

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ

Углич П. С.

ON THE RESIDUAL STRESS DEFINITION IN THE ROUND PLATE

Uglich P. S.*

* Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia
e-mail: puglich@inbox.ru

Abstract. The inverse coefficient problem of the initial stress definition in the oscillating round elastic plate is considered. The plate vibration is axisymmetric and it's forced by the homogeneous oscillating load. The information about plate deflection on some fixed frequency serves as input data.

Two methods for the direct problem solving are introduced. The first method is based on the shooting method. The second is based on Ritz method and reduces the problem to the linear equations system. Results of the direct problem solution are presented for different distribution laws of the initial stresses. Boundary problems both for simply supported and for the clamped edge are considered. Results are compared with well-known analytical results for the plate without initial stresses. Results obtained using different methods show good coincidence. Eigen frequencies are also evaluated using two different methods.

The inverse problem is solved by the Galerkin method. Initial stress definition results are presented for different frequencies and boundary conditions.

Keywords: residual stress, inverse coefficient problems, elastic plates.

Предварительными (или остаточными) напряжениями называются напряжения, которые существуют в теле при отсутствии внешних нагрузок [1]. Подобные напряжения часто возникают в ходе различных технологических процессов (литья, прокатки, штамповки, закаливании и т. п.) либо при продолжительных эксплуатационных процессах. В силу своей природы остаточные напряжения явным образом не проявляют себя, однако при наложении дополнительных нагрузок приводят к разрушениям.

В настоящей работе рассматривается задача о восстановлении предварительных напряжений в круглой пластине. Предложен разрушающий метод определения предварительных напряжений по характеру вынужденных колебаний пластины на фиксированной частоте. Подобная задача для прямоугольной пластины рассмотрена в [2].

1. Прямая задача

Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания преднапряженной круглой пластины радиуса R под действием равномерно распределенной нагрузки q .

Рассмотрим изгибные колебания круглой пластины в цилиндрической системе координат r, φ, z .

В соответствии с гипотезами Кирхгофа–Лява [3] примем следующие законы изменения перемещений

$$\begin{aligned} u_r &= -zw_{,r}, \\ u_\varphi &= 0, \\ u_z &= w, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $w = w(r)$ — функция поперечного прогиба пластинки.

Будем считать, что в пластинке присутствует плоское поле предварительных напряжений σ_{ij}^0 , и выражение для тензора напряжений Пиолы Σ_{ij} в декартовых координатах имеет вид [4]

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,k}\sigma_{kj}^0, \quad (1.2)$$

где компоненты тензора σ_{ij} подчиняются закону Гука.

Соотношения (1.2) в цилиндрической системе координат с учетом (1.1) принимают

следующий вид:

$$\begin{aligned}\Sigma_{rr} &= \sigma_{rr} - zw_{,rr}\sigma_{rr}^0, \\ \Sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{\varphi\varphi} - zr^{-1}w_{,r}\sigma_{\varphi\varphi}^0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Найдем изгибающие моменты

$$\begin{aligned}M_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\Sigma_{rr} dz = D(\theta_{r,r} + \nu r^{-1}\theta_r) - \\ &\quad - \frac{h^3}{12}\theta_{r,r}\sigma_{rr}^0, \\ M_{\varphi\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\Sigma_{\varphi\varphi} dz = D(\nu\theta_{r,r} + r^{-1}\theta_r) - \\ &\quad - \frac{h^3}{12}\frac{\theta_r}{r}\sigma_{\varphi\varphi}^0.\end{aligned}\quad (1.4)$$

В соотношениях (1.4) $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость пластины,

$$\theta_r = -w_{,r}. \quad (1.5)$$

Найдем выражение для перерезывающей силы

$$Q_r = r^{-1}[(rM_{rr})_{,r} - M_{\varphi\varphi}]. \quad (1.6)$$

Уравнение установившихся колебаний круглой пластины в случае осесимметричной деформации имеет вид

$$-(rQ_r)_{,r} = -r[q(r) + \rho h\omega^2 w], \quad (1.7)$$

где $q(r)$ — нормальная нагрузка.

Вводим безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned}r &= R\bar{r}, \quad w = h\bar{w}, \\ \sigma_{rr}^0 &= \frac{12D}{h^3}\bar{\sigma}_{rr}^0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^0 = \frac{12D}{h^3}\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^0, \\ q &= \frac{hD}{R^3}\bar{q}_3, \quad \kappa^2 = \frac{\rho h\omega^2 R^4}{D}.\end{aligned}$$

Последовательно подставляя соотношения (1.5) в (1.4), (1.6) и (1.7), получаем (здесь и всюду в дальнейшем знак надчёркивания опускается)

$$\begin{aligned}\left\{r\left[\frac{1}{r}(rw')'\right]'\right\}' - (r\sigma_{rr}^0 w'')'' + \\ + \left(\frac{1}{r}\sigma_{\varphi\varphi}^0 w'\right)' = -r[q(r) + \kappa^2 w].\end{aligned}\quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) имеет переменные коэффициенты и его решение может быть построено лишь численно.

Кроме того, из соотношений (1.4)–(1.7) может быть выведена каноническая система линейных уравнений вида

$$\begin{aligned}w' &= -\theta_r, \\ \theta_r' &= -\nu f_1(r)r^{-1}\theta_r + f_1(r)M_{rr}, \\ M_{rr}' &= r^{-2}[\nu^2 f_1(r) - f_2(r)]\theta_r - \\ &\quad - r^{-1}[1 - f_1(r)]M_{rr} + Q_r, \\ Q_r' &= -r^{-1}Q_r + q + \kappa^2 w,\end{aligned}\quad (1.9)$$

где введены обозначения

$$f_1(r) = (1 + \sigma_{rr}^0)^{-1}, \quad f_2(r) = 1 + \sigma_{\varphi\varphi}^0.$$

Прямая задача о колебаниях преднапряженной пластинки может быть решена двумя способами. Первый заключается в численном решении краевой задачи для системы (1.9) методом пристрелки. Граничные условия при этом имеют вид

$$w(1) = \theta_r(1) = 0 \quad (1.10)$$

в случае жесткой заделки и

$$w(1) = M_{rr}(1) = 0 \quad (1.11)$$

в случае шарнирно опертого края. В обоих случаях при $r = 0$ ставятся дополнительные условия вида

$$\theta_r(0) = Q_r(0) = 0. \quad (1.12)$$

Второй способ, основанный на методе Ритца, заключается в отыскании стационарной точки функционала вида

$$\begin{aligned}F &= \int_0^1 \left[(1 + \sigma_{rr}^0) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + (1 + \sigma_{\varphi\varphi}^0) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} - 2qw - \kappa^2 w \right] r dr.\end{aligned}\quad (1.13)$$

В соответствии с методом Ритца представим функцию прогиба в виде суммы

$$w(r) = C_1 \varphi_1(r) + \sum_{k=2}^{N_1} C_k \varphi_{k+1}(r), \quad (1.14)$$

Таблица 1

Закон распределения $\sigma_{rr}^0(r)$	Жесткая заделка		Шарнирное опирание	
	Метод Ритца	Метод пристрелки	Метод Ритца	Метод пристрелки
$\sigma_{rr}^0(r) = 0$	10,22 39,77 89,10	10,20 39,71 88,94	4,94 29,72 74,17	5,24 30,03 74,32
$\sigma_{rr}^0(r) = 0,2$	11,19 43,57 97,61	11,09 43,32 97,39	5,32 32,49 81,17	5,53 32,40 81,24
$\sigma_{rr}^0(r) = r^2$	13,14 47,16 103,41	13,00 46,86 103,21	6,53 34,93 85,56	6,56 34,77 85,45
$\sigma_{rr}^0(r) = 0,25 \cos r$	11,04 43,34 97,65	10,95 43,26 97,53	5,22 32,48 82,63	5,45 32,40 81,42
$\sigma_{rr}^0(r) = 0,1r \sin 3r$	10,46 40,72 91,19	10,39 40,49 90,64	4,97 30,52 75,82	5,28 30,57 75,77

где базисные функции имеют вид

$$\varphi_k(r) = (1 - r^2)^2 r^{k-1}$$

для случая жесткой заделки и

$$\varphi_k(r) = (1 - r^2)r^{k-1}$$

для случая шарнирного опирания. В представлении (1.14) исключено нефизичное слагаемое при $k = 2$. Представление (1.14) отличается от предложенного в работе [6] и оно было выбрано, так как позволяет добиться лучшей сходимости приближённого с аналитическими результатами и результатами, полученными другими методами.

В табл. 1 приведены собственные частоты для различных законов распределения предварительного напряжения $\sigma_{rr}^0(r)$, рассчитанные на основании двух предложенных методов. Следует отметить, что для задания предварительно напряженного состояния в круглой пластине в осесимметричном случае достаточно задать только $\sigma_{rr}^0(r)$ и выразить из него $\sigma_{\varphi\varphi}^0(r)$ с помощью соотношения

$$\frac{d\sigma_{rr}^0}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^0 - \sigma_{\varphi\varphi}^0}{r} = 0. \quad (1.15)$$

Соотношение (1.15) следует из уравнения равновесия Коши, которому должны удовлетворять предварительные напряжения. Точность методов тестировалась для однородной пластины без предварительных напряжений в случае жесткой заделки, где собственные частоты известны [5] и погрешность метода Ритца при определении собственных частот при

$N_1 = 7$ составила менее 5 %. Здесь и всюду в дальнейшем принято значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$.

В работе [6] произведено сравнение результатов для однородной пластинки без предварительных напряжений при $k = 0$ с известными аналитическими результатами [3], что позволяет проверить численные методы и алгоритмы. В табл. 2 приведены значения прогиба в некоторых точках для $\kappa = 2,5$ в случае жесткой заделки и шарнирного опирания.

Из данных, представленных в табл. 2, видно хорошее совпадение результатов, полученных разными методами, что в дальнейшем позволяет использовать результаты, полученные методом Ритца в качестве исходной информации для решения обратной задачи. Тем не менее, необходимо отметить, что ближе к краю пластины результаты имеют существенное различие.

2. Обратная задача

Обратная задача заключается в определении предварительного напряжения $\sigma_{rr}^0(r)$ по некоторой дополнительной информации о поле перемещений, заданной или на границе пластины в некотором диапазоне изменения частоты колебаний или всюду внутри пластины. Такая задача относится к коэффициентным обратным задачам и в общей ситуации является существенно нелинейной и некорректной [7].

В настоящей работе рассмотрена постановка обратной задачи, заключающаяся в нахождении предварительного напряжения

Таблица 2

Закон распределения $\sigma_{rr}^0(r)$	r	Жесткая заделка		Шарнирное опирание	
		Метод Ритца	Метод пристрелки	Метод Ритца	Метод пристрелки
$\sigma_{rr}^0(r) = 0$	$r = 0$ $r = 0,5$ $r = 0,95$	0,016663 0,009336 0,000156	0,016662 0,009326 0,000120	0,086044 0,060287 0,006457	0,086726 0,060683 0,006309
$\sigma_{rr}^0(r) = 0,2$	$r = 0$ $r = 0,5$ $r = 0,95$	0,013734 0,007700 0,000129	0,013734 0,007692 0,000102	0,070398 0,049458 0,005338	0,070861 0,049800 0,005376
$\sigma_{rr}^0(r) = r^2$	$r = 0$ $r = 0,5$ $r = 0,95$	0,009967 0,005263 0,000078	0,009968 0,005255 0,000051	0,043216 0,029819 0,003178	0,043381 0,029923 0,003133
$\sigma_{rr}^0(r) = 0,25 \cos r$	$r = 0$ $r = 0,5$ $r = 0,95$	0,014094 0,007964 0,000136	0,014091 0,007956 0,000109	0,074112 0,052196 0,005647	0,074630 0,052578 0,005690
$\sigma_{rr}^0(r) = 0,1r \sin 3r$	$r = 0$ $r = 0,5$ $r = 0,95$	0,015635 0,008950 0,000153	0,015935 0,008940 0,000118	0,083962 0,059189 0,006381	0,084623 0,059415 0,006307

Таблица 3

N_2	$\kappa = 1$	$\kappa = 2$	$\kappa = 5$	$\kappa = 5,53$	$\kappa = 10$	$\kappa = 32,40$
1	0,0101	0,0115	0,0238	0,0320	0,0143	0,0174
2	0,0214	0,0234	0,0297	0,0315	0,0146	0,0134
4	0,0454	0,0482	0,0551	0,0583	0,0499	0,0119
8	0,0172	0,0396	0,0257	0,0299	0,0292	0,0014
16	0,0325	0,0223	0,0379	0,0283	0,0255	0,0021

$\sigma_{rr}^0(r)$ по заданному прогибу при некоторой фиксированной частоте

$$w(r, k_0) = W(r), \quad k_0 \in [k_1, k_2]. \quad (2.1)$$

Для решения задачи использован подход, онованный на применении проекционного метода Галеркина к исходной краевой задаче (1.9)–(1.11) (или (1.9)–(1.12)). Выберем базисные функции вида

$$\psi_k(r) = r^{k-1}$$

и представим $\sigma_{rr}^0(r)$ в виде разложения по системе

$$\sigma_{rr}^0(r) = A_1 + \sum_{k=2}^{N_2} A_k \psi_{k+1}(r).$$

Преобразуем уравнение (1.1) и введем следующее обозначение для невязки

$$N(r) = r \left\langle \left\{ r \left[r^{-1} (rw')' \right]' \right\}' - (r\sigma_{rr}^0 w'')'' + (r^{-1} \sigma_{\varphi\varphi}^0 w')' + r [q(r) + \kappa^2 w] \right\rangle. \quad (2.2)$$

Далее потребуем ортогональности невязки к базисным функциям

$$\int_0^1 N(r) \psi_k(r) r dr = 0, \quad k = 1, 3, 4, \dots, N_2.$$

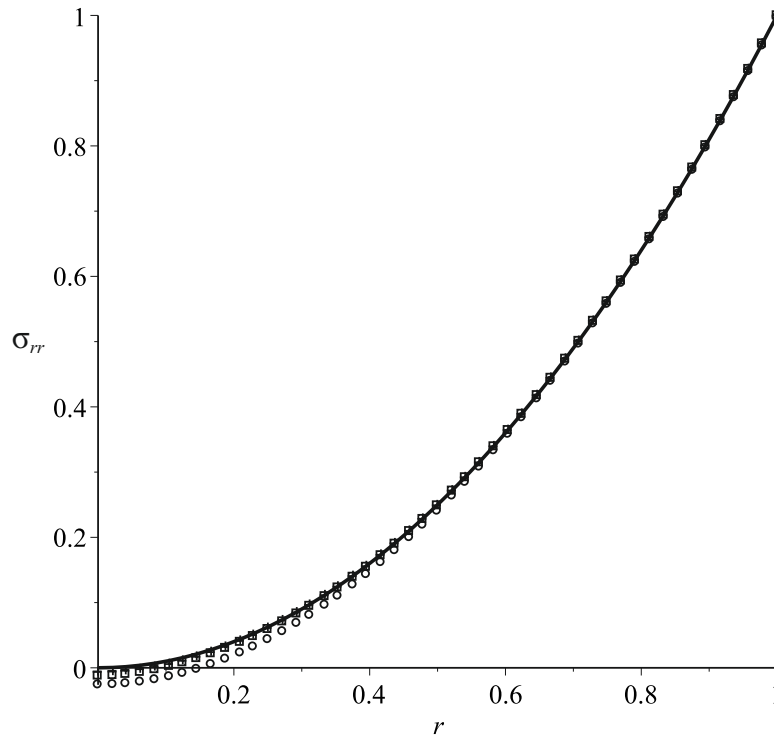
Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения A_k на основе метода Галёркина, решая которую, находим приближенное решение сформулированной обратной задачи.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов по восстановлению предварительных напряжений на основе предложенной выше проекционной схемы. Дальнейшие вычисления проводились при следующих значениях параметров: $\nu = 0,3$; $q = 1$; $N_1 = 8$. В табл. 3–4 приведено значение погрешности между точным и восстановленным предварительными напряжениями, найденное по

Таблица 4

N_2	$\kappa = 1$	$\kappa = 2$	$\kappa = 5$	$\kappa = 10$	$\kappa = 11,09$	$\kappa = 43,32$
1	0,0071	0,0074	0,0086	0,0200	0,0317	0,0034
2	0,0156	0,0161	0,0179	0,0260	0,0286	0,0031
4	0,0364	0,0373	0,0389	0,0466	0,0499	0,0024
8	0,0356	0,0307	0,0354	0,0162	0,0439	0,0039
16	0,0257	0,0020	0,0187	0,0035	0,0091	0,0069

Рис. 1. Результаты решения обратной задачи при $\sigma_{rr}^0 = r^2$

формуле

$$\delta = \frac{\int_0^1 r (\sigma_{rr}^I - \sigma_{rr}^{II})^2 dr}{\int_0^1 r (\sigma_{rr}^{II})^2 dr},$$

где σ_{rr}^I — точное распределение предварительного напряжения, σ_{rr}^{II} — восстановленное распределение предварительного напряжения.

Для расчётов по формуле (2.2) в качестве функции прогиба w использовано решение задачи, построенное методом Ритца.

В табл. 3 приведены результаты в случае шарнирного опирания, в табл. 4 — в случае жесткой заделки для $\sigma_{rr}^0 = 0,2$. В табл. 3–4 сравнение результатов производится при значениях безразмерной частоты

$\kappa = 1; 2; 5; 10$, а также в окрестности первых двух собственных частот, при этом варьировалось число слагаемых в восстанавливаемом решении N_2 . На рис. 1 приведен график восстановленного решения в случае $\sigma_{rr}^0 = r^2$, $\kappa = 5$, на краю пластины выполняются условия шарнирного опирания, на рис. 2 — график восстановленного решения в случае $\sigma_{rr}^0 = 0,25 \cos r$, $\kappa = 5$, на краю пластины выполняются условия жесткой заделки. Всюду на рисунках 1–3 по оси абсцисс откладывается значение безразмерного радиуса, по оси ординат — σ_{rr} . На рис. 3 показан график восстановленного решения в случае $\sigma_{rr}^0 = 0,1r \sin 3r$, $\kappa = 2$, на краю пластины выполняются условия шарнирного опирания. Всюду на рис. 1–3 сплошной линией обозначено точное решение, точками — при $N_2 = 4$,

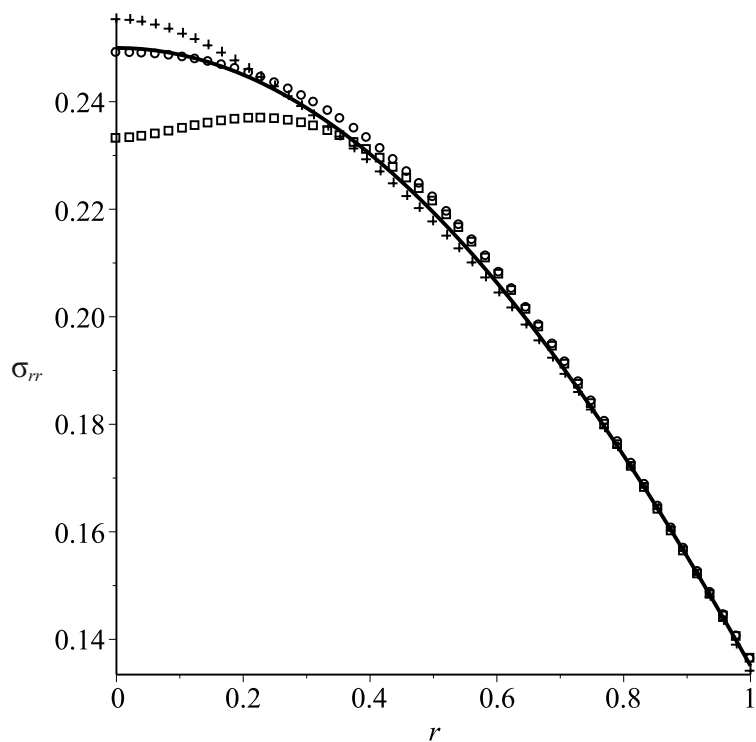


Рис. 2. Результаты решения обратной задачи при $\sigma_{rr}^0 = 0,25 \cos r$

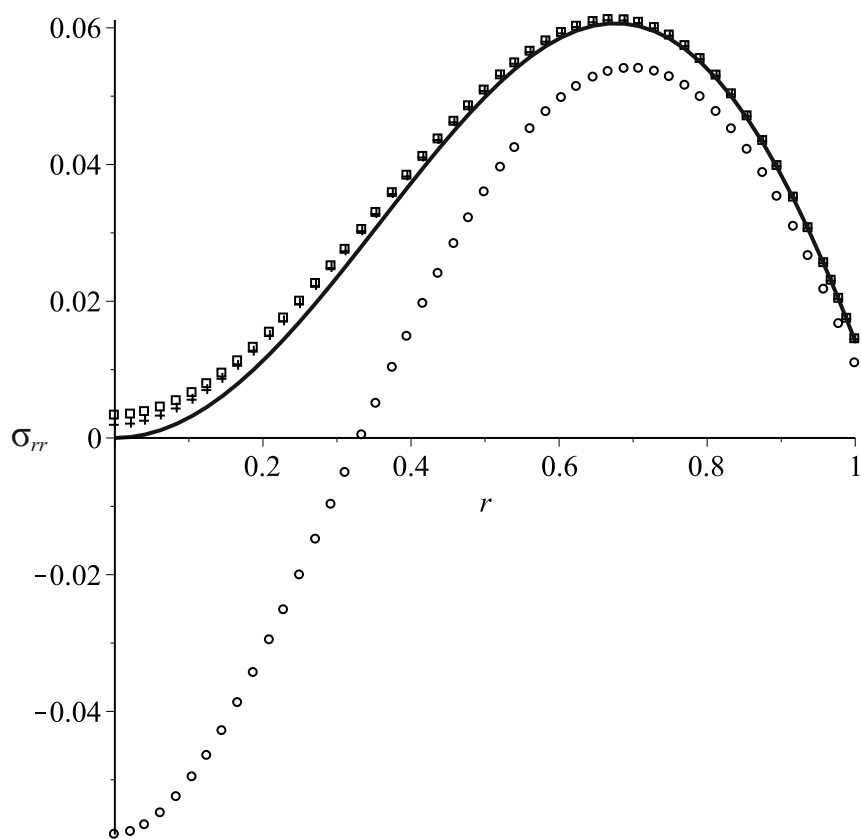


Рис. 3. Результаты решения обратной задачи при $\sigma_{rr}^0 = 0,1r \sin 3r$

квадратами — при $N_2 = 8$, крестами — при $N_2 = 16$.

Проведённые расчёты показали, что восстановление ухудшается вместе с возрастанием частоты, кроме того, при жёсткой заделке выше точность восстановления.

Заключение

В представленной работе рассмотрена обратная задача об определении предварительных напряжений в круглой упругой пластинке по известному прогибу на заданной частоте. Разработан вычислительный аппарат для решения прямой задачи. Приведен сравнительный анализ результатов полученных с помощью проекционного метода Ритца и метода пристрелки. Для решения обратной задачи предложен подход на основе проекционного метода Галеркина. Приведены результаты вычислительных экспериментов на основе метода Галеркина для различных законов распределения предварительных напряжений и граничных условий. Серия вычислительных экспериментов показала применимость проекционного подхода к решению обратной задачи о реконструкции предварительных напряжений.

Литература

1. Биргер И. А. Остаточные напряжения: М.: Машигиз, 1963. 232 с.
2. Nedin, R. and Vatulyan, A. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate // *Z. angew. Math. Mech.*, 2013. doi: 10.1002/zamm.201200195
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: М.: Физматгиз, 1963. 635 с.

4. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость: Киев: Наукова думка, 1980. 152 с.
5. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем: М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
6. Аникина Т. А., Ватульян А. О., Углич П. С. Определение характеристик неоднородной пластины // *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 6. С. 26–36.
7. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела: М.: Физматлит, 2007. 222 с.

References

1. Birger I. A. *Ostatochnye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Mashgiz Pub., 1963. 232 p. (In Russian)
2. Nedin R., Vatulyan A. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate. *Z. angew. Math. Mech.*, 2013. doi: 10.1002/zamm.201200195
3. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill Book Company, 1959, 635 p.
4. Guz A. N., Mahort F. G., Guscha O. I. *Vvedenie v akustouprugost'* [Introduction to acoustic firmness]. Kyiv, Naukova Dumka Pub., 1977, 580 p. (In Russian)
5. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemykh sistem* [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Pub., 1970, 734 p. (In Russian)
6. Anikina T. A., Vatulyan A. O., Uglich P. S. Opredelenie kharakteristik neodnorodnoy plastiny [On the characteristics defining for inhomogeneous plate]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2012, vol. 17, no. 6, pp. 26–36. (In Russian)
7. Vatulyan A. O., *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruyemogo tvyordogo tela* [Inverse problems in deformable solid mechanics]. Moscow, Fizmatlit Pub., 2007, 222 p. (In Russian)