

Ф И З И К А

УДК 532.59 + 551.466

СЕЙШЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЧАСТИЧНО ЗАМКНУТОМ БАССЕЙНЕ

Манилюк Ю. В., Фомин В. В.

SEICHE OSCILLATIONS IN A PARTIALLY ENCLOSED BASIN

Maniliuk Yu. V., Fomin V. V.

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia
e-mail: uvmsev@yandex.ru

Abstract. The study of seiche oscillations in the open entrance basins is an important applied problem. Even relatively small level fluctuations caused by seiches can be accompanied by strong horizontal flows which impede navigation and are dangerous for moored ships. In this work within the framework of the linear shallow water theory the seiche oscillations are studied in a rectangular basin of constant depth. The analytical solution is obtained for the case of the nodal level line location at the entrance to the basin. The structures of the seiche oscillations is compared for closed and partially closed basins. Their similarities and differences are revealed. It is established that the seiche oscillation periods in a basin with an open entrance are always smaller than the periods of the corresponding modes in same dimensions and depth closed basin. It is shown that the transverse seiches have a two-dimensional structure in open entrance basin. Their wave flows velocities depend on the horizontal dimensions and depth of the basin. In a closed basin, the wave flows of transverse seiches are one-dimensional, their magnitude does not depend on the horizontal dimensions of the basin and is inversely proportional to the square root of the basin depth. In the open entrance basin nodal level lines of the longitudinal seiches are shifted from basin entrance as compared to the nodal lines in a closed basin. The lower mode of the seiche in the open entrance basin is the Helmholtz mode. The wave flow for the Helmholtz mode is always directed perpendicularly to the entrance to the basin and its maximum velocity does not depend on the width and length of the basin. It is directly proportional the initial deviation amplitude of the free surface and inversely proportional to the square root of the basin depth. The greatest velocities of the flows take place at the open boundary of the basin. The estimates of seiche periods and wave flow velocities are obtained for the Akhtarskiy frith (the Azov Sea).

Keywords: seiches, free waves, long waves, wave flows, open entrance basin, partially enclosed basin, Helmholtz mode, analytical solutions, the Azov Sea, Akhtarskiy frith.

Введение

Сейши являются одним из наиболее распространенных видов движения жидкости в ограниченных водоемах и в значительной степени определяют их гидрологические режимы. Сейшевые колебания могут быть вызваны [1]: неравномерным распределением атмосферного давления над акваторией или его периодическим изменением во времени; воздействием ветра на водную поверхность; резкими изменениями уровня в какой-либо части водоема за счет притока или оттока

речных вод; выпадением осадков, сейсмическими колебаниями земной коры. В условиях климатических аномалий, усиливающих воздействие данных факторов, исследование сейш становится все актуальней. Существенный интерес представляют сейши в частично замкнутых бассейнах. Так в бухтах они могут быть причиной такого явления, как тягун [1]. При этом имеют место сильные периодические течения, приводящие к ударам судов о причалы или столкновению судов, обрыву швартовых, проблемам в проведении погрузо-

Манилюк Юрий Владимирович, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: uvmsev@yandex.ru

Фомин Владимир Владимирович, д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом вычислительных технологий и математического моделирования Морского гидрофизического института РАН; e-mail: fomin.dntmm@gmail.com

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2014-0010 “Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем Черного и Азовского морей на основе современных методов контроля состояния морской среды и гидротехнологий”.

разгрузочных операций [1–3]. В работах [2–4] приведены формулы для расчета периодов сейш в бухтах простой формы для случаев, когда движение зависит от одной пространственной координаты. В статье [5] исследуется влияние геометрических характеристик залива на сейши. В [6] анализируются низкочастотные колебания в порту, вызывающие явления тягуна, на примере проектируемых портов Тамань и Геленджик. В работе [7] приводятся результаты экспериментальных исследований резонансных колебаний в портах Сахалина. В статье [8] рассматривается резонансное усиление сейшевых колебаний в эстуарии. Практический интерес представляет исследование сейшевых колебаний с использованием аналитических методов, позволяющих получить точные решения для бассейнов с простой геометрией. Эти решения могут быть использованы при планировании натурных наблюдений для: определения дискретности по времени наблюдений за уровнем воды; выбора точек, в которых целесообразно устанавливать измерители; определения районов акватории, где течения и отклонения уровня максимальны. Аналитические решения также широко применяются для тестирования и оценки точности сложных численных моделей.

Целью настоящей работы является получение аналитического решения задачи о сейшах, зависящего от двух пространственных переменных и приложение его к исследованию сейшевых колебаний в частично замкнутом бассейне.

1. Постановка задачи и аналитическое решение

Рассмотрим свободные линейные колебания однородной невязкой жидкости в частично замкнутом бассейне, имеющем одну открытую границу, соединяющую его с внешней областью (рис. 1).

Будем предполагать, что волны длинные, атмосферное давление над акваторией бассейна постоянное. Влиянием вращения Земли пренебрежем. В данном случае движение жидкости описывается системой уравнений длинных волн [9]:

$$\begin{aligned} u_t &= -g\zeta_x, & v_t &= -g\zeta_y, \\ \zeta_t &= -(hu)_x - (hv)_y. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В (1.1) использованы следующие обозначения: x, y — декартовы координаты; u, v — проек-

ции вектора скорости движения жидкости на оси x, y соответственно, ζ — отклонение свободной поверхности, h — глубина бассейна, t — время, g — ускорение свободного падения.

Внешняя область ограничена прямолинейным берегом, параллельным оси y , и имеет постоянную глубину h . Бассейн (внутренняя область) имеет форму прямоугольника длиной a и шириной b (рис. 1). Глубина бассейна постоянная и равна h . На твердой границе должно выполняться условие непротекания жидкости

$$V_n = 0. \quad (1.2)$$

Здесь V_n — нормальная к твердой границе составляющая скорости. На жидкой границе $\Gamma \in (x = a; 0 \leq y \leq b)$ требуется выполнение условий непрерывности уровня и потока жидкости [11]

$$\begin{aligned} \zeta_1(x, y, t) &= \zeta_2(x, y, t)|_{\Gamma}, \\ h \frac{\partial \zeta_1(x, y, t)}{\partial y} &= h \frac{\partial \zeta_2(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Здесь $\zeta_1(x, y, t)$, $\zeta_2(x, y, t)$ — отклонения свободной поверхности во внутренней и внешней областях соответственно. На бесконечности должно выполняться условие излучения Зоммерфельда [11], согласно которому влияние внутренней области на волновое поле во внешней области должно стремиться к нулю при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ и нет волн приходящих из бесконечности.

В первом приближении ограничимся рассмотрением движения жидкости во внутренней области. На жидкой границе будем использовать условие [7, 10, 11]

$$\zeta(x, y, t)|_{\Gamma} = 0. \quad (1.3)$$

Фактически это условие основано на пренебрежении излучением через открытую границу [11], его корректность определяется относительной шириной входа в акваторию и глубиной на входе. Также это условие означает, что на жидкой границе расположены узловые линии для всех мод свободных колебаний жидкости в рассматриваемом бассейне. Такое упрощение допускается использовать, если целью расчета является определение собственных частот и форм, а вход в бухту не слишком велик [7, 10, 11].

Для рассматриваемого бассейна граничные условия (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0; & v(x, 0, t) &= 0; \\ v(x, b, t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

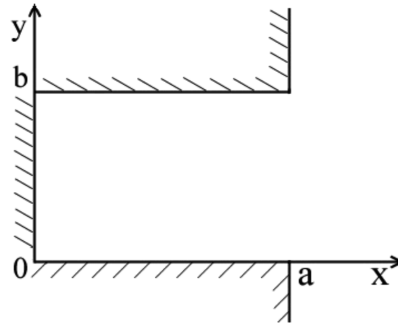


Рис. 1. Модельный бассейн с открытым входом

А граничное условие (1.3) запишется так

$$\zeta(a, y, t) = 0. \quad (1.5)$$

Условие (1.5) примет вид

$$\zeta(a, y) = 0. \quad (1.10)$$

Будем искать решение краевой задачи (1.1), (1.4), (1.5) в виде периодических по времени функций:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_1(x, y)e^{i\sigma t}, \\ v(x, y, t) &= v_1(x, y)e^{i\sigma t}, \\ \zeta(x, y, t) &= \zeta_1(x, y)e^{i\sigma t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где σ — частота колебаний, i — мнимая единица.

С учетом (1.1), (1.6) запишем выражения для компонент скорости течения

$$u = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad v = \frac{ig}{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Здесь и ниже для простоты письма будем опускать индекс «1» у функций $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, $\zeta_1(x, y)$.

Для нахождения ζ , учитывая (1.6), (1.7), а также тот факт, что глубина бассейна $h = \text{const}$, из третьего уравнения системы (1.1) имеем

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \lambda \zeta = 0, \quad (1.8)$$

где $\lambda = \sigma^2 / gh$ — квадрат волнового числа.

Получим выражения для граничных условий (1.4), (1.5) относительно функции ζ . Подставив соотношения (1.7) в (1.4), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta(0, y)}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial \zeta(x, 0)}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \zeta(x, b)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В результате приходим к краевой задаче на собственные значения для уравнения эллиптического типа второго порядка с постоянными коэффициентами (1.8) с однородными граничными условиями (1.9), (1.10). Ее можно решить аналитически, воспользовавшись методом разделения переменных [12]. Функцию $\zeta(x, y)$ представим в виде

$$\zeta(x, y) = X(x)Y(y). \quad (1.11)$$

После подстановки (1.11) в (1.8) и разделения переменных, имеем

$$-\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} + \lambda. \quad (1.12)$$

Полагая

$$\nu = \lambda - \mu, \quad (1.13)$$

получим из (1.12) с учетом (1.13) следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$-X_{xx} = \mu X, \quad -Y_{yy} = \nu Y \quad (1.14)$$

Принимая во внимание выражения (1.10) и (1.11), находим граничные условия для уравнений (1.14):

$$X_x(0) = 0, \quad X(a) = 0, \quad (1.15)$$

$$Y_y(0) = 0, \quad Y_y(b) = 0. \quad (1.16)$$

Задачи (1.14)–(1.16) представляют собой задачи Штурма–Лиувилля для нахождения собственных значений и собственных функций.

Общее решение первого дифференциального уравнения (1.14) имеет вид [12]

$$X(x) = D \cos(\sqrt{\mu}x) + E \sin(\sqrt{\mu}x). \quad (1.17)$$

Удовлетворяя первому граничному условию (1.15), находим, что $E = 0$. Из второго граничного условия (1.15)

$$-D\mu \cos(\sqrt{\mu}a) = 0. \quad (1.18)$$

Поскольку в уравнении (1.18) $D \neq 0$ и $\mu \neq 0$, то $\cos(\sqrt{\mu}a) = 0$, откуда следует

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2a} \right)^2; \quad (1.19)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом (1.19) получаем

$$X(x) = D \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x; \quad (1.20)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Решая аналогично задачу для $Y(y)$, получим

$$Y(y) = L \cos \frac{m\pi y}{b}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

Задавая начальную амплитуду колебаний уровня ζ_{0km} и принимая во внимание выражения (1.20), (1.21), из (1.11) имеем

$$\begin{aligned} \zeta_{km}(x, y) = \\ = \zeta_{0km} \cos \frac{(1+2k)\pi x}{2a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $k, m = 0, 1, 2, \dots$

Из (1.13)

$$\lambda_{km} = \left(\frac{(1+2k)\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2. \quad (1.23)$$

Принимая во внимание, что $\lambda = \sigma^2/gh$, запишем формулы для вычисления собственных частот и периодов:

$$\sigma_{km} = \frac{\pi}{2ab} \sqrt{gh} \sqrt{(1+2k)^2 b^2 + 4m^2 a^2}, \quad (1.24)$$

$$\tau_{km} = \frac{4}{\sqrt{gh}} \frac{ab}{\sqrt{(1+2k)^2 b^2 + 4m^2 a^2}}. \quad (1.25)$$

Таким образом, найдена система собственных функций (1.22) задачи Штурма–Лиувилля

(1.8)–(1.10). Согласно [12], полученная система обладает свойством полноты, в силу этого других собственных значений и собственных функций задача не имеет. При некотором наборе номеров (k, m) собственные значения задачи могут повторяться, т.е. $\lambda_{km} = \lambda_{k_0 m_0}$. Количество таких повторений, равное числу решений в целых числах уравнения

$$\frac{(1+2k)^2}{4a^2} + \frac{m^2}{b^2} = \frac{(1+2k_0)^2}{4a^2} + \frac{m_0^2}{b^2},$$

дает кратность собственного значения $\lambda_{k_0 m_0}$. Например, при $b = 2a = 1$ кратность $\sigma_{11} = \sigma_{03}$ равна 2 ($(1+2)^2 + 1^2 = 1^2 + 3^2$).

Подставив соотношение (1.22) в третье выражение (1.6) и выделив вещественную часть, получим формулу для расчета отклонений свободной поверхности

$$\begin{aligned} \zeta_{km}(x, y, t) = \zeta_{0km} \cos \frac{(1+2k)\pi x}{2a} \times \\ \times \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \sigma_{km} t. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь ζ_{0km} — амплитуда начального отклонения свободной поверхности.

С учетом первых двух выражений из (1.6), соотношений (1.7), (1.24) и (1.26) выпишем формулы для вычисления составляющих скорости движения жидкости:

$$\begin{aligned} u_{km}(x, y, t) = A_{km} \sin \frac{(1+2k)\pi x}{2a} \times \\ \times \cos \frac{m\pi y}{b} \sin \sigma_{km} t, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} v_{km}(x, y, t) = B_{km} \cos \frac{(1+2k)\pi x}{2a} \times \\ \times \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \sigma_{km} t, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где

$$A_{km} = \zeta_{0km} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{(1+2k)b}{\sqrt{(1+2k)^2 b^2 + 4m^2 a^2}},$$

$$B_{km} = \zeta_{0km} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{2ma}{\sqrt{(1+2k)^2 b^2 + 4m^2 a^2}}.$$

В результате для прямоугольного бассейна постоянной глубины с открытым входом получено решение системы уравнений длинных волн, позволяющее найти частоты мод сейшевых колебаний по формуле (1.24). Задав

начальные значения амплитуд отклонений свободной поверхности ζ_{0km} , геометрические параметры бассейна a, b, h можно рассчитать на основе соотношения (1.26) отклонения свободной поверхности и с помощью выражений (1.27), (1.28) волновые скорости соответствующих мод.

2. Периоды сейшевых колебаний

Из формулы (1.25) следует, что периоды продольных мод ($k \neq 0, m = 0$) не зависят от ширины бассейна b и прямо пропорциональны его длине a . Для поперечных мод ($k = 0, m \neq 0$) имеет место зависимость периодов сейш и от ширины, и от длины бассейна. Особенностью продольно-поперечных мод ($k \neq 0, m \neq 0$) является то, что с ростом индекса k влияние ширины бассейна b на период сейш увеличивается быстрее, чем влияние длины бассейна a с ростом индекса m .

Сравним периоды сейш в бассейне с открытым входом с периодами сейш в замкнутом бассейне, которые определяются формулой [13]

$$\tau_{km}^* = \frac{2}{\sqrt{gh}} \frac{ab}{\sqrt{k^2 b^2 + m^2 a^2}}. \quad (2.1)$$

Из выражений (1.25), (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{km}}{\tau_{km}^*} &= \frac{\sqrt{(2k)^2 b^2 + 4m^2 a^2}}{\sqrt{(1+2k)^2 b^2 + 4m^2 a^2}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{(1+4k)b^2}{(1+2k)^2 b^2 + 4m^2 a^2}}. \end{aligned}$$

Анализ полученного соотношения показывает, что периоды сейшевых колебаний в прямоугольном бассейне с открытым входом всегда меньше периодов соответствующих мод в замкнутом бассейне.

Для периодов продольных сейш ($k \neq 0, m = 0$) имеем

$$\tau_{k0} = \frac{4}{\sqrt{gh}} \frac{a}{(1+2k)}, \quad \frac{\tau_{k0}}{\tau_{k0}^*} = \frac{2k}{1+2k}.$$

Как видно, величина τ_{k0}/τ_{k0}^* определяется только значениями индекса k . Так, при $k = 1$ $\tau_{k0}/\tau_{k0}^* = 2/3$, при $k = 2$ $\tau_{k0}/\tau_{k0}^* = 4/5$, при $k = 3$ $\tau_{k0}/\tau_{k0}^* = 6/7$. Следовательно, с увеличением значения k периоды мод продольных сейш в бассейне с открытой границей

приближаются к периодам соответствующих мод в замкнутом бассейне. Периоды продольных сейш в бассейне с открытой границей не зависят от ширины бассейна. Аналогичная закономерность характерна для замкнутого бассейна.

Для периодов поперечных сейш ($k = 0, m \neq 0$) получим

$$\begin{aligned} \tau_{0m} &= \frac{4}{\sqrt{gh}} \frac{ab}{\sqrt{b^2 + 4m^2 a^2}}, \\ \frac{\tau_{0m}}{\tau_{0m}^*} &= \frac{4m^2 a^2}{b^2 + 4m^2 a^2} = 1 - \frac{b^2}{b^2 + 4m^2 a^2}. \end{aligned}$$

Здесь отношение τ_{0m}/τ_{0m}^* зависит не только от индекса m , но и от размеров бассейна. Чем длиннее бассейн с открытой границей, тем периоды поперечных сейш в нем будут больше приближаться к периодам соответствующих мод в замкнутом бассейне. Особенностью поперечных сейш в бассейне с открытой границей является то, что их периоды зависят не только от ширины бассейна b , как это имеет место в случае замкнутого бассейна, но и от длины бассейна a .

3. Колебания уровня

Исследуем пространственную структуру колебаний уровня. Рассмотрим продольные сейши ($k \neq 0, m = 0$). Из (1.26) имеем уравнение для узловых линий: $\cos(1+2k)\pi x/2a = 0$. Откуда

$$\begin{aligned} x_k^s &= a(1+2s)(1+2k)^{-1}; \quad (3.1) \\ s &= 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

Так как значения x не должны превышать длину бассейна, то

$$a(1+2s)(1+2k)^{-1} \leq a.$$

Отсюда следует неравенство $s \leq k$. Аналогично находим уравнение линий пучностей

$$x_k^j = 4ja(1+2k)^{-1}; \quad (3.2)$$

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad j \leq (1+2k)/4$$

и уравнение линий впадин

$$x_k^r = 2a(1+2r)(1+2k)^{-1}; \quad (3.3)$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad r \leq (2k-1)/4.$$

Например, при $k = 1$ имеются две узловые линии ($x_1^0 = a/3, x_1^1 = a$), одна линия пучностей ($x_1^0 = 0$) и одна линия впадин ($x_1^0 = 2a/3$).

При $k = 2$ существуют три узловые линии ($x_2^0 = a/5, x_2^1 = 3a/5, x_2^2 = a$), две линии пучностей ($x_2^0 = 0, x_2^1 = 4a/5$) и одна линия впадин ($x_2^0 = 2a/5$). При этом каждые полпериода линии пучностей и линии впадин будут меняться местами в силу свойств функции $\cos \sigma t$.

При $(k = 0, m = 0)$ имеет место мода Гельмгольца, которая отсутствует в замкнутом бассейне. У этой моды одна узловая линия $x_0^0 = a$, расположенная у входа в бассейн, и одна линия пучностей $x_0^0 = 0$. Для линии впадин ограничение на r не выполняется ни при одном допустимом значении k . Поэтому в течение полупериода данной моды в бассейне на стенке, расположенной напротив входа в бассейн, в зависимости от знака функции $\cos \sigma t$ будет иметь место либо только линия пучностей, либо только линия впадин.

Для поперечных сейш ($k = 0, m \neq 0$) уравнения линий узлов, пучностей и впадин имеют вид:

$$y_m^s = b(1 + 2s)(2m)^{-1}; \quad (3.4)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots; \quad s \leq 2(m-1)/2;$$

$$y_m^j = 2jbm^{-1}; \quad (3.5)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad j \leq m/2;$$

$$y_m^r = (1 + 2r)bm^{-1}; \quad (3.6)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, \quad r \leq (m-1)/2.$$

Например, при $m = 1$ имеется одна узловая линия $y_1^0 = b/2$, одна линия пучностей $y_1^0 = 0$ и одна линия впадин $y_1^0 = b$. При $m = 2$ будут две узловые линии: $y_2^0 = b/4, y_2^1 = 3b/4$; две линии пучностей: $y_2^0 = 0, y_2^1 = b$ и одна линия впадин $y_2^0 = b/2$. Из-за изменения знака функции $\cos \sigma t$ каждые полпериода линии пучностей и линии впадин меняются местами.

Отметим, что уравнения для узловых линий, а также линий пучностей и впадин в случае поперечных сейш в бассейне с открытой границей совпадают с аналогичными уравнениями для замкнутого бассейна.

Для случая продольно-поперечных сейш ($k \neq 0, m \neq 0$) положение узловых линий будут определяться уравнениями (3.1), (3.4). Максимальные по модулю отклонения уровня имеют место в точках пересечения линий пучностей и впадин продольных и поперечных мод, задаваемых уравнениями (3.2), (3.3), (3.5), (3.6). Например, для моды

($k = 1, m = 1$) наибольшие по модулю отклонения уровня будут в точках с координатами $(0, 0); (0, b)$ (пучности) и $(2a/3, 0); (2a/3, b)$ (впадины). При этом положение впадин и пучностей будут меняться местами каждые полпериода волны.

Общее количество узловых линий уровня (для случая, когда узловая линия расположена на жидкой границе) у любой моды сейшевых колебаний в прямоугольном бассейне с открытой границей постоянной глубины равно $(k+1) + m$. Число узловых линий, параллельных оси y , равно $k+1$, а параллельных оси x равно m .

Исследуем профили свободной поверхности для продольных и поперечных мод сейш в замкнутом и частично замкнутом бассейнах.

На рис. 2 для момента времени $t = 0$ представлены изолинии уровня продольной одноузловой сейши в замкнутом бассейне (рис. 2а) и в бассейне с открытым входом (рис. 2б). Анализ картин изолиний показывает, что в обоих случаях изолинии параллельны оси y . Узловая линия в бассейне с открытым входом расположена ближе к твердой границе бассейна ($x = 0$), чем аналогичная узловая линия в замкнутом бассейне. Также в бассейне с открытым входом между узловой линией и открытой границей имеется область, в которой отклонения уровня максимальны. Такой области нет в замкнутом бассейне.

На рис. 3 для момента времени $t = 0$ представлены изолинии уровня поперечной одноузловой сейши в замкнутом бассейне (рис. 3а) и в бассейне с открытым входом (рис. 3б). Анализ картин изолиний показывает, что в замкнутом бассейне колебания жидкости для данной моды имеют одномерный характер и изолинии уровня параллельны оси продольной координаты. В бассейне с открытым входом движение жидкости двумерно. При этом имеет место небольшая область, примыкающая к твердой границе бассейна ($x = 0$), расположенной напротив входа в него, в которой движение одномерно.

4. Скорости течений

Скорости течений, вызванных сейшми, определяются формулами (1.27), (1.28). Рассмотрим продольные сейши: ($k \neq 0, m = 0$). Из (1.28) следует, что $v_{km}(x, y) = 0$ для всех допустимых значений k . Это означает, что в

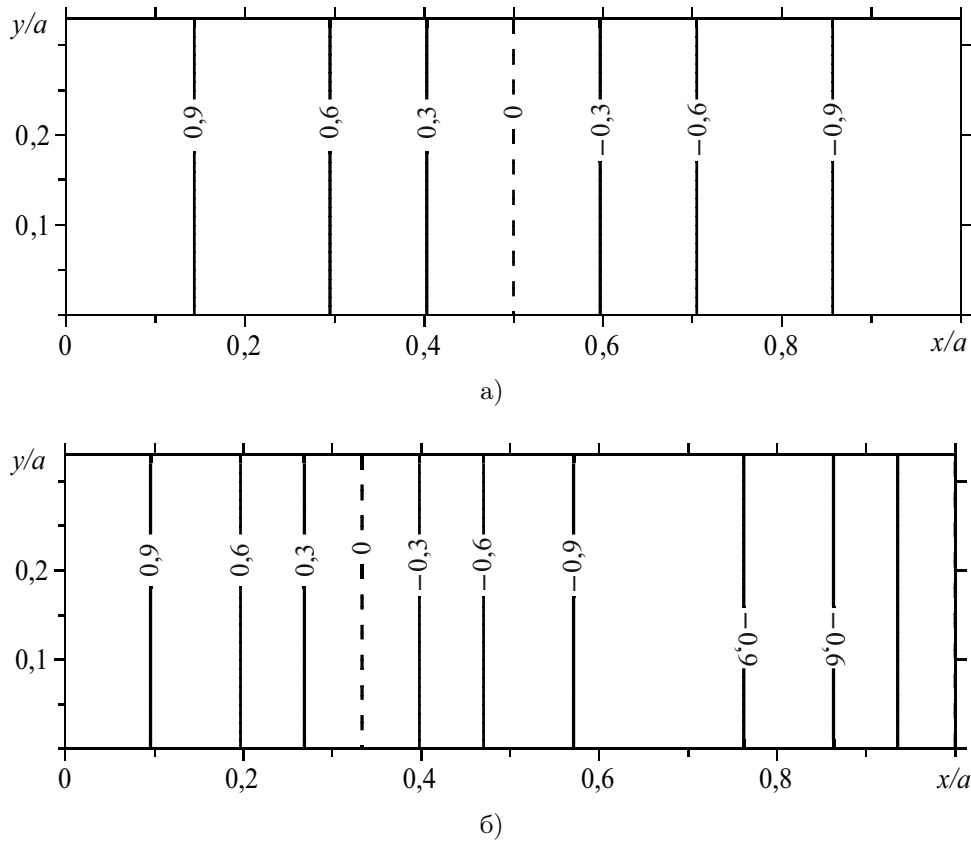


Рис. 2. Изолинии уровня, мода ($k = 1, m = 0$), $a = 3b$; $\zeta_{010} = 1$ м для момента времени $t = 0$;
а) замкнутый бассейн, б) бассейн с открытым входом

данном случае волновые течения всегда параллельны оси x . Из выражения (1.27), найдем амплитуду составляющей скорости волнового течения u

$$u_{0k0} = \zeta_{0k0} \sqrt{\frac{g}{h}}. \quad (4.1)$$

Анализ формулы (4.1) показывает, что максимальная скорость волнового течения для продольных сейш не зависит ни от ширины бассейна b , ни от его длины a . Она прямо пропорциональна амплитуде начального отклонения свободной поверхности и обратно пропорциональна $\sqrt{h}$. Аналогичная закономерность имеет место для случая, когда бассейн замкнут [14].

Для поперечных сейш ($k = 0, m \neq 0$) из формулы (1.27) получим выражение для амплитуды u

$$u_{00m} = \zeta_{00m} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4m^2a^2}}, \quad (4.2)$$

а из (1.28) — выражение для амплитуды v

$$v_{00m} = \zeta_{00m} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{2ma}{\sqrt{b^2 + 4m^2a^2}}. \quad (4.3)$$

Анализ соотношений (4.2), (4.3) показывает, что амплитуды составляющих волновых скоростей u и v не равны нулю для всех допустимых значений m . При этом u_{0km} и v_{0km} обратно пропорциональны $\sqrt{h(b^2 + 4m^2a^2)}$, u_{0km} прямо пропорциональна b , v_{0km} — $2a$. Это существенно отличает сейши в бассейне с открытой границей от сейш в замкнутом бассейне, для которого амплитуды составляющих скорости $u_0 = 0$, а v_0 определяется формулой аналогичной (4.1) [14].

Для продольно-поперечных сейш ($k \neq 0, m \neq 0$) из (1.27), (1.28) следует, что амплитуды составляющих скорости u и v зависят от величин a, b, h . Также можно показать, что для сейш данного вида максимум модуля скорости волновых течений определяется по формуле

$$\max(|\mathbf{V}_{km}|) = \sqrt{\max(u_{0km}^2, v_{0km}^2)}.$$

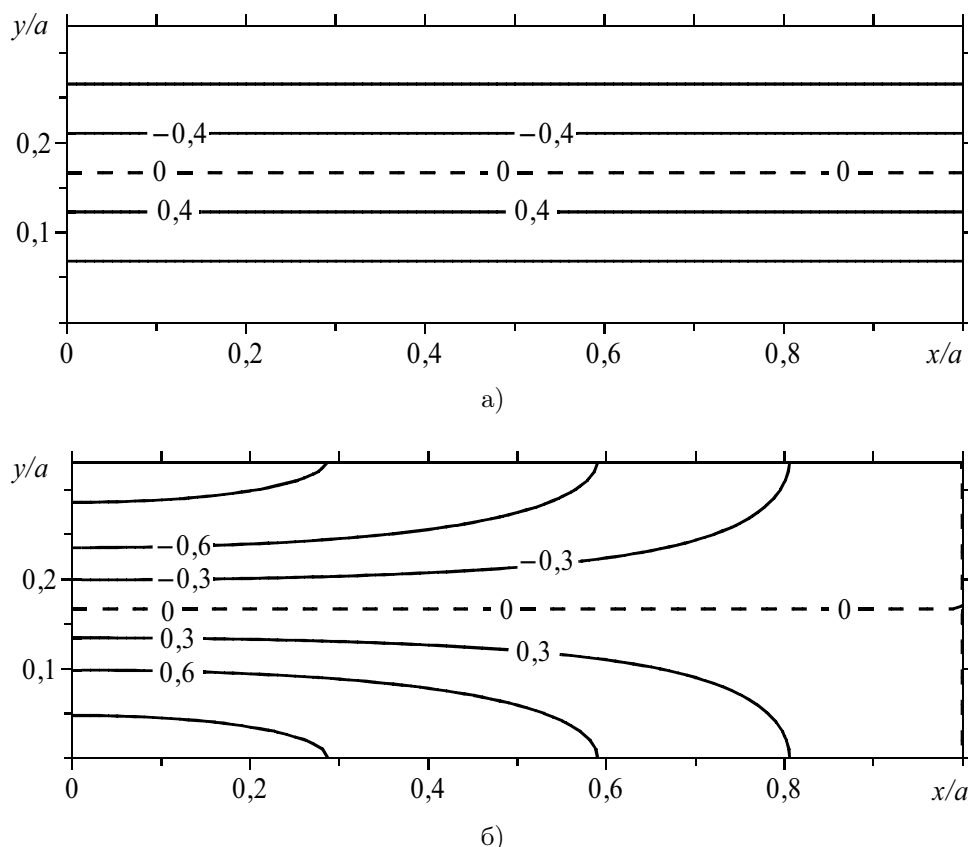


Рис. 3. Изолинии уровня, мода ($k = 0, m = 1$), $a = 3b$; $\zeta_{010} = 1$ м для момента времени $t = 0$;
а) замкнутый бассейн, б) бассейн с открытым входом

В случае, когда $k = 0, m = 0$, в бассейне с открытым входом возникает так называемая мода Гельмгольца [1, 3], отсутствующая в спектре собственных колебаний жидкости в замкнутом бассейне. Из формулы (1.28) следует, что для этой моды амплитуда составляющей скорости $v_0 = 0$. На основании выражения (1.27) находим, что u_0 определяется формулой (4.1). Таким образом, волновое течение для моды Гельмгольца всегда направлено параллельно оси x и его максимальная скорость не зависит от ширины и длины бассейна. Она прямо пропорциональна амплитуде начального отклонения свободной поверхности и обратно пропорциональна $\sqrt{h}$. В англоязычной литературе моду Гельмгольца часто называют *pumping mode* [3]. Это связано с тем, что данная мода действует как насос. Одну половину периода жидкость «выкачивается» из бассейна, при этом понижается уровень в окрестности стенки $(0, y)$, расположенной напротив входа в бассейн. Другую половину периода жидкость будет «закачиваться» в бассейн и уровень жидкости возле этой стен-

ки будет возрастать. Наибольшие скорости течений будут иметь место на открытой границе бассейна.

5. Оценки параметров сейшевых колебаний для Ахтарского лимана

Конкретные расчеты параметров сейш были проведены для модельного бассейна, аппроксимирующего Ахтарский лиман, представляющего собой мелководный залив Азовского моря (Приморско-Ахтарский район) и входящего в одноименную группу Ахтарско-Гривенской системы Кубанских лиманов. Ахтарский лиман — типичная береговая лагуна, соединенная с морем широким проходом. Максимальная глубина лимана составляет 2 м. В лимане находятся нерестилища промысловых рыб и значительные запасы лечебной грязи. Вокруг хозяйственного использования этого лимана продолжительное время ведутся споры. Есть проекты строительства порта, что может нанести серьезный экологический вред данному уникальному водоему. Исследований сейшевых колебаний в Ахтарском ли-

Таблица 1. Периоды сейш в модельном бассейне, аппроксимирующем Ахтарский лиман и максимальные значения модуля скорости волновых течений для начального отклонения уровня равного 10 см

Номер моды	Период, мин	k	m	$\max(\mathbf{V}_{km})$, м/с
1	191,3	0	0	0,26
2	63,8	1	0	0,26
3	38,3	2	0	0,26
4	30,1	0	1	0,25
5	27,5	1	1	0,23
6	23,8	2	1	0,20
7	15,2	0	2	0,25
8	14,8	1	2	0,25
9	14,4	2	2	0,24

мане ранее не проводились. Будем аппроксимировать Ахтарский лиман прямоугольным бассейном со сторонами $a = 11$ км, $b = 3,5$ км и глубиной $h = 1,5$ м.

В табл. 1 приведены рассчитанные по формуле (1.25) периоды первых 9 мод сейш, а также максимальные значения модуля скорости сейшевых течений для случая, когда начальное отклонение уровня равно 10 см.

Как видно, период моды Гельмгольца в модельном бассейне, аппроксимирующем Ахтарский лиман, равен 191,3 мин. При этом он в три раза больше периода одноузловой продольной сейши, равного 63,8 мин. В таблице также приведены максимальные значения модуля скорости волновых течений для начального возвышения уровня, равного 10 см. Скорости течений в лимане, вызванных сейшами, могут достигать значительных величин. Наибольшие скорости течений, равные 26 см/с, имеют продольные сейши.

Выводы

Сравнительный анализ характеристик сейшевых колебаний в замкнутом бассейне с характеристиками сейшевых колебаний в бассейне с открытой границей показал следующее.

1. Периоды сейшевых колебаний в прямоугольном бассейне постоянной глубины с открытым входом всегда меньше периодов соответствующих мод в замкнутом бассейне таких же размеров и глубины.

2. Величины периодов поперечных сейш ($k = 0$, $m \neq 0$) в бассейне с открытой границей зависят и от ширины бассейна, и от его

длины. В замкнутом бассейне периоды поперечных сейш не зависят от длины бассейна.

3. Поперечные сейши ($k = 0$, $m \neq 0$) в бассейне с открытой границей двумерны, а в замкнутом бассейне одномерны. Скорость волновых течений для поперечных сейш в бассейне с открытым входом зависит от его горизонтальных размеров и глубины. В замкнутом бассейне скорость волновых течений не зависит от горизонтальных размеров бассейна и обратно пропорциональна $\sqrt{h}$.

4. Узловые линии уровня для продольных сейш ($k \neq 0$, $m = 0$) в бассейне с открытой границей сдвинуты внутрь бассейна по сравнению с положением узловых линий в замкнутом бассейне.

5. При $k = 0$, $m = 0$ в бассейне с открытым входом имеет место мода Гельмгольца, отсутствующая в спектре собственных колебаний жидкости в замкнутом бассейне. Волновое течение для этой моды всегда направлено перпендикулярно входу в бассейн и его максимальная скорость не зависит от ширины и длины бассейна. Она прямо пропорциональна амплитуде начального отклонения свободной поверхности и обратно пропорциональна $\sqrt{h}$. Наибольшие скорости течений будут иметь место на открытой границе бассейна

Свойства сейшевых колебаний общие как для бассейна с открытой границей, так и для замкнутого бассейна.

1. Периоды продольных сейш ($k \neq 0$, $m = 0$) не зависят от ширины бассейна.

2. Узловые линии уровня параллельны одной из осей координат. Положение узловых линий в случае поперечных сейш в бассейне

с открытой границей и в замкнутом бассейне совпадают.

3. Изолинии уровня в бассейнах обоих типов для продольных сейш всегда параллельны друг другу и стенке бассейна $x = 0$.

4. Максимальные скорости волновых течений имеют продольные сейши ($k \neq 0, m = 0$). При этом их величины одинаковы для всех мод и не зависят ни от ширины бассейна, ни от его длины. Они прямо пропорциональны амплитуде начального отклонения свободной поверхности и обратно пропорциональны корню квадратному из глубины бассейна. Наименьшие скорости течений имеют продольно-поперечные сейши.

Литература

1. Лабзовский Н.А. Непериодические колебания уровня моря. Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1971. 238 с.
2. Океанографическая энциклопедия. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 304 с.
3. Rabinovich A.B. Seiches and Harbor Oscillations (Chapter 9) / In "Handbook of Coastal and Ocean Engineering" / Ed. Y.C. Kim. Singapoure: World Scientific Publ., 2009. P. 193–236.
4. Advances in Hydrosiences / Ed. Ven Te Chow. New York and London: Academic Press, 1972. Vol. 8. 359 p.
5. Manilyuk Yu.V., Cherkesov L.V. The influence of the gulf's geometry on seiche oscillations in an enclosed basin // Physical oceanography. 1997. Vol. 8, No. 4. P. 217–227.
6. Железняк М.И., Кантаржи И.Г., Сорокин М.В., Поляков А.И. Резонансные характеристики акваторий морских портов // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5(57). С. 3–19.
7. Ковалев Д.П. Натурные эксперименты и мониторинг инфрагравитационных волн для диагностики опасных морских явлений в прибрежной зоне на примере акваторий Сахалино-Курильского региона. Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Южно-Сахалинск, 2015. 304 с.
8. Зырянов В.Н., Чебанова М.К. Гидродинамические эффекты при вхождении приливных волн в эстуарии // Водные ресурсы. 2016. Т. 43, № 4. С. 379–386.
9. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартмиев С.М. Введение в гидродинамику волн. Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1992. 264 с.
10. Рабинович Б.И., Левянт А.С. Численное решение задачи расчета сейш на основе RT-алгоритма конформного отображения // Природные катастрофы и стихийные бедствия в

Дальневосточном регионе. 1990. Т. 2. С. 328–342.

11. Рабинович А.Б. Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение. СПб.: Гидрометеиздат, 1993. 325 с.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
13. Праудмен Дж. Динамическая океанография. М.: Иностранная литература, 1957. 418 с.
14. Manilyuk Yu.V., Cherkesov L.V. Investigation of Free Liquid Oscillations in a Bounded Basin Representing an Approximate Model of the Sea of Azov // Physical oceanography. 2016. Vol. 2. P. 14–23.

References

1. Labzovskiy N.A. *Neperiodicheskie kolebaniya urovnya moray* [Non-periodic sea level fluctuations]. Leningrad, Gidrometeorologicheskoe izdatelstvo Publ., 1971. 238 p. (In Russian)
2. *Okeanograficheskaya entsiklopediya*. [Oceanographic encyclopedia]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1980. 304 p. (In Russian)
3. Rabinovich A.B. Seiches and harbor oscillations (Chapter 9). In Kim Y.C. (ed.) *Handbook of Coastal and Ocean Engineering*. Singapoure, World Scientific Publ., 2009, pp. 193–236.
4. Chow, Ven Te (ed.) *Advances in Hydrosiences*. New York and London, Academic Press, 1972, vol. 8. 359 p.
5. Manilyuk Yu.V., Cherkesov L.V. The influence of the gulf's geometry on seiche oscillations in an enclosed basin. *Physical oceanography*, 1997, vol. 8, no. 4, pp. 217–227.
6. ZHeleznyak M.I., Kantarzh I.G., Sorokin M.V., Polyakov A.I. Rezonansnye harakteristiki akvatorij morskikh portov [Resonance properties of seaport water areas]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering], 2015, no. 5(57), pp. 3–19. DOI: 10.5862/MCE.57.1 (In Russian).
7. Kovalev D.P. *Naturnye ehksperimenty i monitoring infragravitacionnyh voln dlya diagnostiki opasnyh morskikh yavlenij v pribrezhnoj zone na primere akvatorij Sahalino-Kuril'skogo regiona* [Natural experiments and monitoring of infragravity waves for the diagnostics of dangerous marine phenomena in the coastal zone by the example of the water areas of the Sakhalin-Kuril region]. Diss. Dr. phys. and math. sci. YUzhno-Sahalinsk, 2015. 304 p. (In Russian).
8. Zyryanov V.N., Chebanova M.K. Gidrodinamicheskie efekty pri vhozhdenii prilivnyih voln v estuarii [Hydrodynamic effects at the entry of tidal waves into estuaries]. *Vodnyie resursyi* [Water Resources], 2016, vol. 43, no. 4, pp. 379–386. DOI: 10.1134/S0097807816040187. (In Russian).

9. Cherkesov L.V., Ivanov V.A., Hartiev S.M. *Vvedenie v gidrodinamiku voln* [Introduction to hydrodynamics and wave theory]. Sankt-Peterburg.: Gidrometeoizdat Publ., 1992. 264 p. (In Russian).
10. Rabinovich B.I., Levyant A.S. Chislennoe reshenie zadachi rascheta sejsh na osnove RT-algoritma konformnogo otobrazheniya [Numerical solution of the problem of seiche calculation based on RT-algorithm of conformal mapping]. *Prirodnye katastrofy i stihijnye bedstviya v Dal'nevostochnom regione* [Natural disasters and natural disasters in the Far East region], 1990, vol. 2, pp. 328–342. (In Russian).
11. Rabinovich A.B. *Dlinnyie gravitatsionnyie volny v okeane* [Long ocean gravity waves: trapping, resonance, leaking]. S.-Peterburg, Gidrometeoizdat Publ., 1993. 325 p. (In Russian).
12. Vladimirov V.S. *Urvneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p. (In Russian).
13. Proudmen J. *Dinamicheskaya okeanografiya* [Dynamical oceanography]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1957. 418 p. (In Russian).
14. Manilyuk Yu.V., Cherkesov L.V. Investigation of Free Liquid Oscillations in a Bounded Basin Representing an Approximate Model of the Sea of Azov. *Physical oceanography*, 2016, vol. 2, pp. 14–23.