая через сферу радиуса $R = 0, 1, 10, 100$ (формула (2.9), маркеры)

Заключение

Получены интегральные и асимптотические представления для волновых полей, возбуждаемых точечным источником в акустической среде, содержащей упругую пластину. Математические модели построены на основе упрощенных уравнений теории тонких пластин Кирхгофа–Лява и полной системы уравнений Ляме для упругих слоистых структур. На этой основе разработаны компьютерные модели для расчета амплитудных и энергетических характеристик отраженных и прошедших волн, а также возбуждаемых падающим полем источника волн, бегущих вдоль пластины. Проведены тестовые сравнения с численными результатами других авторов и проверка энергетического баланса в рамках разработанной модели, подтверждающие достоверность получаемых результатов. Построенные модели являются удобным инструментом параметрического анализа амплитудно-частотных характеристик акустических и упругих волн, генерируемых контактными и бесконтактными пьезоактуаторами в упругой пластине, погруженной в жидкость, в том числе и коэффициентов отражения и преломления сферических объемных волн, возбуждаемых удаленным источником.

Автор благодарит Е.В. Глушкова и Н.В. Глушкову за руководство и ценные указания при написании статьи.

Литература

1. Grandia W. A. NDE applications of air-coupled ultrasonic transducers // Ultrasonic Symposium: Proceedings. Seattle, WA, 1995. Vol. 1. P. 697–709.
2. Маев Р. Г. Акустическая микроскопия. М.: Торус Пресс, 2005. 402 с.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.
4. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
6. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории для неклассических областей. М.: Наука, 1978. 319 с.
7. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
8. Gallop J., Hron F. Asymptotic solutions to cagniard's problem // Geophysical Journal International. 1999. Vol. 138. No. 3. P. 820–830.
9. Фоменко С. И. Асимптотика волновых полей в слоистом скважинном волноводе // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 4. С. 56–62.
10. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Fomenko S. I. Wave generation and source energy distribution in cylindrical fluid-filled waveguide structures // Wave Motion. 2017. Vol. 72. P. 70–86.
11. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Eremin A. A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // Journal of the Acoustical Society of America. 2011. Vol. 129. P. 2923–2934.
12. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И., Жанг Ч. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акустический журнал. 2012. Т. 58. № 3. С. 339–353.
13. Умов Н. А. Уравнения движения энергии в телах. Избранные сочинения. М.–Л.: Гостех-

- издат, 1950. С. 151–226.
14. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Fomenko S. I. Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers // *J. of the Acoustical Society of America*. 2015. Vol. 137. No. 4. P. 1802–1812.
 15. Shen C., Xin F. X., Lu T. J. A 3-D elasticity theory based model for acoustic radiation from multilayered anisotropic plates // *J. of the Acoustical Society of America*. 2014. Vol. 135. No. 5. P. EL232-8.
 16. Scherrer R., Maxit L., Guyader J.-L., Audoly C. Analysis of the sound radiated by a heavy fluid loaded structure excited by an impulsive force // *Internoise: Proceedings*. Innsbruck, Austria. 2013. P. 827–838.
 - and Mathematical Physics], 1987, vol. 27, no. 1, pp. 93–101. (In Russian)
 8. Gallop J., Hron F. Asymptotic solutions to cagniard's problem. *Geophysical J. Int.*, 1999, vol. 138, no. 3, pp. 820–830.
 9. Fomenko S.I. Asimptotika volnovyih poley v sloistom skvazhinnom volnovode [Asymptotics of wave fields layered borehole waveguide]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of research centers of the Black Sea economic cooperation], 2007, no. 4, pp. 56–62. (In Russian)
 10. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Fomenko S.I. Wave generation and source energy distribution in cylindrical fluid-filled waveguide structures. *Wave Motion*, 2017, vol. 72, pp. 70–86.
 11. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Eremin A. A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, vol. 129, pp. 2923–2934.
 12. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Fomenko S. I., Zhang Ch. Poverkhnostnyye volny v materialakh s funktsional'no-gradiyentnymi pokrytiyami [Surface waves in materials with functional gradient coatings]. *Akusticheskii zhurnal* [Acoustical physics], 2012, vol. 58, no 3, pp. 339–353. (In Russian)
 13. Umov N. A. *Izbrannyye sochineniya* [Selected works], Moscow–Leningrad, Gostekhizdat Pub., 1950. 571 p. (In Russian)
 14. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Fomenko S. I. Wave energy transfer in elastic half-spaces with soft interlayers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2015, vol. 137, no. 4, pp. 1802–1812.
 15. Shen C., Xin F. X., Lu T. J. A 3-D elasticity theory based model for acoustic radiation from multilayered anisotropic plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2014, vol. 135, no. 5, pp. EL232-8.
 16. Scherrer R., Maxit L., Guyader J.-L., Audoly C. Analysis of the sound radiated by a heavy fluid loaded structure excited by an impulsive force. *Proc. Internoise*, Innsbruck, Austria, 2013, pp. 827–838.

References

1. Grandia W. A. NDE applications of air-coupled ultrasonic transducers. *Proc. Ultrasonic Symposium*. Seattle, WA, 1995, vol. 1, pp. 697–709
2. Maev R. G. *Akusticheskaya mikroskopiya* [Acoustic microscopy]. Moscow, Torus Publ., 2005, 402 p. (In Russian)
3. Brekhovskikh L. M. *Volny v sloistyykh sredakh* [Waves in layered media]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 342 p. (In Russian)
4. Isakovich M. A. *Obshchaya akustika* [General acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 496 p. (In Russian)
5. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kruger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 640 p. (In Russian)
6. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskkiye smeshannyye zadachi teorii dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of the theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 319 p. (In Russian)
7. Babeshko V. A., Glushkov E. V., Glushkova N. V. Metody postroyeniya matritsy Grina stratifitsirovannogo uprugogo polupros-transtva [Methods for constructing the Green matrix of a stratified elastic half-space]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics