ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2017. №4. Вып. 1. С. 20–29

Механика

УДК 539.3

О ДЕФЕКТАХ ПРИ ЖЕСТКОМ СЦЕПЛЕНИИ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ С ОСНОВАНИЕМ И ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Бабешко О. М., Бабешко В. А., Евдокимова О. В.

ABOUT DEFECTS IN THE RIGID CONTACT OF LITHOSPHERIC PLATES TO THE BASEMENT AND ARBITRARY HARMONIC INFLUENCES

Babeshko O. M.*, Babeshko V. A.*,**, Evdokimova O. V.**

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
** Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The existence of hidden defects, which are not observed visually, in coatings of nanomaterials, in seismology and in materials science is investigated. A method of investigation of such defects in coatings, based on a topological approach is developed. An analysis of defects is given using the example of an investigation of the stress-strain state of a block structure consisting of two-dimensional horizontally disposed different-type blocks contacting along the boundaries between themselves. The block structure is located on the surface of a three-dimensional linearly deformable substrate and is rigidly connected to it. The considered block structures are under arbitrary harmonic external influence. This is characteristic not only of nanocoatings, surface hardening of materials, but also of lithospheric plates, the investigation of the stress-strain state of which serves the purpose of obtaining information about the seismicity of the territories. The obtained results indicate that the hidden defects are actually new types of cracks, supplementing the known Griffiths-Irwin cracks. Unlike Griffiths-Irwin cracks, characterized by roundness and smoothness of boundaries, this particular type of cracks contains fractures of boundaries and visually more accurately describes crack boundaries, for example, in brittle materials such as, for example, glass.

Keywords: block element, factorization, topology, integral and differential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems, bodies with coverings, hidden defects.

1. Определяющие уравнения

Рассмотрим случай гармонических воздействий на поверхность пластин, жестко сцепленных с основанием. После сокращения временного множителя $e^{-i\omega t}$ уравнения граничной задачи для пластин представимы в виде [1–3], где сформулирована постановка задачи и введены обозначеня, которых придерживаемся ниже

$$\mathbf{s}_b(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{pmatrix},$$

$$\xi_{11} = -\varepsilon_{5b} s_{1b}(x_1,x_2), \quad \xi_{22} = -\varepsilon_{5b} s_{2b}(x_1,x_2),$$
$$\xi_{33} = \varepsilon_{53b} s_{3b}(x_1,x_2),$$
$$s_{nb}(x_1,x_2) = (t_{nb} + g_{nb}),$$

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ, 0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088 по 0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323).

$$\psi_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{4b}\right) u_{1b},$$

$$\psi_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{4b}\right) u_{2b},$$

$$\psi_{33} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \varepsilon_{43b}\right) u_{3b},$$

$$\psi_{12} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) u_{2b},$$

$$\psi_{21} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) u_{1b}.$$

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений (1.1) имеет вид

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b = -\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & 0 \\ \eta_{21} & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\eta_{11} = (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2)U_{1b}, \quad \eta_{22} = (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2)U_{2b},$$

$$\eta_{33} = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$\eta_{12} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b}, \quad \eta_{21} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b},$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F}\mathbf{g}_b, \quad \mathbf{T}_b = \mathbf{F}\mathbf{t}_b,$$

$$\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}, \quad \mathbf{g}_b = \{g_{1b}, g_{2b}, g_{3b}\},$$

$$\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}, t_{3b}\}.$$

Здесь нормальные напряжения t_{3b} действует на плиту сверху и g_{3b} — снизу.

Аналогично напряжения g_{1b}, g_{2b} и t_{1b}, t_{2b} действуют в касательной плоскости, причем g_{2b} и t_{2b} — в направлении нормалей к торцам литосферных плит

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F}_2\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{g}_b,$$

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{F}_2\mathbf{t}_b \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{\mathrm{H}^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{\mathrm{H}^3},$$

$$Q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2-\nu_b)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right),$$

$$u_{3b}, \quad \frac{\partial u_{3b}}{\mathrm{H}\partial x_2},$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1-\nu_b^2)},$$

$$\varepsilon_{53b} = \frac{(1-\nu_b^2)12\mathrm{H}^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu},$$

$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1-\nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1+\nu_b),$$

$$\varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b}, \quad \varepsilon_{3b} = \frac{h_b^2}{12},$$

$$T_{x_1x_2} = \varepsilon_7\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

$$N_{x_2} = \varepsilon_8\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right),$$

$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1+\nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1-\nu^2)H},$$

$$g_{1b} = \mu_{0b}\left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}\right),$$

$$g_{2b} = \mu_{0b}\left(\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}\right),$$

$$\mu_{0b} = \frac{\mu_b}{\mathrm{H}}, \quad x_3 = 0, \quad \mathbf{g} = \{g_{1b}, g_{2b}\}.$$

Приняты следующие обозначения: μ_b — модуль сдвига, ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{t}_b$ — векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных (g_{1b}, g_{2b}, t_{1b}, t_{2b}) и вертикальных (g_{3b}, t_{3b}) воздействий соответственно, действующих по касательной к границе основания и по нормали к ней. в областях Ω_b. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Описанные в [1–3] граничные условия здесь сохраняются.

Для деформируемого основания применимы различные модели, в частности, описываемые соотношениями

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \times \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\langle\alpha, x\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta,$$

$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant 0), \quad \Omega_r(|x_1| \leqslant \infty;\ 0 \leqslant x_2),$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to \infty,$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}, \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{g}.$$

$\mathbf{g}$ — вектор касательных и нормальных напряжений под плитами на границе основания. Некоторые типы матриц-функций $\mathrm{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ оснований, называемые символом системы интегральных уравнений, приведены в [4] и даются матрицей-функцией вида

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N & \alpha_1\alpha_2(M-N) & i\alpha_1 P \\ \alpha_1\alpha_2(M-N) & \alpha_1^2 N + \alpha_2^2 M & i\alpha_2 P \\ -i\alpha_1 P & -i\alpha_2 P & K \end{pmatrix}.$$

Матрица (1.2) граничной задачи является блочно-диагональной, состоящей из расположенной на диагонали матрицы второго порядка, представляющей матричный или векторный оператор, и отдельного скалярного оператора. Поскольку операторы независимы, это существенно облегчает исследование граничной задачи.

2. Метод решения граничных задач

Граничные задачи для каждого блока блочной структуры погружаются в топологическое пространство, индуцированное трехмерным евклидовым пространством, после чего применением формулы Стокса в топологическом пространстве сводятся к функциональным уравнениям.

Скалярная задача. Функциональные уравнения скалярной граничной задачи о вертикальных воздействиях можно представить в виде

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \\ \equiv \left[(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}\right] U_{3b} = \\ = -\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.1)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Представление решения для каждой плиты имеет вид

$$u_{3b} = -\frac{\mathbf{F}_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}} \int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \\ - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Здесь ω_b — участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha, x\rangle}\Big\{-\Big[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\Big]\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \Big[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b}\Big]\,\mathrm{d}x_2\Big\}, \\ b = \lambda, r$$

или форму

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha, x\rangle}\Big\{-\Big[i\alpha_2 M D^{-1} - Q D^{-1} - \\ - (\alpha_2^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2^r} + \\ + i\alpha_2\left[\alpha_2^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3b}\Big]\Big\}\,\mathrm{d}x_1 \quad (2.2)$$

с использованием представления напряжений и моментов.

Осуществим автоморфизм, вычислив формы-вычеты Лере, и получим псевдодифференциальные уравнения скалярной граничной задачи. С учетом принятых обозначений можем представить псевдодифференциальные уравнений для левой плиты в форме

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Big\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Big\{i\alpha_{21-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - \\ - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda}\Big\} e^{i\alpha_1 x_1}\,\mathrm{d}x_1 - \\ - \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{21-})\Big\rangle = 0, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Big\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Big\{i\alpha_{22-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - \\ - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda}\Big\} e^{i\alpha_1 x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{22-})\Big\rangle = 0, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda.$$

Аналогично для правой плиты

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Big\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \Big\{ i\alpha_{21+} D_{r1}^{-1} M_r - \\ - D_{r2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{21+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{21+} \left[\alpha_{21+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r} \Big\} e^{i\alpha_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1 \\ - \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{21+}) \Big\rangle = 0, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Big\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \Big\{ i\alpha_{22+} D_{r1}^{-1} M_r - \\ - D_{r2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{22+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{22+} \left[\alpha_{22+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r} \Big\} e^{i\alpha_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1 \\ - \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{22+}) \Big\rangle = 0, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r,$$

$$\alpha_{21-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - \sqrt{\varepsilon_{43\lambda}}},$$
$$\alpha_{22-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 + \sqrt{\varepsilon_{43\lambda}}},$$
$$\alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - \sqrt{\varepsilon_{43r}}},$$
$$\alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 + \sqrt{\varepsilon_{43r}}}$$

Введем следующую систему обозначений:

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\},$$
$$\mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\},$$
$$\mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1) g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g,$$
$$y_{1\lambda} = D_{\lambda1}^{-1}\mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_{\lambda2}^{-1}\mathbf{F}_1 Q_\lambda,$$
$$y_{1r} = D_{r1}^{-1}\mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_{r2}^{-1}\mathbf{F}_1 Q_r,$$
$$z_{1\lambda} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda,$$
$$z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r,$$
$$\mathbf{K}_\lambda = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\},$$
$$k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21-})(t_\lambda - g_\lambda),$$
$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{53\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22-})(t_\lambda - g_\lambda),$$
$$k_{1r} = \varepsilon_{53r}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21+})(t_r - g_r),$$
$$k_{2r} = \varepsilon_{53r}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22+})(t_r - g_r).$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{Y}_\lambda + \mathbf{B}_\lambda \mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{K}_\lambda = 0,$$
$$\mathbf{A}_r \mathbf{Y}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{Z}_r + \mathbf{K}_r = 0.$$

Рассмотрим тот случай, когда изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, то есть торцы плит свободны от напряжений, $\mathbf{Y}_\lambda = 0$, $\mathbf{Y}_r = 0$.

Система уравнений принимает вид

$$(\alpha_{21+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) z_{1r} - \\ - i\alpha_{21+}\left[\alpha_{21+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} = -k_{1r},$$

$$(\alpha_{22+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) z_{1r} - \\ - i\alpha_{22+}\left[\alpha_{22+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} = -k_{2r},$$

$$(\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) z_{1\lambda} - \\ - i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} = -k_{1\lambda},$$

$$(\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) z_{1\lambda} - \\ - i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} = -k_{2\lambda}.$$

Решения получившихся систем уравнений легко находятся

$$\mathbf{Z}_\lambda = -\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda, \quad \mathbf{Z}_r = -\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r,$$

причем определители систем имеют вид

$$\Delta_\lambda = i\Big\langle \left[\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2\right]^2 \alpha_{22-} - \\ - \left[\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2\right]^2 \alpha_{21-} \Big\rangle,$$

$$\Delta_r = i\Big\langle \left[\alpha_{21+}^2 + \nu_r \alpha_1^2\right]^2 \alpha_{22+} - \\ - \left[\alpha_{22+}^2 + \nu_r \alpha_1^2\right]^2 \alpha_{21+} \Big\rangle.$$

Внеся найденные соотношения в выражения для внешних форм в (2.2), (2.3) и взяв,

$$U_{31} + U_{32} = U_3,$$
$$U_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) u_{mn}$$

будем иметь уравнения, положив

$$G_{3r} = G^{+}, \quad G_{3\lambda} = G^{-}$$

$$\begin{aligned}&\big[\varepsilon_{53r}(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\varepsilon_{43r})^{-2}+\\ &+\varepsilon_6^{-1}K_1(\alpha_1,\alpha_2)\big]G^{+}(\alpha_1,\alpha_2)=\\ &=-\big[\varepsilon_{53\lambda}(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\varepsilon_{43r})^{-2}+\\ &+\varepsilon_6^{-1}K_1(\alpha_1,\alpha_2)\big]G^{-}(\alpha_1,\alpha_2)+\\ &+(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\varepsilon_{43r})^{-2}\times\\ &\times\left[A_rk_{1r}+B_rk_{2r}+\varepsilon_{53r}T^{-}(\alpha_1,\alpha_2)\right]+\\ &+(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\varepsilon_{43r})^{-2}\times\\ &\times\left[A_\lambda k_{1\lambda}+B_\lambda k_{2\lambda}+\varepsilon_{53\lambda}T^{+}(\alpha_1,\alpha_2)\right],\end{aligned}$$

Векторная задача. Для векторного случая имеем

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1,\partial x_2\right)\mathbf{u}_b=\begin{pmatrix}\rho_{u11} & \rho_{u12}\\ \rho_{u21} & \rho_{u22}\end{pmatrix},$$

$$\rho_{u11}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\varepsilon_{4b}\right)u_{1b},$$

$$\rho_{u22}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\varepsilon_{4b}\right)u_{2b},$$

$$\rho_{u12}=(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2})u_{2b},$$

$$\rho_{u21}=(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2})u_{1b}.$$

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}&-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\mathbf{U}_b=\\ &=\begin{pmatrix}\rho_{U11} & \rho_{U12}\\ \rho_{U21} & \rho U22\end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\rho_{U11}=(\alpha_1^2+\varepsilon_{1b}\alpha_2^2-\varepsilon_{4b})U_{1b},$$

$$\rho_{U22}=(\alpha_2^2+\varepsilon_{1b}\alpha_1^2-\varepsilon_{4b})U_{2b},$$

$$\rho_{U12}=\varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2U_{2b},\quad \rho_{U21}=\varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2U_{1b},$$

$$\mathbf{U}=\mathbf{F}_2\mathbf{u},\quad \mathbf{G}=\mathbf{F}_2\mathbf{g},\quad b=1,2,\ldots,B.$$

Функциональные уравнения для плит, имеют в общем случае вид [1–3]

$$\begin{aligned}&-\mathbf{R}_b(-i\alpha_{1b},-i\alpha_{2b})\mathbf{U}_b=\\ &=\int\limits_{\partial\Omega_b}\omega_b-\varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(\alpha_{1b},\alpha_{2b})(\mathbf{g}_b+\mathbf{t}_b),\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\mathbf{U}_b=\left\{U_{1b},U_{2b}\right\},\quad b=1,2.$$

Здесь ω_b — участвующий в (2.5) вектор внешних форм, имеющий представление

$$\omega_b=\left\{\omega_1,\omega_2\right\},$$

$$\begin{aligned}\omega_{1b}=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{&-\Bigg(\varepsilon_{1b}\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_2}+\\ &+\varepsilon_{2b}\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1}-i\varepsilon_{1b}\alpha_{2b}u_{1b}\Bigg)\,\mathrm{d}x_1+\\ &+\left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1}-i\alpha_{1b}u_{1b}-i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{2b}\right)\mathrm{d}x_2\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{2b}=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{&-\Bigg(\varepsilon_{2b}\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1}+\\ &+\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_2}-i\alpha_{2b}u_{2b}\Bigg)\,\mathrm{d}x_1+\\ &+\left(\varepsilon_{1b}\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1}-i\varepsilon_{1b}\alpha_{1b}u_{2b}-i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{1b}\right)\mathrm{d}x_2\Bigg\}.\end{aligned}$$

Границы блока, как указано выше, могут иметь разного характера свойства контакта с соседними блоками или быть свободными. В соответствии с алгоритмом метода блочного элемента данные относительно характера контактов блоков должны быть внесены в представление псевдодифференциального уравнения. Для его построения осуществляется дифференциальная факторизация матрицы-функции $\mathbf{R}_b(-i\alpha_1,-i\alpha_2)$ функционального уравнения (2.4). Заметим, что факторизация выполняется в каждой локальной системе координат касательного расслоения границы $\partial\Omega_b$. Применением алгоритма дифференциальной факторизации, строятся факторизующие матрицы-функции $\mathbf{D}_b(-i\alpha_{1b},-i\alpha_{2b})$, для левого и правого краев пластин. После приведения локальных систем к единой системе координат ox_1x_2, они имеют соответственно вид

$$\mathbf{D}_\lambda(-i\alpha_1,-i\alpha_2)=\begin{pmatrix}d_{\lambda11} & d_{\lambda12}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$d_{\lambda11}=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_{21-}}-\frac{1}{\alpha_2-\alpha_{22-}},$$

$$d_{\lambda12}=\frac{-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_{21-})\alpha_{21-}}+\frac{\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_{22-})\alpha_{22-}},$$

$$\alpha_{21-}=-i\sqrt{\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}\varepsilon_{1\lambda}^{-1}},$$

$$\alpha_{22-}=-i\sqrt{\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}},$$

$$\mathbf{D}_r(-i\alpha_1,-i\alpha_2)=\begin{pmatrix} d_{r11} & d_{r12}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$d_{r11}=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_{21+}}-\frac{1}{\alpha_2-\alpha_{22+}},$$

$$d_{r12}=\frac{-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_{21+})\alpha_{21+}}+\frac{\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_{22+})\alpha_{22+}},$$

$$\alpha_{21+}=i\sqrt{\alpha_1^2-\varepsilon_{4r}\varepsilon_{1r}^{-1}},\quad \alpha_{22+}=i\sqrt{\alpha_1^2-\varepsilon_{4r}}.$$

Подействовав этими матрицами-функциями на функциональные уравнения (2.4) слева и вычислив формы-вычета Лере, получаем псевдодифференциальные уравнения для левой пластины в виде

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Big\langle\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}[\omega_{1\lambda}(\alpha_1,\alpha_{21-})-\\ -\alpha_1\alpha_{21-}^{-1}\omega_{2\lambda}(\alpha_1,\alpha_{21-})]-\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21-})\times\\ \times\big[(g_{1\lambda}+t_{1\lambda})-\alpha_1\alpha_{21-}^{-1}(g_{2\lambda}+t_{2\lambda})\big]\Big\rangle=0,\\ \xi_1^\lambda\in\partial\Omega_\lambda,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Big\langle\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}[\omega_{1\lambda}(\alpha_1,\alpha_{22-})-\\ -\alpha_1\alpha_{22-}^{-1}\omega_{2\lambda}(\alpha_1,\alpha_{22-})]-\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{22-})\times\\ \times[(g_{1\lambda}+t_{1\lambda})-\alpha_1\alpha_{22-}^{-1}(g_{2\lambda}+t_{2\lambda})]\Big\rangle=0,\\ \xi_1^\lambda\in\partial\Omega_\lambda.$$

Аналогично на границе правой пластины имеем

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Big\langle\int\limits_{\partial\Omega_r}[\omega_{1r}(\alpha_1,\alpha_{21+})-\\ -\alpha_1\alpha_{21+}^{-1}\omega_{2r}(\alpha_1,\alpha_{21+})]-\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21+})\times\\ \times[(g_{1r}+t_{1r})-\alpha_1\alpha_{21+}^{-1}(g_{2r}+t_{2r})]\Big\rangle=0,\\ \xi_1^r\in\partial\Omega_r,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Big\langle\int\limits_{\partial\Omega_r}[\omega_{1r}(\alpha_1,\alpha_{22+})-\\ -\alpha_1\alpha_{22+}^{-1}\omega_{2r}(\alpha_1,\alpha_{22+})]-\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{22+})\times\\ \times[(g_{1r}+t_{1r})-\alpha_1\alpha_{22+}^{-1}(g_{2r}+t_{2r})]\Big\rangle=0,\\ \xi_1^r\in\partial\Omega_r.$$

Переходя во внешних формах к параметрам напряженно-деформированного состояния, псевдодифференциальные уравнения на границе левой пластины можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Big\langle-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{\varepsilon_{6\lambda}(T_{x_1x_2\lambda}-\alpha_1\alpha_{21-}^{-1}N_{x_2\lambda})+\\ +i\varepsilon_{1\lambda}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}\varepsilon_{1\lambda}^{-1})\alpha_{21-}^{-1}u_{1\lambda}+\\ +(1-\nu_\lambda)\alpha_1u_{2\lambda}\Big\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1-\\ -\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21-})\times\\ \times\big[(g_{1\lambda}+t_{1\lambda})-\alpha_1\alpha_{21-}^{-1}(g_{2\lambda}+t_{2\lambda})\big]\Big\rangle=0,$$

$$\alpha_{21-}=-i\sqrt{(\alpha_1)^2-\varepsilon_{4\lambda}\varepsilon_{1\lambda}^{-1}},$$

$$\varepsilon_{6\lambda}=\frac{1-\nu_\lambda^2}{E_\lambda},\quad \xi_1^\lambda\in(-\infty,\infty),$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Big\langle-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{\varepsilon_{6\lambda}(T_{x_1x_2\lambda}-\alpha_1\alpha_{22-}^{-1}N_{x_2\lambda})+\\ +i\varepsilon_{1\lambda}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}\varepsilon_{1\lambda}^{-1})\alpha_{22-}^{-1}u_{1\lambda}+\\ +(1-\nu_\lambda)\alpha_1u_{2\lambda}\Big\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1-\\ -\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{22-})\times\\ \times\big[(g_{1\lambda}+t_{1\lambda})-\alpha_1\alpha_{22-}^{-1}(g_{2\lambda}+t_{2\lambda})\big]\Big\rangle=0,$$

$$\alpha_{22-}=-i\sqrt{\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}},\quad \xi_1^\lambda\in(-\infty,\infty)$$

На границе правой пластины они имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\left\langle -\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\varepsilon_{6r}(T_{x_1x_2r}-\alpha_1\alpha_{21+}^{-1}N_{x_2r})+\right.\right.$$
$$+i\varepsilon_{1r}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4r}\varepsilon_{1r}^{-1})\alpha_{21+}^{-1}u_{1r}+$$
$$\left.+(1-\nu_r)\alpha_1u_{2r}\right\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1-$$
$$-\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21+})\times$$
$$\left.\times\left[(g_{1r}+t_{1r})-\alpha_1\alpha_{21+}^{-1}(g_{2r}+t_{2r})\right]\right\rangle=0,$$

$$\alpha_{21+}=i\sqrt{(\alpha_1)^2-\varepsilon_{4r}\varepsilon_{1r}^{-1}},$$
$$\varepsilon_{6r}=\frac{1-\nu_r^2}{E_r},\quad \xi_1^r\in(-\infty,\infty)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\left\langle -\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\varepsilon_{6r}(T_{x_1x_2r}-\alpha_1\alpha_{22+}^{-1}N_{x_2r})+\right.\right.$$
$$+i\varepsilon_{1r}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4r}\varepsilon_{1r}^{-1})\alpha_{22+}^{-1}u_{1r}+$$
$$\left.+(1-\nu_r)\alpha_1u_{2r}\right\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1-$$
$$-\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{22+})\times$$
$$\left.\times\left[(g_{1r}+t_{1r})-\alpha_1\alpha_{22+}^{-1}(g_{2r}+t_{2r})\right]\right\rangle=0,$$

$$\alpha_{22+}=i\sqrt{\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}},\quad \xi_1^r\in(-\infty,\infty).$$

Здесь $\mathbf{F}_1^{-1}$ — обратные операторы к одномерному преобразованию Фурье.

Введем следующую систему обозначений:

$$\mathbf{Y}_\lambda=\{y_{1\lambda},y_{2\lambda}\},\quad \mathbf{Z}_\lambda=\{z_{1\lambda},z_{2\lambda}\},$$
$$\mathbf{Y}_r=\{y_{1r},y_{2r}\},\quad \mathbf{Z}_r=\{z_{1r},z_{2r}\},$$
$$\mathbf{F}_1g=\mathbf{F}_1(\alpha_1)g,\quad \mathbf{F}_2g=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)g,$$
$$y_{1\lambda}=\mathbf{F}_1T_{x_1x_2\lambda},\quad y_{2\lambda}=\mathbf{F}_1N_{x_2\lambda},$$
$$y_{1r}=\mathbf{F}_1T_{x_1x_2r},\quad y_{2r}=\mathbf{F}_1N_{x_2r},$$
$$z_{1\lambda}=\mathbf{F}_1u_{1\lambda},\quad z_{2\lambda}=\mathbf{F}_1u_{2\lambda},$$
$$z_{1r}=\mathbf{F}_1u_{1r},\quad z_{2r}=\mathbf{F}_1u_{2r},$$
$$\mathbf{K}_\lambda=\{k_{1\lambda},k_{2\lambda}\},\quad \mathbf{K}_r=\{k_{1r},k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda}=\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21-})\times$$
$$\times\left[(g_{1\lambda}+t_{1\lambda})-\alpha_1\alpha_{21-}^{-1}(g_{2\lambda}+t_{2\lambda})\right],$$

$$k_{2\lambda}=\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{22-})\times$$
$$\times\left[(g_{1\lambda}+t_{1\lambda})-\alpha_1\alpha_{22-}^{-1}(g_{2\lambda}+t_{2\lambda})\right],$$

$$k_{1r}=\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21+})\times$$
$$\times\left[(g_{1r}+t_{1r})-\alpha_1\alpha_{22+}^{-1}(g_{2r}+t_{2r})\right],$$

$$k_{2r}=\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{22+})\times$$
$$\times\left[(g_{1r}+t_{1r})-\alpha_1\alpha_{22+}^{-1}(g_{2r}+t_{2r})\right].$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений в матричной форме

$$\mathbf{A}_\lambda\mathbf{Y}_\lambda+\mathbf{B}_\lambda\mathbf{Z}_\lambda+\mathbf{K}_\lambda=0,$$
$$\mathbf{A}_r\mathbf{Y}_r+\mathbf{B}_r\mathbf{Z}_r+\mathbf{K}_r=0,$$
$$\mathbf{A}_\lambda=\begin{pmatrix}a_{11\lambda}&a_{12\lambda}\\a_{21\lambda}&a_{22\lambda}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_\lambda=\begin{pmatrix}b_{11\lambda}&b_{12\lambda}\\b_{21\lambda}&b_{22\lambda}\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{A}_r=\begin{pmatrix}a_{11r}&a_{12r}\\a_{21r}&a_{22r}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_r=\begin{pmatrix}b_{11r}&b_{12r}\\b_{21r}&b_{22r}\end{pmatrix},$$
$$a_{11\lambda}=\varepsilon_{6\lambda},\quad a_{12\lambda}=-\varepsilon_{6\lambda}\alpha_1\alpha_{21-}^{-1},$$
$$b_{11\lambda}=i\varepsilon_{1\lambda}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}\varepsilon_{1\lambda}^{-1})\alpha_{21-}^{-1},$$
$$b_{12\lambda}=(1-\nu_\lambda)\alpha_1,$$
$$a_{21\lambda}=\varepsilon_{6\lambda},\quad a_{22\lambda}=-\varepsilon_{6\lambda}\alpha_1\alpha_{22-}^{-1},$$
$$b_{21\lambda}=i\varepsilon_{1\lambda}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4\lambda}\varepsilon_{1\lambda}^{-1})\alpha_{22-}^{-1},$$
$$b_{22\lambda}=(1-\nu_\lambda)\alpha_1,$$
$$a_{11r}=\varepsilon_{6r},\quad a_{12r}=-\varepsilon_{6r}\alpha_1\alpha_{21+}^{-1},$$
$$b_{11r}=i\varepsilon_{1r}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4r}\varepsilon_{1r}^{-1})\alpha_{21+}^{-1},$$
$$b_{12r}=(1-\nu_r)\alpha_1,$$
$$a_{21r}=\varepsilon_{6r},\quad a_{22r}=-\varepsilon_{6r}\alpha_1\alpha_{22+}^{-1},$$
$$b_{21r}=i\varepsilon_{1r}(\alpha_1^2-\varepsilon_{4r}\varepsilon_{1r}^{-1})\alpha_{22+}^{-1},$$
$$b_{22r}=(1-\nu_r)\alpha_1.$$

Топологический метод решения граничных задач охватывает все естественные типы граничных условий, которые могут быть сформулированы на дефектах, трещинах или разломах. Он позволяет, независимо от способа нагружения покрытий, одинаково исследовать граничную задачу.

Рассмотрим пример скрытого дефекта в предположении, что вертикальные напряжения на торцах плит совпадают, а также совпадают касательные к торцам плит напряжения. Характерным свойством скрытого дефекта является отсутствие визуально наблюдаемого изъяна покрытия, то есть трещины, разрыва. При отсутствии дефекта напряжения и перемещения берегов трещины обязаны совпадать. Поэтому рассмотрим случай, когда $\mathbf{Z}_\lambda = \mathbf{Z}_r$, и $y_{1\lambda} = y_{1r} = 0$. Тогда, решение дается соотношениями

$$\mathbf{Y}_{\lambda r} = -\mathbf{C}_{\lambda r}^{-1}(\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r),$$

$$\mathbf{C}_\lambda = \mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r,$$

$$\mathbf{C}_\lambda = \begin{pmatrix} c_{11\lambda} & c_{12\lambda} \\ c_{21\lambda} & c_{22\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} c_{11r} & c_{12r} \\ c_{21r} & c_{22r} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{\lambda r} = \begin{pmatrix} c_{12\lambda} & -c_{12r} \\ c_{22\lambda} & -c_{22r} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_{\lambda\mathbf{r}} = \{y_{2\lambda}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Y}_\lambda = \{0, y_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y}_r = \{0, y_{2r}\},$$

$$\mathbf{Z}_\lambda = -\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda.$$

Таким образом, в этом случае имеет место нарушение связности для компоненты напряжений, что свидетельствует о присутствии скрытого дефекта. Выписав все псевдодифференциальные уравнения для каждого участка границы и для каждого блока, внесем в них соответствующие граничные условия. После этого решим извлеченные из псевдодифференциальных уравнений интегральные уравнения и получим из (2.5) представление решений в каждом блоке, в левой и правой полуплоскости в виде

$$\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{F}_2^{-1}\left[\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\mathbf{g}_\lambda + \mathbf{t}_\lambda)\right\rangle, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{F}_2^{-1}\left[\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\mathbf{g}_r + \mathbf{t}_r)\right\rangle.$$

Представим соотношение $\mathbf{U}_\lambda + \mathbf{U}_r = \mathbf{U}$, $\mathbf{U}_b(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{u}_b$ при $x_3 = 0$ в виде

$$\mathbf{P}_\lambda\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_r\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \\ = \mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0)\times \\ \times\left[\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)\right], \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_\lambda\mathbf{g}(x_1, x_2),$$
$$\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_r\mathbf{g}(x_1, x_2).$$

Здесь $\mathbf{P}_\lambda$, $\mathbf{P}_r$ — проекторы на левую и правую полуплоскости, являющиеся носителями соответствующих плит. Внося соотношения (2.6) в левые части (2.7) и применив преобразования Фурье, получим соотношения вида

$$[\mathbf{R}_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \times \\ \times\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}(\mathbf{G}_\lambda + \mathbf{T}_\lambda)\right\rangle + \\ + [\mathbf{R}_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \times \\ \times\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r}(\mathbf{G}_r + \mathbf{T}_r)\right\rangle - \\ -\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0)\left[\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)\right] = 0,$$

$$\mathbf{T}_\lambda = \mathbf{F}_2\mathbf{t}_\lambda(x_1, x_2), \quad \mathbf{T}_r = \mathbf{F}_2\mathbf{t}_r(x_1, x_2)$$

Вектор-функции $\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2)$, являющиеся преобразованиями Фурье функций, с носителями в полуплоскостях, являются регулярными функциями параметров α_2 при фиксированном α_1 в левой и правой полуплоскостях соответственно. В связи с этим можем обозначить вектор-функции, регулярные по параметру α_2 в нижней, знак минус, и в верхней, знак плюс, полуплоскостях, положив

$$\mathbf{G}_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_-(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$\mathbf{G}_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_+(\alpha_1, \alpha_2)$$

Внося эти обозначения в предыдущее соотношение, приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа следующего вида

$$MG_+ = G_- + V,$$

$$\mathbf{MG}_+ = \mathbf{G}_- + \mathbf{V},$$

$$M = -[\varepsilon_{53\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43r})^{-2} + \\ + \varepsilon_6^{-1}K_1(\alpha_1, \alpha_2)]^{-1}\times \\ \times\left[\varepsilon_{53r}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43r})^{-2} + \varepsilon_6^{-1}K_1(\alpha_1, \alpha_2)\right],$$

$$V = +(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43r})^{-2} \times$$
$$\times \left[A_r k_{1r} + B_r k_{2r} + \varepsilon_{53r} T^-(\alpha_1, \alpha_2)\right] +$$
$$+ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43r})^{-2} \times$$
$$\times \left[A_\lambda k_{1\lambda} + B_\lambda k_{2\lambda} + +\varepsilon_{53\lambda} T^+(\alpha_1, \alpha_2)\right],$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{K}_1,$$
$$\mathbf{K}_1 = \varepsilon_{5r}\mathbf{R}_r^{-1} - \mathbf{K}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K} - \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{R}_\lambda^{-1},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_2^{-1}\left(\mathbf{R}_\lambda^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda + \mathbf{R}_r^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r - \right.$$
$$\left. - \varepsilon_\lambda \mathbf{R}_\lambda^{-1}\mathbf{T}_\lambda - \varepsilon_r \mathbf{R}_r^{-1}\mathbf{T}_r\right).$$

Когда торцы плит полностью сблизились, контактные напряжения на краях пластин имеют представление

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\lambda(x_1,x_2) &\to \boldsymbol{\sigma}_{4\lambda}(x_1,x_2)x_2^{-1} + \\ &+\boldsymbol{\sigma}_{5\lambda}(x_1,x_2)\ln|x_2| + \\ &+\boldsymbol{\sigma}_{6\lambda}(x_1,x_2)\operatorname{sign} x_2, \\ \mathbf{g}_r(x_1,x_2) &\to \boldsymbol{\sigma}_{4r}(x_1,x_2)x_2^{-1} + \\ &+\boldsymbol{\sigma}_{5r}(x_1,x_2)\ln|x_2| + \\ &+\boldsymbol{\sigma}_{6r}(x_1,x_2)\operatorname{sign} x_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Все векторы $\boldsymbol{\sigma}_{n\lambda}(x_1,x_2)$ и $\boldsymbol{\sigma}_{nr}(x_1,x_2)$, $n = 3,\ldots,6$ непрерывны по обоим параметрам. Учет временного параметра $\exp(-i\omega t)$, сокращенного при решении гармонической граничной задачи, приводит к представлению коэффициентов физических напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{3b}(x_1,x_2,t)$ при особенностях в форме

$$\boldsymbol{\sigma}_{nb}(x_1,x_2,t) = \operatorname{Re}\boldsymbol{\sigma}_{nb}(x_1,x_2)e^{-i\omega t} \equiv$$
$$\equiv \operatorname{Re}\boldsymbol{\sigma}_{nb}(x_1,x_2)\cos\omega t + \operatorname{Im}\boldsymbol{\sigma}_{nb}(x_1,x_2)\sin\omega t.$$

Выводы

По сравнению со случаями отдельно вертикального или касательного воздействия на литосферные плиты в рассматриваемом случае жесткого сцепления литосферных плит с основанием контактные напряжения в зоне сближения, наряду с имеющими место сингулярными составляющими, приобретают новые свойства, состоящие в том, что все коэффициенты при особенностях зависят как от параметров вертикального воздействия, так и горизонтального.

Полученное соотношение (2.8) свидетельствует о том, что скрытые дефекты фактически являются новыми типами трещин, дополняющими известные трещины Гриффица–Ирвина [5–8]. Именно, в отличие от трещин Гриффица–Ирвина, характеризуемых закругленностью и гладкостью границ, данный тип трещин содержит изломы границ и визуально более точно описывает границы трещин, например, в хрупких материалах, таких как стекло. В настоящей работе этот тип дефектов обнаружен в неоднородной среде формируемой блочной структурой из трехмерного слоя и плит Кирхгофа. Вопрос существования подобных дефектов в однородных средах будет объектом следующих исследований.

Литература

1. *Бабешко О.М.* Топологический метод в проблеме оценки концентрации напряжений в разломах литосферных плит // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудниества. 2015. № 2. С. 14–21.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологические методы в теории скрытых дефектов и некоторые аномалии // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 650–655.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Стартовое землетрясение при гармонических воздействиях // ДАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 37–40.
4. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Cherepanov G.P.* Mechanics of Brittle Fracture. New York: McGraw-Hill, 1979. 950 p.
6. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
7. *Irwin G.* Fracture In: Handbuch der Physic, bd 6. Berlin: Springer-Verlag, 1958. 551 p.
8. *Rice J.* Mathematical analysisin the mechanicsof fracture. Treatise on Fracture. Vol. II. Academic Press Int., New York, 1968. P. 191–311.

References

1. Babeshko O.M. Topologicheskiy metod v probleme otsenki kontsentratsii napryazheniy v razlomakh litosfernykh plit [Topological method in the problem of estimating stress concentration in faults of lithospheric plates]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudniestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2015, no. 2, pp. 14–21. (In Russian)

2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskie metody v teorii skrytykh defektov i nekotorye anomalii [Topological methods in the theory of hidden defects and some anomalies]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2014, vol. 457, no 6, pp. 650–655. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Startovoe zemletryasenie pri garmonicheskikh vozdeystviyakh [Start-up earthquake with harmonic influences]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2016, vol. 471, no. 1, pp. 37–40. (In Russian)
4. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Pub., 1979, 320 p. (In Russian)
5. Cherepanov G.P. *Mechanics of Brittle Fracture.* McGraw-Hill, New York, 1979, 950 p.
6. Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of fracture of composite materials]. Moscow, Nauka Pub., 1983, 296 s. (In Russian)
7. Irwin G. *Fracture In: Handbuch der Physic, bd 6.*, Berlin: Springer-Verlag, 1958, 551 p.
8. Rice J. *Mathematical analysisin the mechanicsof fracture. Treatise on Fracture, vol. II.* Academic Press Int., New York, 1968, pp. 191–311.

Статья поступила 20 ноября 2017 г.