ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2017. №4. Вып. 1. С. 30–39

Механика

УДК 539.3

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ СЛОЕВ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ПОЛОСТЯМИ ИЛИ ШТОЛЬНЯМИ

Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.

THE INTEGRAL EQUATION METHOD IN THE THEORY OF THE LAYERS WITH SET OF CAVITIES AND GALLERIES

Evdokimova O. V.[*], Babeshko O. M.[**], Babeshko V. A.[*,**]

[*] Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[**] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. A method of solution of boundary problem is developed for the integral equations' systems arising in the difficulty of structural behavior evaluation of block structures which represent underground constructions containing multiple shaft tunnels. The same problem appears in the study of multilayer materials behavior. These materials have connections with parallel different-sized cavities of a large extent. The method is based on reduction of boundary problems to the integral equations' systems with a kernel representing matrix-function of high order. The latter circumstance complicates the study and the solution of the initial boundary problem by methods of reducing it to the Fredholm's combined equations of the second kind. A factorization method, which allows study the behavior of the solution characteristics more optimally, will be developed in order to investigate the combined equations. This can be achieved by designing of factorization approach to the analysis of higher-order matrix-functions. The approach makes it possible to construct the conditions of boundary problem's solutions by using some kind of algorithm of successive approximations. The conditions describe both the behavior of contact voltages in the zones of jointing of partitions with multipart layers and the behavior of motions in the inter-partitions zones.

Keywords: stress-strain state, drifts, factorization, deformable layers, interface layer, Kirchhoff plates, block elements, integral and functional equations.

Введение

Рассматривается совокупность параллельных подземных сооружений как блочная структура, состоящая из верхнего линейно упругого слоя толщиной H_1 и пласта толщины h, моделируемого пластиной Кирхгофа. Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики среды которого грунтоподобные и позволяют моделировать его постелью Винклера. Предполагается, что толщина h пласта много меньше H_1 что имеет место в реальных условиях добычи многих полезных ископаемых. Расположим систему координат $ox_1x_2x_3$ таким образом, что плоскость ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось ox_3 направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси ox_1 перпендикулярно оси ox_2 расположено N протяженных параллельных между собой штолен, которые считаются бесконечными. Штольни находятся в рудном пласте и ширина каждой из них равна $b_{2n+1} - b_{2n}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, где (b_{2n}, b_{2n+1}) — координаты на оси ox_2 штольни с номером $2n$. Пласт сверху накрыт верх-

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2017 г. проекты (9.8753.2017/БЧ), (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323).

ним деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями $t(x_1, x_2)$ и перемещениями $u_{32}(x_1, x_2)$ верхней границы основания задается соотношением $u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \upsilon t(x_1, x_2)$, $\varepsilon_6^{-1}\upsilon > 0$. Здесь υ — коэффициент постели Винклера. Области между штольнями с координатами $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$ шириной, $b_{2n} - b_{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $b_1 = -\infty$, $b_{2N} = \infty$ являются опорами, имеющими номера $2n - 1$. Допускается, что верхний упругий слой со свободной от напряжений верхней границей и с плотностью материала ρ вертикально воздействует сверху на пласт напряжением $q_0 = \rho g H_1$, где g — ускорение свободного падения, вызывая пренебрежимо малые касательные напряжения в сравнении с нормальными.

1. Формулировка задачи

Уравнение пластин Кирхгофа, описывающих поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяженными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \\
&\quad \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \\
&\qquad + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \quad (1.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv \\
&\quad \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},
\end{aligned}
$$

$$
U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b},
$$

$$
T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = \lambda, r,
$$

$$
M_b = -D_{b1} \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right),
$$

$$
D_{b1} = \frac{D_b}{H_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H_1^3},
$$

$$
\begin{aligned}
Q_b = -D_{b2} \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = \\
= f_{4b}(\partial\Omega_b),
\end{aligned}
$$

$$
u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H_1 \partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),
$$

$$
D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H_1^4}{E_b h_b^3},
$$

$$
\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H_1}{\mu}.
$$

Здесь для опор, сформированных из фрагментов пласта между штольнями, введено условное обозначение индексом b, которому в будущем будет приданы текущие номера. Опоры занимают области Ω_b с границами $\partial\Omega_b$, при вертикальных статических воздействиях напряжением g_{3b} сверху и t_{3b} снизу. Используются общепринятые обозначения механических параметров в выбранной системе координат: M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат $x_1 o x_2$; h_b — толщины пластин, H_1 — размерная толщина верхнего слоя. Обозначения заимствованы из [1–3]. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счет веса верхнего слоя и описывается соотношением [4–6]

$$
\begin{aligned}
&u_{31}(x_1, x_2) = \mathbf{K}_{31} g = \\
&\quad = \varepsilon_6^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2) \times \\
&\qquad \times [g(\xi_1, \xi_2) - g_0] \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2, \quad (1.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&k_{31}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\
&\qquad \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \, \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) \times \\
&\qquad \times e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2.
\end{aligned}
$$

Здесь $g(\xi, \eta)$ — воздействия на нижнюю границу верхнего слоя со стороны пласта, то есть контактные напряжения, действующие на верхний пласт от опор. Функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$, называемая символом интегрального уравнения, представляет собой для линейно-упругого слоя мероморфную функцию двух комплексных переменных. Полюса функции по одному из комплексных переменных $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ при фиксированном вещественном втором являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах. Воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается $t(\xi_1,\xi_2)$, вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях — $u_{32}(x_1,x_2)$.

2. Свойства блочных элементов пласта

В основе решения граничной задачи лежит метод блочного элемента в сочетании с факторизационными подходами [1–8]. Следуя им, функциональные уравнения граничной задачи для каждой опоры можно представить в виде [1–3]

$$R_b(-i\alpha_1,-i\alpha_2)U_{3b}\equiv(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2U_{3b}= \\ =-\int\limits_{\partial\Omega_b}\omega_b-\varepsilon_{53b}S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2), \quad (2.1)$$

$$S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)(t_{3b}-g_{3b}), \quad b=\lambda,r.$$

Здесь ω_b — участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\Bigg[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_2^3}-i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_2^2}-\alpha_2^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_2^3u_{3b}+2\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^2\partial x_2}-2i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}\Bigg]\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\Bigg[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^3}-i\alpha_1\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}-\alpha_1^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}+i\alpha_1^3u_{3b}\Bigg]\,\mathrm{d}x_2\Bigg\}, \\ b=\lambda,r.$$

Интеграл вычисляется по границе опоры в направлении против часовой стрелки. Для прямолинейной границы внешняя форма описывается выражением

$$\omega_b=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\Bigg[i\alpha_1M_bD_b^{-1}-Q_bD_b^{-1}- \\ -(\alpha_2^2+\nu_b\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_2\left[\alpha_2^2+(2-\nu_b)\alpha_1^2\right]u_{3b}\Bigg]\Bigg\}\,\mathrm{d}x_1.$$

Вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи с учетом принятых обозначений можем представить, отдельно для каждой стороны опоры λ и r, где λ — левая сторона опоры, а r — правая. Пусть пластина занимает область $\Omega_n(|x_1|\leqslant\infty,$ $b_{2n-1}\leqslant x_2\leqslant b_{2n})$. Тогда для правой стороны имеем псевдодифференциальные уравнения

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{i\alpha_{2-}D_{r1}^{-1}M_r-D_{r2}^{-1}Q_r- \\ -(\alpha_{2-}^2+\nu_r\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}\times \\ \times e^{i\alpha_1x_1+i\alpha_{2-}b_{2n}}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{i\alpha_{2-}D_{\lambda1}^{-1}M_\lambda-D_{\lambda2}^{-1}Q_\lambda- \\ -(\alpha_{2-}^2+\nu_\lambda\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}\times \\ \times e^{i\alpha_1x_1+i\alpha_{2-}b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\varepsilon_{53b}S_3(\alpha_1,\alpha_{2-})\Bigg\rangle=0; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{iD_{r1}^{-1}M_r-2\alpha_{2-}\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2}+ \\ +i\left[3\alpha_{2-}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}\times \\ \times e^{i\alpha_1x_1+i\alpha_{2-}b_{2n}}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{iD_{\lambda1}^{-1}M_\lambda-2\alpha_{2-}\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+ \\ +i\left[3\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}\times \\ \times e^{i\alpha_1x_1+i\alpha_{2-}b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\varepsilon_{53}S_3'(\alpha_1,\alpha_{2-})\Bigg\rangle=0.$$

На левой стороны пластины псевдодифференциальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{i\alpha_{2+}D_{\lambda1}^{-1}M_\lambda-D_{\lambda2}^{-1}Q_\lambda- \\ -(\alpha_{2+}^2+\nu_\lambda\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+$$

$$+ i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda}\Big\}\times$$
$$\times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \int_{\partial\Omega_r} \Big\{ i\alpha_{2+} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_r -$$
$$- (\alpha_{2+}^2 + \nu_r\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} +$$
$$+ i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r}\Big\}\times$$
$$\times e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})}\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \varepsilon_{53} e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} S_3(\alpha_1, \alpha_{2+})\Big\rangle = 0; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Big\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \Big\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2+}\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} +$$
$$+ i\left[3\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda}\Big\}\times$$
$$\times e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \int_{\partial\Omega_r} \Big\{ iD_{r1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2+}\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} +$$
$$+ i\left[3\alpha_{2+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r}\Big\}\times$$
$$\times e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})}\,\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \varepsilon_{53} S_3'(\alpha_1, \alpha_{2+})\Big\rangle = 0.$$

В подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2}.$$

Введем следующую систему обозначений, основываясь на (2.2) и (2.3):

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\},$$
$$\mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z_r} = \{z_{1r}, z_{2r}\},$$
$$\mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1) g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g,$$
$$y_{1\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 Q_\lambda,$$
$$y_{1r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 Q_r,$$
$$z_{1\lambda} = \mathbf{F}_1\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda,$$
$$z_{1r} = \mathbf{F}_1\frac{\partial u_r}{\partial x_2^r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r,$$
$$\mathbf{K}_\lambda = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2-})(t_\lambda - g_\lambda) = \\ = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}),$$
$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}'(\alpha_1, \alpha_{2-}),$$
$$k_{1r} = \varepsilon_{53r}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2+})(t_\lambda - g_\lambda) = \\ = \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}),$$
$$k_{2r} = \varepsilon_{53r} S_{3r}'(\alpha_1, \alpha_{2+}).$$

Будем считать, что боковые границы опор штолен свободны от напряжений, то есть $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_r = 0$. Тогда, введя обозначения,

$$\mathbf{Z}_{\lambda r} = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}, z_{1r}, z_{2r}\},$$
$$\mathbf{K}_{\lambda r} = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}, k_{1r}, k_{2r}\},$$

с учетом направлений дифференцирования получим для каждой опоры систему вида

$$(-1+\nu_\lambda)\alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2+}\left[(1-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} - \\ - \left\{(-1+\nu_r)\alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2+}\left[(1-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r}\right\}\times \\ \times e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} = -k_{1\lambda},$$

$$2\alpha_{2+} z_{1\lambda} + i\left[(1+\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} - \\ - \left\{2\alpha_{2+} z_{1r} + i\left[(1+\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r}\right\} e^{i\alpha_{2+} b_{2n}} = \\ = -k_{2\lambda};$$

$$(-1+\nu_r)\alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2-}\left[(1-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} - \\ - \left\{(-1+\nu_\lambda)\alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2-}\left[(1-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda}\right\}\times \\ \times e^{i\alpha_{2-} b_{2n-1}} = -k_{1r},$$

$$2\alpha_{2-} z_{1r} + i\left[(1+\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r} - \\ - \left\{2\alpha_{2-} z_{1\lambda} + i\left[(1+\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda}\right\} e^{i\alpha_{2-} b_{2n}} = \\ = -k_{2r}.$$

Или в матричном представлении, позволяющем записать решение системы

$$\mathbf{A}_{\lambda r}\mathbf{Z}_{\lambda r} = -\mathbf{K}_{\lambda r}, \quad \mathbf{Z}_{\lambda r} = -\mathbf{A}_{\lambda r}^{-1}\mathbf{K}_{\lambda r}.$$

3. Сопряжение пласта со слоями

Внеся решения этой системы в псевдодифференциальные уравнения, получим полный набор граничных условий на каждой границе. После этого они вносятся в правые части функциональных уравнений (2.1). В результате соотношения для опор могут быть представлены в следующем виде:

$$U_{2n-1} = -R^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\times \times\left[\int\limits_{\partial\Omega_n} \omega_{2n-1}+\varepsilon_{53}\mathbf{F}_2(t_{2n-1}-g_{2n-1})\right]. \quad (3.1)$$

Приняв теперь во внимание, что число опор равно $N+1$ с обозначениями сторон опор $\lambda = 2n-1$, $r = 2n$, в результате сопряжения блочных элементов опор с верхним и нижним слоями, получим следующую систему уравнений:

$$U_{31}(\alpha_1,\alpha_2) = -\varepsilon_6^{-1}K_{31}\left(\sum_{n=1}^{N} G_{2n-1} - G_0\right),$$

$$U_{32}(\alpha_1,\alpha_2) = \varepsilon_6^{-1}\upsilon\sum_{n=1}^{N} T_{2n-1}.$$

Здесь $U_{32}(\alpha_1,\alpha_2)$ — перемещения нижнего основания по закону постели Винклера.

Кроме этого имеют место соотношения

$$U_{2n-1} = -(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\left\langle \int\limits_{\partial\Omega_{\lambda 2n-1}} \omega_{\lambda 2n-1} - \int\limits_{\partial\Omega_{r2n-1}} \omega_{r2n-1} + \varepsilon_{53}S_{312n-1}(\alpha_1,\alpha_2)\right\rangle,$$

$$\omega_{\lambda 2n-1} = = e^{i\,\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n-1}}\left\{-\left[(\alpha_2^2+\nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{\lambda 2n-1}}{\partial x_2} + i\alpha_2\left[\alpha_2^2+(2-\nu)\alpha_1^2\right]u_{\lambda 2n-1}\right]\right\}\mathrm{d}x_1,$$

$$\omega_{r2n-1} = = e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n}}\left\{-\left[(\alpha_2^2+\nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{r2n-1}}{\partial x_2} + i\alpha_2\left[\alpha_2^2+(2-\nu_b)\alpha_1^2\right]u_{r2n-1}\right]\right\}\mathrm{d}x_1,$$

$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

В результате ряда преобразований, приходим к функциональному уравнению, описывающему поведение отдельно выбранной опоры

$$\left[\varepsilon_6^{-1}K_{31} + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\times \times(1+\upsilon^{-1}K_{31})\right]G_{2n-1} = = (\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\Big\langle\left[Q_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}}\right] + \varepsilon_6^{-1}K_{31}(\varepsilon_6^{-1}+\varepsilon_{53}\upsilon^{-1})G_0\Big\rangle.$$

Значение $t_{2n-1}(x_1,x_2) = \mathbf{F}_2^{-1}T_{2n-1}$ находится из соотношения

$$t_{2n-1}(x_1,x_2) = = \upsilon^{-1}\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}\mathbf{F}_2^{-1}K_{31}(G_0 - G_{2n-1}). \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}$ — проектор на областьΩ_{2n-1}. Последнее соотношение можно приближенно представить в виде

$$t_{2n-1}(x_1,x_2) = \upsilon^{-1}\mathbf{F}_2^{-1}K_{31}(G_0 - G_{2n-1}).$$

Это оправдано тем, что в статических задачах правая часть последнего выражения экспоненциально убывает при удалении от зоны контакта.

Для сведения функционального уравнения к системе интегральных уравнений, введем следующие обозначения:

$$\left[\varepsilon_6^{-1}K_{31} + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}(1+\upsilon^{-1}K_{31})\right] = = K(\alpha,\beta),$$

$$\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}\mathbf{F}_2^{-1}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\times \times\Big\langle\left[Q_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}}+Q_{2n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}}\right] + \varepsilon_6^{-1}K_{31}(\varepsilon_6^{-1}+\varepsilon_{53}\upsilon^{-1})G_0\Big\rangle = f_{2n-1}(x_1,x_2),$$

$$\mathbf{P}_{\Omega_{2n}}\mathbf{F}_2^{-1}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\times \times\Big\langle\left[Q_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n-1}}+Q_{2n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\alpha_2 b_{2n}}\right] + \varepsilon_6^{-1}K_{31}(\varepsilon_6^{-1}+\varepsilon_{53}\upsilon^{-1})G_0\Big\rangle = \phi_{2n}(x_1,x_2),$$

$$U_{2n-1} = -(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{-2}\times$$
$$\times\Big\langle(A_{2n-1}\alpha_2^3+B_{2n-1}\alpha_2^2+C_{2n-1}\alpha_2+D_{2n-1})\times$$
$$\times\, e^{i\alpha_2 b_{2n-1}}+$$
$$+\,(A_{2n}\alpha_2^3+B_{2n}\alpha_2^2+C_{2n}\alpha_2+D_{2n})e^{i\alpha_2 b_{2n}}+$$
$$+\,\varepsilon_{53}(T_{2n-1}-G_{2n-1})\Big\rangle,$$

$$(A_{2n-1}\alpha_2^3+B_{2n-1}\alpha_2^2+C_{2n-1}\alpha_2+D_{2n-1}) = = Q_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$(A_{2n}\alpha_2^3+B_{2n}\alpha_2^2+C_{2n}\alpha_2+D_{2n}) = = Q_{2n}(\alpha_1,\alpha_2).$$

Приняв во внимание наличие $N+1$ опоры, функциональное уравнение можно записать в виде интегрального уравнения [3,5]

$$\mathbf{K}g = \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}}\int_{-\infty}^{\infty} k(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{N} g_{2n-1}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 =$$
$$=\sum_{n=1}^{N} t_{2n-1}(x_1,x_2)+\sum_{n=2}^{N-1}\tau_{2n}(x_1,x_2),$$
$$n=1,2,\ldots,N, \quad (3.3)$$

$$k(x_1,x_2) =$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1,\alpha_2) =$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1,\xi_2)e^{ii(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2)}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

$$t_{2n-1}(x_1,x_2)\in\Omega_{2n-1}$$
$$(b_{2n-1}\leqslant x_2\leqslant b_{2n},\ |x_1|\leqslant\infty,$$
$$n=0,1,\ldots,N),$$

$$\tau_{2n}(x_1,x_2)\in\Omega_{2n}$$
$$(b_{2n}\leqslant x_2\leqslant b_{2n+1},\ |x_1|\leqslant\infty),$$

$$t_1(x_1,x_2)\in\Omega_0$$
$$(-\infty=b_1\leqslant x_2\leqslant b_2,\ |x_1|\leqslant\infty),$$

$$t_{2N-1}(x_1,x_2)\in\Omega_{2N}$$
$$(b_{2N-1}\leqslant x_2\leqslant\infty,\ |x_1|\leqslant\infty),$$

$$\tau_0(x_1,x_2)=\tau_{2N}(x_1,x_2)=0.$$

Здесь $\phi_{2n}(x,y)$ — новые неизвестные.

Для его исследования и решения применим метод факторизации, разработанный в [4,6]. При этом приняты обозначения факторизации функций по параметру α_2 в виде суммы и в виде произведения в форме

$$\Psi(\alpha_1,\alpha_2)=\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^+ + \{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^-,$$

$$\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^\pm = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(\alpha_1,\eta)}{(\eta-\alpha_2)}\,\mathrm{d}\eta,$$
$$\alpha_2\in C^\pm,$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2)=K_+(\alpha_1,\alpha_2)K_-(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$K_\pm(\alpha_1,\alpha_2) =$$
$$=\exp\left[\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\Psi(\alpha_1,\eta)}{(\eta-\alpha_2)}\,\mathrm{d}\eta\right],$$
$$\alpha_2\in C^\pm.$$

4. Другие постановки граничных задач

Выше детально рассмотрен случай граничной задачи для совокупности параллельных полостей для скалярного случая статических вертикальных воздействий. В случаях иных способов воздействий и типов контакта слоев с перегородками метод построения функциональных и интегральных уравнений аналогичен.

Приведем формулировки граничных задач для различных случаев, причем для всех их применим топологический алгоритм, использованный выше.

а. Случай гармонических вертикальных воздействий.

Область, занятая левой плитой, обозначается λ и описывается соотношениями $|x_1|\leqslant\infty$, $x_2\leqslant-\theta$, а занятая правой — индексом r и координатами $|x_1|\leqslant\infty$, $\theta\leqslant x_2$. Уравнение Кирхгофа для фрагментов b покрытия, $b=\lambda,r$, занимающих области Ω_b

с границами $\partial\Omega_b$, при вертикальных гармонических воздействиях напряжением $t_{3b}e^{-i\omega t}$ сверху и $g_{3b}e^{-i\omega t}$ снизу после исключения временного параметра имеет вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \varepsilon_{43b}\right)u_{3b} +$$
$$+ \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} = \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}\right]U_{3b},$$
$$U_{3b} = \mathbf{F_2}u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F_2}g_{3b},$$
$$T_{3b} = \mathbf{F_2}t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$
$$M_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right),$$
$$D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

$$Q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2-\nu_b)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2\partial x_2}\right) =$$
$$= f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b),$$
$$\frac{\partial u_{3b}}{H\partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b), \quad D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1-\nu_b^2)},$$
$$\varepsilon_{43b} = \omega^2\rho_b\frac{(1-\nu_b^2)12H^4}{Eh_b^2},$$
$$\varepsilon_{53b} = \frac{(1-\nu_b^2)12H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}.$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся плиты, имеет вид

$$u_3(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1}\sum_{n=1}^{2}\iint\limits_{\Omega_n} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\times$$
$$\times g_{3n}(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

$$x_1, x_2 \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, 3,$$
$$u_{31} = u_{3\lambda}, \quad u_{32} = g_{3r}, \quad u_{33} = u_{3\theta},$$
$$g_{31} = g_{3\lambda}, \quad g_{32} = g_{3r},$$
$$\Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant -\theta),$$
$$\Omega_r(|x_1| \leqslant \infty;\ \theta \leqslant x_2),$$
$$\Omega_\theta(|x_1| \leqslant \infty;\ -\theta \leqslant x_2 \leqslant \theta),$$

или

$$u_3(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_6}\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int K(\alpha_1, \alpha_2, x_3)G_{3n}(\alpha_1, \alpha_2)\times$$
$$\times e^{-i\langle\alpha, x\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$
$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$K(\alpha_1, \alpha_2, 0) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to \infty.$$

b. Случай статических горизонтальных воздействий.

Уравнения граничных задач для пластин имеют форму

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b - \varepsilon_{5b}\mathbf{g}_b = \varepsilon_{5b}\mathbf{t}_b,$$

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b =$$
$$= \begin{Vmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1b} & \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)u_{2b} \\ \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)u_{1b} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)u_{2b} \end{Vmatrix},$$

Каждая пластина рассматривается как многообразие с краем, причем $\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}\}$ — вектор перемещения точек пластин по касательной и нормали к торцам пластин лежит в их срединных плоскостях.

Обозначим

$$\mathbf{R}_{b0}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b =$$
$$= \begin{Vmatrix} \left(\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2\right)U_{1b} & \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b} \\ \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b} & \left(\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2\right)U_{2b} \end{Vmatrix},$$
$$\mathbf{U} = \mathbf{F}_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_2\mathbf{g}, \quad b = 1{,}2, \ldots, B,$$

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений имеет вид

$$\mathbf{R}_b = -\mathbf{R}_{b0}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b =$$
$$= \begin{Vmatrix} \left(\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2\right)U_{1b} & \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b} \\ \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b} & \left(\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2\right)U_{2b} \end{Vmatrix}$$
$$\mathbf{U} = \mathbf{F}_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_2\mathbf{g}, \quad b = 1, 2, \ldots, B,$$
$$-\mathbf{R}_{b0}(-i\alpha_1, -i\alpha_2).$$
$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1-\nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1+\nu_b),$$
$$\varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b},$$

$$g_{1b} = \mu_{0b}\left(\frac{\mathrm{d}u_{1b}}{\mathrm{d}x_3} + \frac{du_{3b}}{\mathrm{d}x_1}\right),$$

$$g_{2b} = \mu_{0b}\left(\frac{\mathrm{d}u_{2b}}{\mathrm{d}x_3} + \frac{\mathrm{d}u_{3b}}{\mathrm{d}x_2}\right),$$

$$\mu_{0b} = \frac{\mu_b}{H}, \quad x_3 = 0, \quad \mathbf{g} = \{g_{1b}, g_{2b}\}.$$

Приняты следующие обозначения: μ_b — модуль сдвига, ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, $\mathbf{g}$, $\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}\}$ — векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных воздействий соответственно, действующих по касательной к границе основания, как и перемещения, в областях Ω_b, где $b = \lambda$ для левой плиты и $b = r$ — для правой. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. На границах пластин в случае жесткого защемления краев выполняются условия

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0.$$

Выражения для нормальной N_{x_2} и касательной $T_{x_1x_2}$ составляющих напряжений к срединной плоскости на торцах пластин даются соответственно соотношениями

$$T_{x_1x_2} = \varepsilon_7\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

$$N_{x_2} = \varepsilon_8\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right),$$

$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1+\nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1-\nu^2)H}.$$

Для деформируемого основания, описываемого граничной задачей (2.1), применимы различные модели, даваемые соотношениями

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)\times$$
$$\times\, \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\langle\alpha, x\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta,$$

$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant -\theta),$$

$$\Omega_r(|x_1| \leqslant \infty;\ \theta \leqslant x_2),$$

$$\Omega_\theta(|x_1| \leqslant \infty;\ -\theta \leqslant x_2 \leqslant \theta),$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2,$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to \infty,$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}, \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{g},$$

$\mathbf{g}$ — вектор касательных напряжений под пластинами на границе основания.

Свойства матриц-функций $\mathbf{K}_{ks}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ для слоистой среды в статическом случае описаны в [4, 5].

c. Случай гармонических горизонтальных воздействий.

Рассмотрим случай гармонических воздействий на поверхность пластин, жестко сцепленных с основанием. Тогда после сокращения временного множителя $e^{-i\omega t}$ уравнения граничной задачи для пластин представимы в виде

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)\,\mathbf{u}_b = \begin{Vmatrix}\xi_{11} & \xi_{12}\\ \xi_{21} & \xi_{22}\end{Vmatrix},$$

$$\xi_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{4b}\right)u_{1b},$$

$$\xi_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{4b}\right)u_{2b},$$

$$\xi_{12} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)u_{2b},$$

$$\xi_{21} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)u_{1b}.$$

Преобразование Фурье дифференциальной части системы уравнений имеет вид

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b = -\begin{Vmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22}\end{Vmatrix},$$

$$\kappa_{11} = (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2 - \varepsilon_{4b})U_{1b},$$

$$\kappa_{22} = (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2 - \varepsilon_{4b})U_{2b},$$

$$\kappa_{12} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b}, \quad \kappa_{21} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b},$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F}\mathbf{g}_b \quad \mathbf{T}_b = \mathbf{F}\mathbf{t}_b.$$

$$\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}\}, \quad \mathbf{g}_b = \{g_{1b}, g_{2b}\},$$

$$\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}\}$$

Напряжения g_{1b}, g_{2b} и t_{1b}, t_{2b} действуют в касательной плоскости, причем g_{2b} и t_{2b} — в направлении по нормалей к торцам литосферных плит

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{g}_b,$$

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{F_2 t}_b, \quad b = \lambda, r,$$
$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1-\nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1+\nu_b),$$
$$\varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b}, \quad \varepsilon_{3b} = \frac{h_b^2}{12},$$
$$T_{x_1x_2} = \varepsilon_7 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$
$$N_{x_2} = \varepsilon_8 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right),$$
$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1+\nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1-\nu^2)H},$$
$$g_{1b} = \mu_{0b} \left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} \right),$$
$$g_{2b} = \mu_{0b} \left(\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} \right), \quad \mu_{0b} = \frac{\mu_b}{H},$$
$$x_3 = 0, \quad \mathbf{g} = \{g_{1b}, g_{2b}\}.$$

Приняты следующие обозначения: μ_b — модуль сдвига,ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{t}_b$ — векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных (g_{1b}, g_{2b}, t_{1b}, t_{2b}) воздействий соответственно, действующих по касательной к границе основания в областях Ω_b. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Здесь через N_{x_2} обозначены нормальные и через $T_{x_1x_2}$ — касательные составляющих напряжений к срединной плоскости на торцах пластин.

Для деформируемого основания, описываемого граничной задачей, применимы различные модели, даваемые соотношениями

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \times$$
$$\times \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2,$$
$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta,$$
$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$\Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant 0),$$
$$\Omega_r(|x_1| \leqslant \infty;\ 0 \leqslant x_2),$$
$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2, 3,$$
$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to \infty,$$
$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}, \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{g}.$$

Выводы

Таким образом, в работе доказано, что граничные задачи для слоистой среды с параллельными множественными полостями топологическим методом могут быть однотипно сведены к системе функциональных, а затем и интегральных уравнений с разностным ядром.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К теории влияния глобального фактора на прочность совокупности параллельных соединений // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 4. С. 412–419.
2. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В, Федоренко А.Г., Шестопалов В.Л.* К проблеме покрытий с трещинами в наноматериалах и сейсмологии // МТТ. 2013. № 5. С. 39-45.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.
4. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
7. *Баренблатт Г.И., Христианович С.А.* Об обрушении кровли при горных выработках // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1955. № 11. С. 73–82.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. 2012. Т. 447. № 1. С. 33–37.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K teorii vliyaniya global'nogo faktora na prochnost' sovokupnosti parallel'nykh soedineniy [About the theory of global factor influence on the strength of the connection of the set of layers]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Mechanics of Continuous Media], vol. 9, no. 4, pp. 412-419. (In Russian)
2. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V., Fedorenko A.G., Shestopalov V.L. K probleme pokrytiy s treshchinami v nanomaterialakh i seysmologii [On the problem of cracks in coatings with nanomaterials and seismology]. *Mekhanika*

tverdogo tela [Mechanics of Solids], 2013, no. 5, pp. 39–45. (In Russian)

3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K probleme fiziko-mekhanicheskogo predvestnika startovogo zemletryaseniya: mesto, vremya, intensivnost' [On the problem of physical and mechanical precursor starting earthquake: place, time, intensity]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. Academy of Sciences], 2016, vol. 466, no. 6, pp. 664–669. (In Russian)
4. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problem in elasticity theory for nonclassical fields]. Moscow, Nauka Pub., 1979, 320 p. (In Russian)
5. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problem in elasticity theory]. Moscow, Nauka Pub., 1974, 456 p. (In Russian)
6. Babeshko V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka, 1984, 256 p. (In Russian)
7. Barenblatt G.I., Khristianovich S.A. Ob obrushenii krovli pri gornykh vyrabotkakh [On the roof collapse at the mine workings]. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk* [Proc. of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences], 1955, no. 11, pp. 73–82. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O "virusnoy" teorii nekotorykh anomal'nykh prirodnykh yavleniy [On the "virus" theory of some abnormal natural phenomena]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. Academy of Sciences], 2012, vol. 447, no. 1, pp. 33–37. (In Russian)

Статья поступила 6 декабря 2017 г.