

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ¹*А. Г. Горшков², Э. И. Старовойтов³, А. В. Яровая⁴, Д. В. Леоненко⁵*

STRAIN OF A CIRCLE SANDWICH PLATE ON ELASTIC FOUNDATION

Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V., Leonenko D. V.

Bending of a circle sandwich plate with light filler lying on the elastic foundation is considered. To describe kinematics of the package with asymmetrical thickness, the broken normal hypothesis has been accepted. Reaction of the foundation is described on the base of the Winkler model. The loading is local and symmetric. Combined equations of equilibrium and analytical solutions in terms of displacement have been obtained. Numerical results for the sandwich metal-polymeric plate have been adduced.

1. Постановка и решение задачи

Трехслойные элементы конструкций широко применяются в современных отраслях промышленности, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Они получили значительное распространение благодаря своей высокой прочности при относительно малой массе. Деформирование трехслойных стержней в терморadiационном поле при различных нагрузках исследовалось в работах [1–3], а пластин и оболочек — в [4–9]. Поведение трехслойного стержня на упругом основании изучено в [10]. Здесь рассмотрен изгиб упругой круговой трехслойной пластины, покоящейся на деформируемом основании, под действием локальных нагрузок.

Решение задачи проводится в цилиндрической системе координат r, ϕ, z . Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1, h_2 , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине наполнитель ($h_3 = 2c$) — легкий, т.е. в нем работа касательных напряже-

ний пренебрежимо мала. Симметричная вертикальная нагрузка $q_0(r)$ действует локально (рис. 1). На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\phi^{(k)} = 0$ (k — номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в наполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты ϕ , т.е. $u(r), \psi(r), w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_1 , через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя.

Используя гипотезу прямолинейности нормали наполнителя, из соотношения Коши $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)} + w_{,z} + w_{,r} = \psi$ после интегрирования получим выражения для радиальных переме-

¹Работа выполнена при поддержке администрации Краснодарского края и РФФИ р2003юг (03-01-96658).

²Горшков Анатолий Герасимович, д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной механики Московского государственного технического университета (МАИ).

³Старовойтов Эдуард Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор Белорусского государственного университета транспорта.

⁴Яровая Анна Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент Белорусского государственного университета транспорта.

⁵Леоненко Денис Владимирович, аспирант Белорусского государственного университета транспорта.

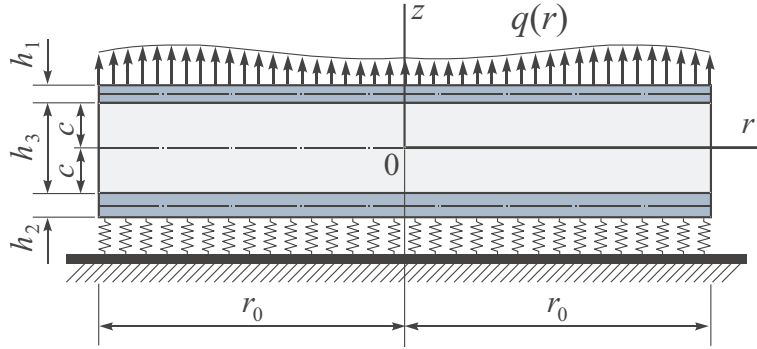


Рис. 1

щений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где z — координата рассматриваемого волокна, $(u + c\psi)$ — величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, $(u - c\psi)$ — смещение второго несущего слоя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях определяются из (1.1) и соотношений Коши $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$. Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c \left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta A - \delta W = 0, \quad (1.3)$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ — вариация суммарной работы внешней нагрузки $q_0(r)$ и контурных усилий T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0 ,

$$\delta A_1 = \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \delta A_2 &= \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + \\ &+ M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \right. \\ &\left. + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где δW — вариация работы внутренних сил упругости.

Здесь интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя S , q_R — реакция основания.

Вариации перемещений и деформаций в слоях стержня следуют из (1.1) и соотношений Коши. Подставив их в (1.4) и учитывая выражения для внутренних усилий (1.2), после соответствующих преобразований из уравнения (1.3) получим систему дифференциальных уравнений в усилиях, описывающую равновесие круговой трехслойной пластины на упругом основании

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r} (T_r - T_\varphi) &= -p, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q_0 + q_R. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Предполагается, что для напряжений и деформаций в слоях справедлив закон Гука. Связь между реакцией основания и прогибом

пластины принимается в соответствии с моделью Винклера

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (1.6)$$

где κ_0 — коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Выразив внутренние усилия (1.2) через искомые перемещения и подставив их в (1.5) с учетом (1.6), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающую деформирование рассматриваемой пластины

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - \kappa_0 w &= -q_0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+),$$

$$a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+,$$

$$a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+\right),$$

$$\begin{aligned} a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1\right) K_1^+ + \right. \\ &\quad \left. + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2\right) K_1^+ + \\ &\quad + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2\right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \end{aligned}$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k,$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} = g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} = g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}.$$

Задача отыскания функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к (1.7) граничных условий. При жесткой заделке на контуре пластины

$$u = \psi = w = w, r = 0. \quad (1.8)$$

При шарнирном опирании

$$u = \psi = w = M_r = 0. \quad (1.9)$$

Рассмотрим процедуру решения системы дифференциальных уравнений (1.7). С помощью первых двух уравнений в третьем уравнении обнуляются коэффициенты перед функциями u и ψ . После двукратного интегрирования система приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= b_1 w, r + C_1 r + C_2 / r, \\ \psi &= b_2 w, r + C_3 r + C_4 / r, \\ w, rrrr + \frac{2}{r} w, rrr - \frac{1}{r^2} w, rr + \\ &\quad + \frac{1}{r^3} w, r + \kappa^4 w = q, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}, \\ \kappa^4 &= \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \\ b_1 &= \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}. \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — константы интегрирования.

В связи с ограниченностью предполагаемого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$. Общее решение третьего уравнения в (1.10)

$$\begin{aligned} w &= C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + \\ &\quad + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r) + w_0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где функции Кельвина нулевого порядка $\varphi_n(\kappa r) = \operatorname{ber}(\kappa r), \operatorname{bei}(\kappa r), \operatorname{ker}(\kappa r), \operatorname{kei}(\kappa r)$ образуют фундаментальную систему решений [11]; w_0 — частное решение.

Частное w_0 решение уравнения (1.10) получим, используя ядро Коши $K(r, s)$

$$w_0(r) = \int_0^r K(r, s) q(s) ds, \quad (1.12)$$

$$K(r, s) = \sum_{k=1}^4 C_k(s) \varphi_k(r), \quad C_k(s) = \frac{W_k(s)}{W(s)},$$

$$W(r) = \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \varphi_2(r) & \varphi_3(r) & \varphi_4(r) \\ \varphi_1'(r) & \varphi_2'(r) & \varphi_3'(r) & \varphi_4'(r) \\ \varphi_1''(r) & \varphi_2''(r) & \varphi_3''(r) & \varphi_4''(r) \\ \varphi_1'''(r) & \varphi_2'''(r) & \varphi_3'''(r) & \varphi_4'''(r) \end{vmatrix},$$

Определители $W_k(r)$ получаются из вронскиана $W(r)$ заменой k -го столбца столбцом $(0, 0, 0, 1)^T$.

Частное решение (1.12) и ядро Коши удовлетворяют условиям [11]

$$\begin{aligned} w_0(0) = w'_0(0) = w''_0(0) = w'''_0(0) = 0, \\ K(s, s) = K'(s, s) = K''(s, s) = 0, \\ K'''(s, s) = 1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где штрих сверху обозначает производную по r .

Преимущество частного решения (1.12) в том, что интеграл в нем определенный и включает нагрузку в явном виде, которая не входит при этом в ядро Коши. Поэтому в дальнейшем нагрузка может приниматься как непрерывной, так и локальной.

Функция $\ker(x)$ и первая производная от нее в нуле не ограничены ($\ker(0) = \infty$, $\ker'(0) = \infty$). Так как прогиб и его первая производная в центре пластины должны быть конечными, то в решении (1.11) для сплошных пластин, учитывая (1.13), необходимо положить $C_7 = C_8 = 0$. В результате для сплошной пластины искомое решение принимает вид

$$\begin{aligned} u = b_1 w_{,r} + C_1 r; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ w = C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + w_0(r). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Константы интегрирования C_1 , C_3 , C_5 , C_6 определяются из условий закрепления рассматриваемой трехслойной пластины, находящейся на упругом основании. При жесткой заделке контура пластины из (1.8) следует

$$\begin{aligned} C_1 = C_3 = 0, \\ C_5 = \frac{w'_0(1) \operatorname{bei}(\kappa) - b_4 w_0(1)}{b_4 \operatorname{ber}(\kappa) - b_3 \operatorname{bei}(\kappa)}, \\ C_6 = \frac{w'_0(1) \operatorname{ber}(\kappa) - b_3 w_0(1)}{b_3 \operatorname{bei}(\kappa) - b_4 \operatorname{ber}(\kappa)}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Если контур пластины шарнирно оперт, то константы интегрирования получим из (1.9)

$$\begin{aligned} C_1 = -b_1 w_{,r}(1), \quad C_3 = -b_2 w_{,r}(1), \\ C_5 = \frac{w^*_0(1) \operatorname{bei}(\kappa) + b_8 w_0(1)}{b_7 \operatorname{bei}(\kappa) - b_8 \operatorname{ber}(\kappa)}, \\ C_6 = -\frac{w^*_0(1) \operatorname{ber}(\kappa) + b_7 w_0(1)}{b_7 \operatorname{bei}(\kappa) - b_8 \operatorname{ber}(\kappa)}, \\ b_3 = \frac{\kappa \sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1(\kappa) + \operatorname{bei}_1(\kappa)], \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$b_4 = \frac{\kappa \sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1(\kappa) + \operatorname{bei}_1(\kappa)],$$

$$b_5 = \frac{\kappa^2}{2} (\operatorname{bei}_2(\kappa) - \operatorname{ber}(\kappa)),$$

$$b_6 = \frac{\kappa^2}{2} (-\operatorname{ber}_2(\kappa) + \operatorname{ber}(\kappa)),$$

$$b_7 = (b_5 - b_3)(a_3 b_1 + a_5 b_2) - a_6 b_5 - a_{60} b_3,$$

$$b_8 = (b_6 - b_4)(a_3 b_1 + a_5 b_2) - a_6 b_6 - a_{60} b_4,$$

$$\begin{aligned} w^*_0(1) = (a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2) w''_0(1) + \\ + (a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2) w'_0(1). \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение (1.14) с частным решением (1.12) и константами интегрирования (1.15), (1.16) описывает перемещения в круговой трехслойной пластине на упругом основании при симметричной нагрузке и различных условиях закрепления ее контура.

Для аналитической записи локальной распределенной нагрузки далее используется функция Хевисайда нулевого порядка $H_0(x)$; погонные и сосредоточенные силы и моменты записываются с помощью дельта-функции Дирака $\delta(x)$

$$\begin{aligned} H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\ \int_a^b f(\tau) \delta(\tau - x) d\tau = \\ = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.17)$$

2. Численные результаты

Расчеты проводились для защемленной по контуру пластины, слою которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Геометрические параметры пластины отнесены к ее радиусу r_1 , относительные толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,4$. Коэффициенты жесткости соответствуют слабым ($\kappa_0 = 1$), средним ($\kappa_0 = 100$) и жестким ($\kappa_0 = 5000$ МПа/м) основаниям.

1. *Нагрузка равномерно распределена по поверхности пластины* $q_0 = \text{const}$. В этом

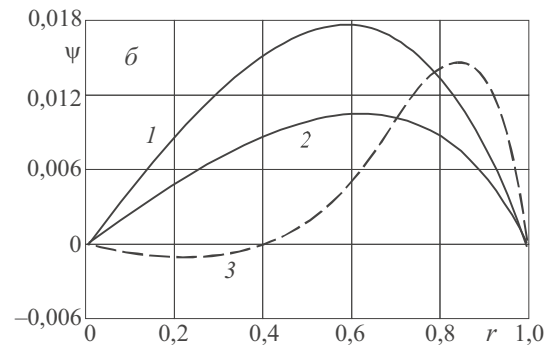
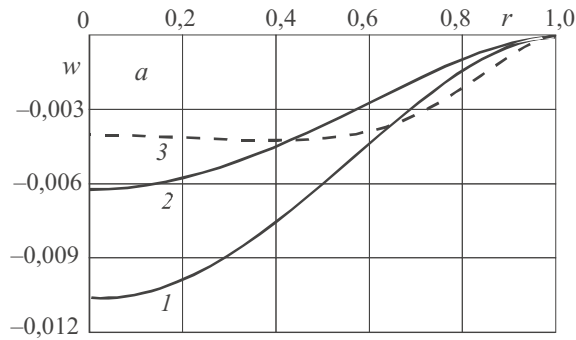


Рис. 2

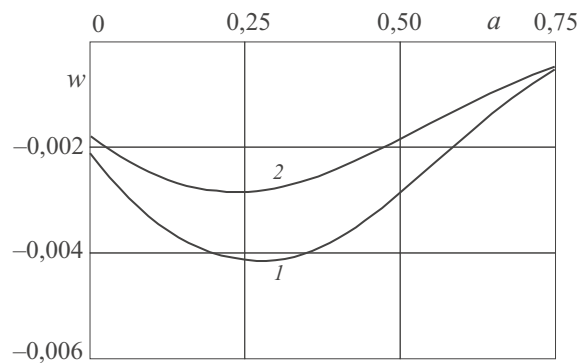


Рис. 3

случае частное решение (1.12) можно выписать в конечном виде

$$w_0 = \frac{q}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}.$$

На рис. 2 (а, б) показано изменение вдоль радиуса прогиба w и сдвига в заполнителе ψ рассматриваемой пластины. Кривые получены при различных коэффициентах упругости основания (МПа/м): кривая 1 — $\kappa_0 = 1$, кривая 2 — $\kappa_0 = 100$, кривая 3 — $\kappa_0 = 5000$ (значения перемещений увеличены в 20 раз). Увеличение коэффициента постели основания приводит к изменению форм кривых. Для жестких оснований прогиб перестает быть максимальным в центре пластины, сдвиг в заполнителе меняет знак вдоль радиуса.

2. Нагрузка равномерно распределена по кольцу $a \leq r \leq b$. Тогда ее можно описать с помощью функций (1.17):

$$q = q_0 [H_0(b-r) - H_0(a-r)]. \quad (2.1)$$

Частное решение и его значения на контуре пластины, входящие в (1.15), при нагрузке

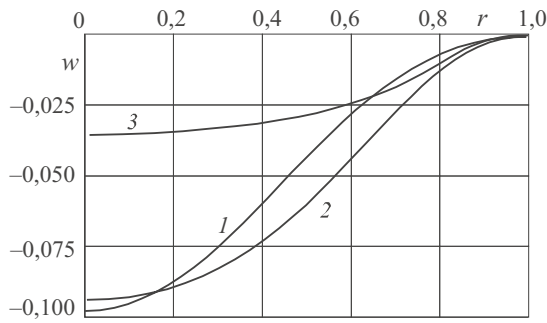
(2.1) будут иметь вид

$$w_0(r) = Dq_0 \int_0^r K(r,s) [H_0(b-r) - H_0(a-r)] ds,$$

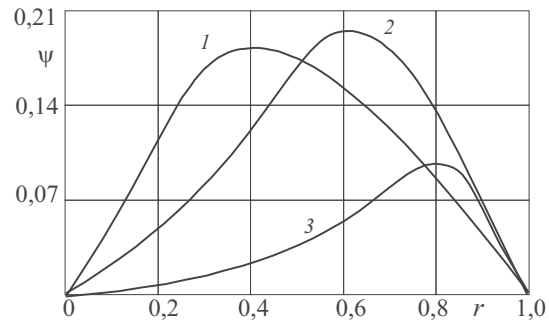
$$w'_0(1) = Dq_0 \int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} [H_0(b-s) - H_0(a-s)] ds \Big|_{r=1} = Dq_0 \int_a^b \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} \Big|_{r=b} ds,$$

$$w_0(1) = Dq_0 \int_0^1 K(1,s) [H_0(b-r) - H_0(a-r)] ds = Dq_0 \int_a^b K(1,s) ds.$$

На рис. 3 показано изменение прогиба в центре пластины в зависимости от положения кольцевого пятна нагрузки. Толщина кольца

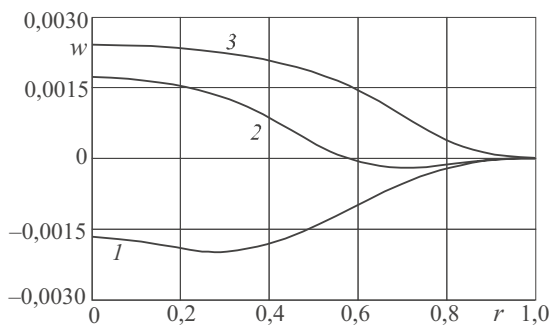


а)

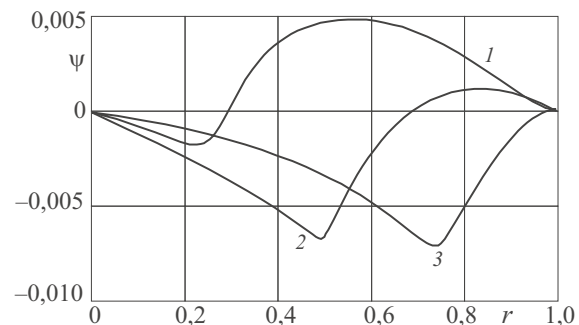


б)

Рис. 4



а)



б)

Рис. 5

принята $b - a = 0,25$. При $a = 0$ нагрузка распределена по кругу радиуса b , при $a = 0,75$ кольцо нагрузки примыкает к контуру пластины. Максимум прогиба наблюдается при значении координаты $a = 0,25$. Кривые 1, 2 соответствуют $\kappa_0 = 1$ и 100. Увеличение жесткости основания в 100 раз приводит к уменьшению прогиба на 44%.

3. *Поперечная сила.* На рассматриваемую трехслойную пластину действует погонная поперечная сила $Q(r)$ постоянной интенсивности Q_0 , приложенная вдоль окружности радиуса $r = a$, описываемая формулой

$$q(r) = Q_0 \delta(r - a). \quad (2.2)$$

Частное решение и его значения на контуре пластины, исходя из определения дельта-функции Дирака (1.17), имеют вид

$$\begin{aligned} w_0(r) &= DQ_0 \int_0^r K(r, s) \delta(s - a) ds = \\ &= DQ_0 K(r, a), \quad (a > 0), \end{aligned}$$

$$w'_0(1) = DQ_0 \left. \frac{\partial K(r, a)}{\partial r} \right|_{r=1},$$

$$w_0(1) = DQ_0 K(1, a).$$

На рис. 4а показано изменение прогиба, а на рис. 4б — сдвига в заполнителе рассматриваемой пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены для различных радиусов силовой окружности, вдоль которой действует нагрузка (2.2). Кривые 1–3 соответствуют $a = 0,25; 0,5$ и $0,75$. Интенсивность погонной силы $Q_0 = 100$ кН/м. Прогибы достигают максимальных значений при радиусе силовой окружности $a = 0,25$. Значения перемещений на рисунках увеличены в 100 раз.

4. *Момент.* На исследуемую пластину действует погонный момент интенсивности $M_0 = \text{const}$, распределенный по окружности радиуса $r = a$. Аналитически нагрузку можно представить в виде

$$q(r) = M_0 \delta'(r - a). \quad (2.3)$$

Соответствующее частное решение и его значения на контуре будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned}
 w_0(r) &= DM_0 \int_0^r K(r, s) \delta'(s - a) ds = \\
 &= -DM_0 \frac{\partial K(r, s)}{\partial s} \Big|_{s=a}, \\
 w'_0(1) &= -DM_0 \frac{\partial^2 K(r, s)}{\partial r \partial s} \Big|_{r=1, s=a}, \\
 w_0(1) &= -DM_0 \frac{\partial K(1, s)}{\partial s} \Big|_{s=a}.
 \end{aligned}$$

На рис. 5 (а, б) показано изменение прогиба и сдвига в заполнителе упругой круговой трехслойной пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены для различных радиусов a окружности, вдоль которой приложена моментная нагрузка (20). Кривые 1–3 отвечают $a = 0,25, 0,5, 0,75$ соответственно. Интенсивность погонных моментов $M_0 = 100$ кН. По мере продвижения моментной окружности к контуру пластины прогиб уменьшается по величине до нуля и меняет знак. У сдвигов максимумы в виде пиков совпадают с радиусами приложения погонных моментов.

3. Выводы

Приведенное в работе общее решение (1.11), (1.12) можно использовать для исследования любого случая изгиба симметричной локальной нагрузкой круговой трехслойной пластины с легким заполнителем на упругом основании, при наличии отверстия или без него. Форма и вид нагрузки могут быть произвольными, включая воздействие в центре пластины сосредоточенных сил и моментов.

Литература

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Напряженно-деформированное состояние трехслойного металлополимерного стержня // Пробл. прочности. 1998. № 3. С. 114–123.
2. Старовойтов Э. И. Вязкоупругопластические пластины и оболочки. Гомель: БелГУТ, 2002. 343 с.
3. Плещачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Деформирование металлополимерных систем. Мн.: Бел. наука, 2004. 342 с.
4. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки // Пробл. прочности. 2001. № 3. С. 100–107.
5. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок // Пробл. прочности. 2002. № 5. С. 70–79.
6. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Колебания круглых трехслойных пластин под действием поверхностных нагрузок различных форм // Пробл. прочности. 2003. № 4. С. 32–39.
7. Яровая А. В. Деформирование слоистых элементов конструкций в терморadiационном поле // Пробл. прочности. № 6. 2004. С. 111–118.
8. Яровая А. В. Циклические нагружения слоистых вязкоупругопластических тел в терморadiационном поле // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 3. С. 116–124.
9. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. М.: Физматлит, 2002. 416 с.
10. Яровая А. В., Старовойтов С. А. Трехслойный стрержень на упругом основании // Материалы, технологии, инструменты. 2003. № 2. С. 9–11.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

Статья поступила 20 сентября 2004 г.

Московский государственный технический университет (МАИ)

Белорусский государственный университет транспорта

© Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В., 2005