ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2017. №4. Вып. 1. С. 13–19

Математика

УДК 517.546.1

ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ И ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

Ярёменко Л. А., Гамаюнова Д. Ю.

THE DOMAINS OF UNIVALENCE AND STARLIKENESS OF CERTAIN CLASSES OF REGULAR FUNCTIONS

Yaremenko L. A., Gamayunova D. Yu.

Kuban State University, Kranodar, 350040, Russia
e-mail: yaremenko@math.kubsu.ru

Abstract. The problem of finding the exact radius of univalence and the starlikeness of functions regular in the unit disc defined by integral representations is considered. A generalized interpretations of a whole series of problems that are encountered separately in the literature is given. In this paper within the presented theorem fairly general conditions for estimating the radius of starlikeness are established. The proof of the theorem reduces to finding a lower bound for a functional that depends on the value of the function and its derivative on the class of functions regular in the unit disc that have a positive real part in the disc. When the integral operator is specified and a special choice of functions regular in the disc is obtained, a number of corollaries of the theorem are obtained. The theorem and its consequences generalize similar results obtained earlier by different methods. An explicit expression is given for realizing estimates of the radius of extremal functions.

Keywords: regular function, univalent starlikeness function, starlikeness functions of order α, estimates of the radius, radius of starlikeness, extremal functions, integral representations.

Введение

Установим методами геометрической теории функций достаточные условия, при которых регулярные в единичном круге

$$E = \{z : |z| < 1\}$$

функции, определяемые интегральными операторами, однолистно отображают круг $|z| < r$, $0 < r < 1$ на звездообразные области.

Определение 1. Обозначим через S^* класс регулярных в круге E функций $w = f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, однолистно отображающих круг E на области, звездообразные относительно точки $w = 0$.

Ливингстон установил [1], что, если $F(z) \in S^*$, то функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \frac{2}{z}\int\limits_0^z f(t)\,\mathrm{d}t,$$

однолистно отображает круг $|z| < 1/2$ на звездообразную область.

Обобщая результат Ливингстона, Бернарди [2] доказал, что при $F(z) \in S^*$ функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \frac{c+1}{z^c}\int\limits_0^z t^{c-1} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad c = 1, 2, 3, \ldots,$$

однолистно отображает круг

$$|z| < \frac{c+1}{2+\sqrt{3+c^2}}$$

на звездообразную область.

Аналогичные задачи разными методами ставились и решались в работах [3–8].

Дадим в настоящей работе обобщенную трактовку целого ряда такого рода задач.

Изучение геометрических характеристик регулярных функций осуществляется редукцией в класс регулярных в круге $E =$

Ярёменко Людмила Анфимовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: yaremenko@math.kubsu.ru.

Гамаюнова Дарья Юрьевна, студентка Кубанского государственного университета; e-mail: dasha135@inbox.ru.

$= \{z : |z| < 1\}$ функций $p(z)$, $p(0) = 1$, принимающих значения из правой полуплоскости.

Определение 2. Для произвольно взятых чисел A и B, $-1 \leqslant B < A \leqslant 1$ обозначим через $P_n(A, B)$ [9] класс регулярных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций

$$p(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots, \quad n \in \mathbb{N},$$

представимых в виде

$$p(z) = \frac{1 + Az^{n-1}\omega(z)}{1 + Bz^{n-1}\omega(z)},$$

где $\omega(z)$ — некоторая регулярная в круге E функция, $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$.

При $n = 1$, $A = 1$, $B = -1$ получаем известный класс P, регулярных в круге E функций $p(z)$, $p(0) = 1$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p(z) > 0$.

Определение 3. Обозначим через $S_n^*(A, B)$ класс регулярных в круге E функций

$$f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots, \quad n \in \mathbb{N},$$

для которых выполняется условие

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P_n(A, B).$$

При $n = 1$, $A = 1 - 2\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $B = -1$ получаем класс $S^*_{[\alpha]}$ звездообразных функций порядка α. Отметим, что функции класса $S^*_{[\alpha]}$ удовлетворяют в круге E условию

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha.$$

Очевидно, что $S^* = S^*_{[0]}$.

Теорема 1. Пусть $F(z) \in S_n^*(A_1, B)$, $-1 \leqslant B < A_1 \leqslant 1$,

$$g(z) \in S_n^*(A_2, B), \quad -1 \leqslant B < A_2 \leqslant 1,$$

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \in R_+^4, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

$$D = \frac{\beta_1 A_1 + \beta_4 A_2 + B(\beta_2 - \beta_1 - \beta_4)}{\beta_2},$$

$$\beta_2 \geqslant \frac{\beta_1(A_1 - B) + \beta_4(A_2 - B)}{1 - B},$$

а регулярная в круге E функция $\phi(z)$, $\phi(0) = 1$, имеет точную оценку

$$\operatorname{Re} \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} \leqslant a(r), \quad a(r) \geqslant 0, \quad |z| = r < 1.$$

Тогда функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \left\{\beta_2 \frac{z^{\beta_1 + \beta_4 - \beta_2}}{g^{\beta_4}(z)} \times \int_0^z t^{\beta_2 - 1} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta_3} \phi(t)\, dt\right\}^{\frac{1}{\beta_1}}, \quad (1)$$

является звездообразной порядка α в круге $|z| < r^*$, где r^* — наименьший положительный корень уравнения

$$\beta_3(1 - \alpha) - \beta_2 + \sigma(r) - a(r) = 0. \quad (2)$$

Функция $\sigma(r)$ при $R \geqslant R_0$ имеет вид

$$\sigma_1(r) = \frac{\beta_2 D^2 r^{2n} - [n(D - B) + 2\beta_2 D] r^n + \beta_2}{(1 - Dr^n)(1 - Br^n)},$$

а при $R \leqslant R_0$ — определяется формулой

$$\sigma_2(r) = \frac{2\sqrt{(a - nD)(b - nB + \beta_2(D - B))}}{D - B} + \frac{n(D + B) - 2c}{D - B}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a = \frac{1 - D^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)}, \quad b = \frac{1 - B^2 r^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)},$$

$$c = \frac{1 - DBr^{2n}}{r^{n-1}(1 - r^2)},$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{a - nD}{b - nB + \beta_2(D - B)}},$$

$$R = \frac{1 - Dr^n}{1 - Br^n}.$$

Результат точный.

Доказательство. Из (1) имеем

$$F^{\beta_1} z^{\beta_2 - \beta_1 - \beta_4} g^{\beta_4}(z) = \beta_2 \int_0^z t^{\beta_2 - 1} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta_3} \phi(t)\, dt.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\beta_1 F^{\beta_1-1}(z)\,F'(z)\,z^{\beta_2-\beta_1-\beta_4}g^{\beta_4}(z)+ \\ +F^{\beta_1}(z)\,(\beta_2-\beta_1-\beta_4)\,z^{\beta_2-\beta_1-\beta_4-1}g^{\beta_4}(z)+ \\ +\beta_4 F^{\beta_1}(z)\,z^{\beta_2-\beta_1-\beta_4}g^{\beta_4-1}(z)\,g'(z)= \\ =\beta_2 z^{\beta_2-1}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\beta_3}\phi(z)\,.$$

Последнее соотношение преобразуем к виду

$$F^{\beta_1}(z)\,z^{-\beta_1-\beta_4}g^{\beta_4}(z)\,h(z)= \\ =\beta_2\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\beta_3}\phi(z)\,, \quad (3)$$

где

$$h(z)= \\ =\frac{\beta_2-\beta_1-\beta_4+\beta_1\frac{zF'(z)}{F(z)}+\beta_4\frac{zg'(z)}{g(z)}}{\beta_2}. \quad (4)$$

По определению класса $S_n^*(A,B)$ имеем

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{1+A_1 z^{n-1}\omega(z)}{1+Bz^{n-1}\omega(z)},$$

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\frac{1+A_2 z^{n-1}\omega(z)}{1+Bz^{n-1}\omega(z)},$$

что позволяет записать (4) в виде

$$h(z)=\frac{1+Dz^{n-1}\omega(z)}{1+Bz^{n-1}\omega(z)},$$

где $\omega(z)$ — некоторая регулярная в круге E функция,

$$\omega(0)=0, \quad |\omega(z)|<1,$$

$$D=\frac{\beta_1 A_1+\beta_4 A_2+B(\beta_2-\beta_1-\beta_4)}{\beta_2}.$$

Нетрудно проверить, что $-1\leqslant B<D\leqslant 1$. Таким образом, $h(z)\in P_n(D,B)$.

Дифференцируя равенство (3) логарифмически, получим

$$\beta_3\frac{zf'(z)}{f(z)}=\beta_3-\beta_1-\beta_4+\beta_1\frac{zF'(z)}{F(z)}+ \\ +\beta_4\frac{zg'(z)}{g(z)}+\frac{zh'(z)}{h(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}. \quad (5)$$

Из (4) находим

$$\beta_1\frac{zF'(z)}{F(z)}+\beta_4\frac{zg'(z)}{g(z)}=\beta_2 h(z)-\beta_2+\beta_1+\beta_4.$$

Учитывая это соотношение, равенство (5) запишем в виде

$$\beta_3\frac{zf'(z)}{f(z)}=\beta_3-\beta_2+\beta_2 h(z)+\frac{zh'(z)}{h(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}.$$

Пусть $0\leqslant\alpha<1$. Тогда

$$\beta_3\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right)= \\ =\beta_3(1-\alpha)-\beta_2+\beta_2 h(z)+\frac{zh'(z)}{h(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\beta_3\left(\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right)\geqslant\beta_3(1-\alpha)-\beta_2+ \\ +\operatorname{Re}\left\{\beta_2 h(z)+\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\}-a(r)\,.$$

Используя теперь установленную в [9] нижнюю оценку $\sigma(r)$ функционала

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda h(z)+\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\}$$

на классе $P_n(D,B)$ при $\lambda=\beta_2$, получим

$$\beta_3\left(\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right)\geqslant \\ \geqslant\beta_3(1-\alpha)-\beta_2+\sigma(r)-a(r)\,. \quad (6)$$

Из (6) следует, что

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha$$

в круге $|z|<r$, если в этом круге выполняется условие

$$\beta_3(1-\alpha)-\beta_2+\sigma(r)-a(r)>0.$$

Поэтому задача определения радиуса звездообразности порядка α функции $f(z)$ сводится к нахождению наименьшего положительного корня уравнения

$$\beta_3(1-\alpha)-\beta_2+\sigma(r)-a(r)=0.$$

Результат точный. □

Замечание 1. Способ доказательства теоремы 1 допускает полезное разбиение выражения $\beta_3\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right)$ на слагаемые, одно из которых есть

$$I(h)=\beta_2 h(z)+\frac{zh'(z)}{h(z)},$$

а другое — соотношение вида $\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}$. Поскольку по условию теоремы имеет место точная оценка

$$\operatorname{Re}\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\leqslant a(r),$$

то поставленная задача сводится к нахождению нижней оценки функционала $\operatorname{Re} I(h)$ на классе $P_n(D,B)$, что значительно упрощает доказательство.

Это дает возможность, специализируя выбор функций $\phi(z)$ и подклассов из $S_n^*(A,B)$, при конкретизации вектора $\boldsymbol{\beta}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}\in R_+^4$, получить ряд следствий теоремы 1.

Теорема 1 и ее следствия обобщают и уточняют многие известные результаты [1–6], полученные разными методами.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $F(z)\in S_{[\alpha]}^*$, $\beta_2\geqslant\beta_1(1-\alpha)$, для регулярной в круге $E=\{z:|z|<1\}$ функции $\phi(z)$, $\phi(0)=1$, справедлива точная оценка

$$\operatorname{Re}\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\leqslant a(r),\quad a(r)\geqslant 0,\quad |z|=r<1.$$

Тогда функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z)=\left\{\frac{\beta_2}{z^{\beta_2-\beta_1}}\int\limits_0^z t^{\beta_2-1}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta_1}\phi(t)dt\right\}^{\frac{1}{\beta_1}},$$

является звездообразной порядка α в круге $|z|<r^*$, где r^* — наименьший положительный корень уравнения

$$\left(2\tilde\beta_1-\beta_2\right)\left(\tilde\beta_1+a(r)\right)r^2-\left[\tilde\beta_1\left(\tilde\beta_1+1\right)-\left(\tilde\beta_1-\beta_2\right)a(r)\right]r+\beta_2\left(\tilde\beta_1-a(r)\right)=0.\quad (7)$$

Результат точный.

Доказательство. В данном случае

$$A=1-2\alpha,\quad 0\leqslant\alpha<1,\quad B=-1,\quad n=1,$$

$$D=\frac{2\tilde\beta_1}{\beta_2}-1,\quad \tilde\beta_1=\beta_1(1-\alpha),\quad \beta_1=\beta_3,$$

$$a=\frac{1-D^2r^2}{1-r^2},\quad c=\frac{1+Dr^2}{1-r^2},\quad b=1.$$

При этих условиях из теоремы 1 находим

$$\sigma_2(r)=\frac{\beta_2}{\tilde\beta_1}\sqrt{4c\frac{\left(\beta_2-\tilde\beta_1\right)\left(1+\tilde\beta_1\right)}{\beta_2}}-c-\frac{\beta_2-\tilde\beta_1}{\tilde\beta_1}.$$

Обозначим

$$d=\frac{\left(\beta_2-\tilde\beta_1\right)\left(1+\tilde\beta_1\right)}{\beta_2}\geqslant 0.$$

Тогда при любом $r\in(0;1)$ выполняется неравенство

$$-a(r)+\tilde\beta_1-\beta_2+\sigma_2(r)=-a(r)-\frac{\beta_2}{\tilde\beta_1}\frac{(c-d)^2}{\sqrt{4dc}+c+d}<0.$$

Поэтому искомый радиус звездообразности находится из уравнения (2), в котором следует положить

$$\sigma_1(r)=\frac{\left(2\tilde\beta_1-\beta_2\right)^2r^2-2\left[\tilde\beta_1+2\tilde\beta_1\beta_2-\beta_2^2\right]r+\beta_2^2}{\left[\beta_2-\left(2\tilde\beta_1-\beta_2\right)r\right](1+r)}.$$

После несложных преобразований приходим к уравнению (7). □

Весьма частным случаем теоремы 1 является следующий результат, установленный в работе [4].

Определение 4. Обозначим через S^0 класс регулярных в круге $|z|<1$ функций $w=f(z)$, нормированных условиями $f(0)=1$, $f'(0)=1$, однолистно отображающих круг $|z|<1$ на выпуклые области.

Следствие 2. Пусть $F(z) \in S^*$, $g, h \in S^0$, $p \in P$. Тогда функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \frac{2}{z}\int\limits_0^z f(z)\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right)^\gamma p(z)\,\mathrm{d}t, \quad \gamma > 0,$$

является однолистной в круге

$$|z| < \frac{2\gamma + 5 - \sqrt{4\gamma^2 + 20\gamma + 17}}{4}$$

и отображает этот круг на звездообразную область.

Результат точный. Экстремальной является функция

$$f(z) = \frac{z(1-z)^{\gamma+1}}{(1+z)^{\gamma+4}}.$$

Доказательство. Положим в следствии 1

$$\beta_2 = 2, \quad \beta_1 = 1, \quad \alpha = 0,$$

$$\phi(z) = \left(\frac{g(z)}{h(z)}\right)^\gamma p(z).$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} = \\ = \gamma\left(\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} - \operatorname{Re}\frac{zh'(z)}{h(z)}\right) + \operatorname{Re}\frac{zp'(z)}{p(z)}.$$

Используя хорошо известные экстремальные оценки для функций классов P и S^0 [4], получим при $|z| = r < 1$

$$\operatorname{Re}\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} \leqslant \gamma\left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r}\right) + \frac{2r}{1-r^2} = \\ = \frac{2(\gamma+1)r}{1-r^2} = a(r).$$

Тогда уравнение (7) примет вид

$$2r^2 - (2\gamma+5)r + 1 = 0.$$

Решая его относительно r, находим искомый радиус звездообразности. □

При $\gamma = 0$ значение радиуса звездообразности $(5 - \sqrt{17})/4$ установлено в работе [5].

Отметим, что в работе [4] дано иное, довольно громоздкое доказательство этого результата, не указано также явное выражение для экстремальной функции.

Следствие 3. Пусть $F(z) \in S^*_{[\alpha]}$, $\beta_2 \geqslant \beta_1(1-\alpha)$. Тогда функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \left\{\frac{\beta_2}{z^{\beta_2-\beta_1}}\int\limits_0^z t^{\beta_2-1}\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\beta_1}\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{\beta_1}},$$

является звездообразной порядка α в круге $|z| < r^*$, где

$$r^* = \frac{\beta_2}{1 + \beta_1(1-\alpha) + \sqrt{\psi}},$$

$$\psi = (\beta_1(1-\alpha)+1)^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1(1-\alpha)\beta_2.$$

Результат точный.

Доказательство. В данном случае уравнение (7) преобразуется к виду

$$(2\beta_1(1-\alpha) - \beta_2)r^2 - \\ - 2(\beta_1(1-\alpha)+1)r + \beta_2 = 0,$$

откуда получаем формулу для радиуса звездообразности. □

Путем дальнейшей конкретизации оператора (1) получаем следующий результат.

Следствие 4. Пусть $F(z) \in S^*_{[\alpha]}$. Тогда функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \frac{\beta_2}{z^{\beta_2-1}}\int\limits_0^z t^{\beta_2-2}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

является звездообразной порядка α в круге $|z| < r^*$, где

$$r^* = \\ = \frac{\beta_2}{2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta_2^2 + 4(1-\alpha) - 2(1-\alpha)\beta_2}}.$$

Результат точный.

При $\beta_2 = 2, 3, \ldots$ получаем результат, установленный в работе [6].

Следствие 5. Пусть $F(z) \in S^*$. Тогда функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \frac{\beta_2}{z^{\beta_2-1}}\int\limits_0^z t^{\beta_2-2}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

является однолистной в круге

$$|z| < \frac{\beta_2}{2 + \sqrt{4 + \beta_2^2 - 2\beta_2}}$$

и отображает этот круг на звездообразную область.

Результат точный. Экстремальной является функция

$$f(z) = \frac{z\left[\beta_2 + (\beta_2 - 2)\, z\right]}{\beta_2\,(1-z)^3}.$$

Из следствия 5 вытекают результаты, установленные при $\beta_2 = 2$ Ливингстоном [1], а при $\beta_2 = c+1$, $c = 1, 2, 3, \ldots,$ — Бернарди [2].

Следствие 6. Если $F\,(z) \in S^*$, то функция $f(z)$, определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \frac{c+1}{z^c} \int\limits_0^z t^{c-1} f(t)\, \mathrm{d}t, \quad c = 1, 2, 3, \ldots,$$

однолистно отображает круг

$$|z| < \frac{c+1}{2 + \sqrt{3 + c^2}}$$

на звездообразную область.

Результат точный. Экстремальной является функция

$$f(z) = \frac{1}{1+c} \frac{z\left[(1+c) + (c-1)\, z\right]}{(1-z)^3}.$$

Следствие 7. Если $F\,(z) \in S^*$, то функция $f(z)$,определяемая интегральным оператором

$$F(z) = \frac{2}{z} \int\limits_0^z f(t)\, \mathrm{d}t,$$

однолистно отображает круг $|z| < 1/2$ на звездообразную область.

Результат точный. Экстремальной является функция

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^3}.$$

Заключение

В работе исследованы интегральные операторы в комплексной области. Получены условия, при которых регулярные в единичном круге функции, определяемые интегральными операторами, однолистно отображают круг $|z| < r$, $0 < r < 1$ на звездообразные области.

Помимо приложений теоремы 1, указанных в настоящей работе, возможны и многие другие. Можно получить аналог этой теоремы в предположении, что $-1 \leqslant A < B \leqslant 1$, и тем самым обобщить ещё ряд известных результатов.

Теорема 1 может быть значительно обобщена, поскольку указанная схема доказательства позволяет рассматривать операторы более общего вида. Применяя метод данной работы, можно установить также области однолистности и звездообразности некоторых классов мероморфных функций, определяемых интегральными операторами.

Полученные в работе результаты содействуют дальнейшей разработке теории экстремальных задач в классах регулярных функций.

Литература

1. *Livingcton A.E.* On the radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. No. 2. P. 352–357.
2. *Bernardi S.D.* The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 24. No. 2. P. 312–318.
3. *Bajpai S.K., Dwivedi S.P.* Certain convexity theorems for univalent analytic functions // Publ. de L'institut Mathemtique. 1980. Vol. 28. P. 5–11.
4. *Causey W.M., White W.L.* Starlikeness of certain functions with integral representations // J. Math. Analysis and Appl. 1978. Vol. 64. No. 2. P. 458–466.
5. *Calys E. G.* The radius of univalence and starlikeness of some classes of regular functions // Compos. Math. 1971. Vol. 23. No. 4. P. 467–470.
6. *Bajpai S.K., Srivastava R.S.* On the radius of convexity and starlikentss of univalent functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 32. No. 1. P. 153–160.
7. *Ярёменко Л.А.* Радиусы звездности некоторых классов регулярных в круге функций. Кубан. гос. ун-т. Краснодар. Деп. в ВИНИТИ 26.03.09. № 168-В 2009. 10 с.

8. *Karunakaran V.* Certain classes of regular univalent functions // Pacific J. Math. 1975. Vol. 61. No. 1. P. 173–182.
9. *Ярёменко Л.А.* Оценки одного функционала на специальных классах регулярных функций // Кубан. гос. ун-т. Краснодар. Деп. в ВИНИТИ 28.10.88. № 7738-88. 15 с.

References

1. Livingcton A.E. On the radius of univalence of certain analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1966, vol. 17, no. 2, pp.352–357.
2. Bernardi S.D. The radius of univalence of certain analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1970, vol. 24, no. 2, pp.312–318.
3. Bajpai S.K., Dwivedi S.P. Certain convexity theorems for univalent analytic functions. *Publ.de L'institut Mathematique*, 1980, vol. 28. pp. 5–11.
4. Causey, W.M., White, W.L. Starlikeness of certain functions with integral representations. *J. Math. Analysis and Appl.,* 1978, vol. 64, no. 2, pp. 458–466.
5. Calys E. G. The radius of univalence and starlikeness of some classes of regular functions. *Compos. Math.* 1971, vol. 23, no. 4, pp. 467–470.
6. Bajpai S.K., Srivastava R.S. On the radius of convexity and starlikentss of univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1972, vol. 32, no. 1, pp. 153–160.
7. Yaremenko L.A. *Radiusy zvezdnosti nekotorykh klassov regulyarnykh v kruge funktsiy* [The radiuses of the starlikeness of some classes of regular in the disk functions]. Krasnodar, Kuban State University, 2009, Available from VINITI, no. 168–B 2009. 10 p. (In Russian)
8. Karunakaran V. Certain classes of regular univalent functions. *Pacific J. Math.,* 1975, vol. 61, no. 1, pp. 173–182.
9. Yaremenko L.A. *Otsenki odnogo funktsionala na spetsialnykh klassakh regulzrnykh funktsiy* [Assessments of a single functional on special classes of regular functions]. Krasnodar, Kuban State University, 1988, Available from VINITI, no. 7738–88. 10 p. (In Russian)

Статья поступила 21 ноября 2017 г.