

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

О МЕТОДАХ ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ КОНТАКТИРУЮЩИХ  
ЛИТОСФЕРНЫХ СТРУКТУР

Колесников М. Н., Телятников И. С.

ABOUT THE METHODS FOR STUDYING THE DYNAMICS OF CONTACTING  
LITHOSPHERIC STRUCTURES

Kolesnikov M. N. \*, Telyatnikov I. S. \*\*,

\* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

\*\* Southern scientific center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia  
e-mail: kolesnikov@kubsu.ru

*Abstract.* The purpose of this work is the development of mechanical and mathematical methods for identifying faults as seismogenerating zones in the system of block divisibility of the earth's crust. In this paper we present an approach to study of the stress-strain state of lithospheric structures near faults based on their modeling with Kirchhoff plates on an elastic foundation.

We implemented method for solving problems for models of rectilinear faults in spatial and plane formulations based on the transformation of a differential operator. The method is represented by the example of the problem of vibration under the effect of the concentrated surface load of two extended plates with a common boundary on the surface of an elastic layer. The system of integro-differential equations is derived from the plates displacement equations, the relations between displacements and stresses on the surface of the elastic substrate, and the conditions of its conjugation with the coating, the transformation of the operator of this system of equations allows us to reduce it to a system of functional equations solved by the Wiener – Hopf method.

The described approach provides an analytical representation of the solution of the posed problem and can be used as a control method when checking the limit solutions of the problems for faults of complex shape based on the topological method of the block element. Numerical implementation of the developed algorithm made it possible to carry out model calculations and analyze the results with varying physical and mechanical characteristics of the plates and the elastic substrate.

The proposed approach makes it possible to analyze the resulting surface displacements under vibration effects for different contact conditions in the fault region.

Using of the described method will make it possible to draw conclusions applicable for studying the structure of faults in the upper part of the earth's crust about the influence of the fault type, physical and mechanical properties of the lithospheric structures on the nature of the wave process in the geological environment, in particular the waveform after passing through the fault.

*Keywords:* elastic foundation, composite coating, fault, vibration, factorization method

## Введение

На сегодняшний день в рамках моделей, основанных на применении концепции блоковой делимости литосферы [1, 2], получены интересные результаты, характеризующие зарождение и развитие сейсмических событий. Зачастую эпицентры землетрясений приуро-

чены к границам блоков различных рангов [3]. В работах [4–6] исследована возможность возникновения землетрясения, названного «стартовым», в результате концентрации сейсмогенерирующих контактных напряжений в области сближения и контакта литосферных структур. При этом для исследования граничных задач для систем уравнений в част-

Колесников Максим Николаевич, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kolesnikov@kubsu.ru

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Южного научного центра РАН, научный сотрудник Научно-исследовательского центра предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф; e-mail: ilux\_t@list.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края р\_юг\_а 16-41-230184, отдельные фрагменты — в рамках реализации программы Президиума РАН 1-33 Р проекты (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093)

ных производных (УЧП) использован метод блочного элемента [7, 8].

В настоящей работе также представлен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния литосферных структур вблизи разломов посредством моделирования их пластинами Кирхгофа на упругом основании. Реализован метод решения задач, описывающих такие модели для прямолинейных разломов, в пространственной и плоской постановках, основанный на преобразовании дифференциального оператора. Данный подход обеспечивает получение более простых представлений решения задачи, а также может применяться в качестве контрольного при проверке предельных решений задач для разломов сложной конфигурации, построенных на основе топологического метода [7]. В результате численной реализации разработанного алгоритма проведены расчеты и проанализированы полученные результаты при варьировании физико-механических характеристик пластин и упругой подложки.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается задача о вибрации двух контактирующих упругих пластин, занимающих полуплоскости, на поверхности упругого основания под действием поверхностной нагрузки на пластины вида  $\mathbf{t}(x_1, x_2) \exp(-i\omega t)$ ,  $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$ , заданной в ограниченной области. Декартова система координат связана со срединной плоскостью покрытия, ось  $Ox_3$  направлена по нормали вверх, а ось  $Ox_2$  совпадает с общей границей пластин. Положительная полуплоскость поверхности основания для  $x_3 = 0$ , занятая одной из пластин, обозначена через  $\Omega_+ = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$ , а отрицательная, занятая другой пластиной,  $\Omega_- = \{(x_1, x_2) | -\infty < x_1 < 0, -\infty < x_2 < \infty\}$ . Скалярный случай подобной задачи был рассмотрен авторами в [9].

Установившийся процесс колебаний пластин с частотой  $\omega$  описывается системами УЧП с постоянными коэффициентами [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{\pm,1}}{\partial x_1^2} + \frac{1 - \nu_{\pm}}{2} \frac{\partial^2 u_{\pm,1}}{\partial x_2^2} + \omega^2 \rho_{\pm} \frac{1 - \nu_{\pm}^2}{E_{\pm}} u_{\pm,1} + \\ + \frac{1 + \nu_{\pm}}{2} \frac{\partial^2 u_{\pm,2}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1 - \nu_{\pm}^2}{E_{\pm} h_{\pm}} p_{\pm,1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \nu_{\pm}}{2} \frac{\partial^2 u_{\pm,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_{\pm,2}}{\partial x_2^2} + \frac{1 - \nu_{\pm}}{2} \frac{\partial^2 u_{\pm,2}}{\partial x_1^2} + \\ + \omega^2 \rho_{\pm} \frac{1 - \nu_{\pm}^2}{E_{\pm}} u_{\pm,2} + \frac{1 - \nu_{\pm}^2}{E_{\pm} h_{\pm}} p_{\pm,2} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{\pm}^2}{12} \nabla^4 u_{\pm,3} - \omega^2 \rho_{\pm} \frac{1 - \nu_{\pm}^2}{E_{\pm}} u_{\pm,3} - \frac{1 - \nu_{\pm}^2}{E_{\pm} h_{\pm}} p_{\pm,3} = 0, \\ (x_1, x_2) \in \Omega_{\pm}. \end{aligned}$$

Здесь  $u_{\pm,1}(x_1, x_2)$ ,  $u_{\pm,2}(x_1, x_2)$  — перемещения срединной поверхности по направлениям горизонтальных осей,  $u_{\pm,3}(x_1, x_2)$  — по нормали к плоскости  $x_1 O x_2$ ;

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4};$$

$p_{\pm,k}(x_1, x_2)$  — интенсивности испытываемых пластинами нагрузок по направлениям  $x_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $\nu_{\pm}$  — коэффициенты Пуассона,  $\rho_{\pm}$  — плотности,  $h_{\pm}$  — толщины пластин,  $E_{\pm}$  — модули Юнга их материалов. Здесь и далее использованы обозначения работ [4–9], временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  опущен.

Далее в соотношениях (1.1) нагрузки  $p_{\pm,k}$  представляются как суммы соответствующих нагрузок  $t_{\pm,k}$ , действующих на верхнюю грань пластины, и контактных напряжений  $g_{\pm,k}$ , действующих со стороны упругой подложки,  $p_{\pm,k} = g_{\pm,k} + t_{\pm,k}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ .

В случае, когда упругая подложка не содержит дефектов, на ее поверхности между амплитудами перемещений и напряжений имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \times \\ \times \mathbf{g}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{u}(x_1, x_2) = \{u_j\}$  и  $\mathbf{g}(x_1, x_2) = \{g_j\}$ ,  $j = \overline{1, 3}$  — векторы амплитуд перемещений и напряжений соответственно;

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times \exp(-i\alpha_1 x_1) d\alpha_1 \exp(-i\alpha_2 x_2) d\alpha_2, \end{aligned}$$

$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$  — матрица Грина упругого основания;  $\sigma_1, \sigma_2$  — контуры в комплексной плоскости, выбираемые соответственно принципу предельного поглощения. Вид матриц Грина и способы их построения для разных типов слоистых упругих оснований приводятся в [11–13 и др.]. Так, для однородного

слоя с заземленной нижней гранью матрица  $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$  может быть представлена соотношением [14]

$$\mathbf{K} = \left[ (\mathbf{D}_1^+)^{-1} \mathbf{L}_2^+ - (\mathbf{D}_1^-)^{-1} \mathbf{L}_2^- \right]^{-1} \times \\ \times \left[ (\mathbf{D}_1^+)^{-1} \mathbf{D}_2^+ - (\mathbf{D}_1^-)^{-1} \mathbf{D}_2^- \right], \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{D}_m^\pm = \frac{i}{\mu} \mathbf{E}_m^\pm \mathbf{D}^\pm; \\ \mathbf{E}_m^\pm = \begin{pmatrix} e^{\pm i\alpha_{31}h_m} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pm i\alpha_{32}h_m} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pm i\alpha_{32}h_m} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D}^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \pm\alpha_{31} \\ 2\alpha_2 & -2\alpha_1 & 0 \\ \pm 2\alpha_{32} & 0 & -2\alpha_1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L}_m^\pm = \mathbf{E}_m^\pm \mathbf{L}^\pm;$$

$$\mathbf{L}^\pm = \begin{pmatrix} \pm\alpha_1\alpha_{31} & \pm\alpha_2\alpha_{31} & s \\ \pm\alpha_2\alpha_{32} & \mp\alpha_1\alpha_{32} & 0 \\ 2s + \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 & \mp 2\alpha_1\alpha_{32} \end{pmatrix};$$

$$\alpha_{3k} = \sqrt{\gamma_k^2 - \alpha^2}, \quad k, m = 1, 2;$$

$$\gamma_1 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu + \lambda}}; \quad \gamma_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}};$$

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2; \quad s = \frac{\gamma_2^2}{2} - \alpha^2;$$

$\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  — соответственно параметры Ламе и плотность слоя;  $h_1 < h_2 = 0$  — границы слоя в рассматриваемой системе координат ( $h_1 = -H$ ).

Полагается, что пластины сцеплены с подложкой жестко, т.е. на их границе векторы напряжений и перемещений непрерывны в областях контакта:  $\mathbf{u}_\pm(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{g}_\pm(x_1, x_2) = \mathbf{g}(x_1, x_2)$  для  $\mathbf{x} \in \Omega_\pm$ .

На стыке самих пластин, т.е. при  $x_1 = 0$  заданы граничные условия вида

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)|_{x_1=0+0} + \\ + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2)|_{x_1=0-0} = \\ = \mathbf{f}(x_2), \quad (1.4) \\ -\infty < x_2 < \infty.$$

Дифференциальные операторы  $\mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$ ,  $j = 1, 2$ , и функции  $\mathbf{f}(x_2)$  определяют характер взаимодействия пластин в области их соприкосновения [10].

## 2. Метод решения

Из систем (1.1), соотношений (1.2) и условий сопряжения подложки и покрытия выводятся системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\mathbf{R}_\pm(\partial x_1, \partial x_2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \times \\ \times \mathbf{g}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 - \mathbf{E}_\pm \mathbf{g}(x_1, x_2) = \\ = \mathbf{b}_\pm(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\pm. \quad (2.1)$$

Здесь

$$R_{11}^\pm = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{\pm,1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{\pm,4},$$

$$R_{22}^\pm = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{\pm,1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{\pm,4},$$

$$R_{33}^\pm = \varepsilon_{\pm,3} \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{\pm,4},$$

$$R_{12}^\pm = R_{21}^\pm = \varepsilon_{\pm,2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$R_{13}^\pm = R_{23}^\pm = R_{31}^\pm = R_{32}^\pm = 0,$$

$$\mathbf{E}_\pm = \text{diag} \{ -\varepsilon_{\pm,5}, -\varepsilon_{\pm,5}, \varepsilon_{\pm,5} \},$$

$$\mathbf{b}_\pm(x_1, x_2) = -\varepsilon_{\pm,5} \mathbf{t}_\pm(x_1, x_2),$$

$$\varepsilon_{\pm,1} = \frac{1 - \nu_\pm}{2}, \quad \varepsilon_{\pm,2} = \frac{1 + \nu_\pm}{2}, \quad \varepsilon_{\pm,3} = \frac{h_\pm^2}{12},$$

$$\varepsilon_{\pm,4} = \frac{\omega^2 \rho_\pm (1 - \nu_\pm^2)}{E_\pm}, \quad \varepsilon_{\pm,5} = \frac{1 - \nu_\pm^2}{E_\pm h_\pm}.$$

Используя свойство преобразования Фурье для свертки функций, можно представить (2.1) в виде

$$\mathbf{R}_\pm(\partial x_1, \partial x_2) \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ - \mathbf{E}_\pm \mathbf{g}(x_1, x_2) = \mathbf{b}_\pm(x_1, x_2), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_\pm,$$

где  $\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = V_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{g}(x_1, x_2)$ ,  $V_2$  — двумерное преобразование Фурье.

Нормализацию операторов (2.2) можно произвести путем выноса из них дифференциального оператора  $\mathbf{N}(\partial x_1, \partial x_2)$ , построенного с учетом вида элементов  $\mathbf{R}_\pm(\partial x_1, \partial x_2)$ . Так,

$$\mathbf{N}(\partial x_1, \partial x_2) = \text{diag} \{ \Delta - l_1^2, \Delta - l_1^2, (\Delta - l_1^2) (\Delta - l_2^2) \},$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad 0 < l_1 < l_2.$$

Применяя к (2.2) и оператору  $\mathbf{N}(\partial x_1, \partial x_2)$  преобразование Фурье  $V(\alpha_2)$  по переменной  $x_2$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\pm(\partial x_1, -i\alpha_2) \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times \exp(-i\alpha_1 x_1) d\alpha_1 - \mathbf{E}_\pm \bar{\mathbf{g}}(x_1, \alpha_2) = \\ = \bar{\mathbf{b}}_\pm(x_1, \alpha_2), \quad \pm x_1 > 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{R}_\pm(\partial x_1, -i\alpha_2) = V(\alpha_2) \mathbf{R}_\pm(\partial x_1, \partial x_2),$$

$$\bar{\mathbf{g}}(x_1, \alpha_2) = V(\alpha_2) \mathbf{g}(x_1, x_2),$$

$$\bar{\mathbf{b}}_\pm(x_1, \alpha_2) = V(\alpha_2) \mathbf{b}_\pm(x_1, x_2);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\partial x_1, -i\alpha_2) = V(\alpha_2) \mathbf{N}(\partial x_1, \partial x_2) = \\ = \text{diag} \{ N_1, N_1, N_2 \}, \end{aligned}$$

$$N_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \alpha_2^2 - l_1^2,$$

$$N_2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \alpha_2^2 - l_1^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \alpha_2^2 - l_2^2 \right).$$

Применяя  $\mathbf{N}^{-1}(\partial x_1, -i\alpha_2)$  к соотношениям (2.3), отбросив возрастающие составляющие при  $x_1 \rightarrow +\infty$  или  $x_1 \rightarrow -\infty$  соответственно области задания  $x_1$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{-1}(\partial x_1, -i\alpha_2) \mathbf{R}_\pm(\partial x_1, -i\alpha_2) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\alpha_1 x_1) d\alpha_1 - \\ - \mathbf{N}^{-1}(\partial x_1, -i\alpha_2) \mathbf{E}_\pm \bar{\mathbf{g}}(x_1, \alpha_2) = \mathbf{q}_{\pm,0}(x_1, \alpha_2) + \\ + \sum_{j=1}^4 C_{\pm,j}(\alpha_2) \mathbf{q}_{\pm,j}(x_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\pm x_1 > 0.$$

В результате проделанных операций в правых частях систем (2.4) находятся общие решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\partial x_1, -i\alpha_2) \mathbf{q}_\pm(x_1, \alpha_2) = \bar{\mathbf{b}}_\pm(x_1, \alpha_2), \\ \pm x_1 > 0, \end{aligned}$$

в соответствующих полуплоскостях убывающие на бесконечности. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\pm(x_1, \alpha_2) = \mathbf{q}_{\pm,0}(x_1, \alpha_2) + \\ + \sum_{j=1}^4 C_{\pm,j}(\alpha_2) \mathbf{q}_{\pm,j}(x_1, \alpha_2), \quad \mathbf{q}_{\pm,0}(x_1, \alpha_2) = \\ = \{ q_{\pm,0}^1, q_{\pm,0}^2, q_{\pm,0}^3 \}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_{\pm,1}(x_1, \alpha_2) = \{ e^{\mp \sqrt{l_1^2 + \alpha_2^2} x_1}, 0, 0 \};$$

$$\mathbf{q}_{\pm,2}(x_1, \alpha_2) = \{ 0, e^{\mp \sqrt{l_1^2 + \alpha_2^2} x_1}, 0 \};$$

$$\mathbf{q}_{\pm,3}(x_1, \alpha_2) = \{ 0, 0, e^{\mp \sqrt{l_1^2 + \alpha_2^2} x_1} \};$$

$$\mathbf{q}_{\pm,4}(x_1, \alpha_2) = \{ 0, 0, e^{\mp \sqrt{l_2^2 + \alpha_2^2} x_1} \}.$$

Правые части (2.4) следует продолжить на всю плоскость некоторыми вектор-функциями  $\mathbf{s}_\mp(x_1, \alpha_2)$ , регулярными соответственно в нижней и верхней полуплоскостях. Последующее применение преобразования Фурье по  $x_1$  приводит к функциональным уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{Q}_{+,0}(\alpha_1, \alpha_2) + \\ + \sum_{j=1}^4 C_{+,j}(\alpha_2) \mathbf{Q}_{+,j}(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{S}_-(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{Q}_{-,0}(\alpha_1, \alpha_2) + \\ + \sum_{j=1}^4 C_{-,j}(\alpha_2) \mathbf{Q}_{-,j}(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{S}_+(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times \\ \times [\mathbf{R}_+(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_+], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times \\ \times [\mathbf{R}_-(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_-]; \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = V_1(\alpha_1) \mathbf{N}(\partial x_1, -i\alpha_2),$$

$$\begin{aligned}
N_{11} &= N_{22} = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + l_1^2), \\
N_{33} &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + l_1^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + l_2^2), \\
N_{km} &= 0, \quad k, m = \overline{1,3}, \quad k \neq m; \\
\mathbf{R}_\pm(-i\alpha_1, -i\alpha_2) &= V_1(\alpha_1) \mathbf{R}_\pm(\partial x_1, -i\alpha_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\pm,j}(\alpha_1, \alpha_2) &= V_1(\alpha_1) [\mathbf{q}_{\pm,j}(x_1, \alpha_2)] = \\
&= \pm \int_0^{\pm\infty} \mathbf{q}_{\pm,j}(x_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_1 x_1) dx_1,
\end{aligned}$$

$$j = \overline{0,4};$$

$$\mathbf{Q}_{\pm 1}(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ \frac{\pm i}{\alpha_1 \pm i\sqrt{l_1^2 + \alpha_2^2}}, 0, 0 \right\},$$

$$\mathbf{Q}_{\pm,2}(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ 0, \frac{\pm i}{\alpha_1 \pm i\sqrt{l_1^2 + \alpha_2^2}}, 0 \right\},$$

$$\mathbf{Q}_{\pm,3}(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ 0, 0, \frac{\pm i}{\alpha_1 \pm i\sqrt{l_1^2 + \alpha_2^2}} \right\},$$

$$\mathbf{Q}_{\pm,4}(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ 0, 0, \frac{\pm i}{\alpha_1 \pm i\sqrt{l_2^2 + \alpha_2^2}} \right\};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) &= V^1(\alpha_1) \mathbf{s}_\pm(x_1, \alpha_2) = \\
&= \pm \int_0^{\pm\infty} \mathbf{s}_\pm(x_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_1 x_1) dx_1.
\end{aligned}$$

Из (2.4) можно получить соотношения для трансформант Фурье напряжений  $\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}_1^{-1} \left( \mathbf{Q}_{+,0} + \sum_{j=1}^4 C_{+,j}(\alpha_2) \mathbf{Q}_{+,j} + \mathbf{S}_- \right), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}_2^{-1} \left( \mathbf{Q}_{-,0} + \sum_{j=1}^4 C_{-,j}(\alpha_2) \mathbf{Q}_{-,j} + \mathbf{S}_+ \right), \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{Q}_{+,j}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $j = \overline{0,4}$ , и  $\mathbf{S}_+(\alpha_1, \alpha_2)$  — регулярные в верхней комплексной полуплоскости  $\alpha_1$  вектор-функции, а  $\mathbf{Q}_{-,j}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $j = \overline{0,4}$ , и  $\mathbf{S}_-(\alpha_1, \alpha_2)$  — в нижней как Фурье-образы вектор-функций с носителем на положительной и отрицательной полуоси соответственно. Выбрав контур  $\sigma$  достаточно близким к вещественной оси, введем в рассмотрение области  $\Theta_\pm$ , расположенные выше и

ниже  $\sigma$  соответственно. Тогда можно считать, что  $\mathbf{Q}_{+,j}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $j = \overline{0,4}$ ,  $\mathbf{S}_+(\alpha_1, \alpha_2)$  — регулярны при  $\alpha_1 \in \Theta_+$ , а  $\mathbf{Q}_{-,j}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $j = \overline{0,4}$ ,  $\mathbf{S}_-(\alpha_1, \alpha_2)$  — при  $\alpha_1 \in \Theta_-$ .

Исключив из соотношений (2.5), (2.6) интегральные характеристики напряжений  $\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2)$ , получим систему функциональных уравнений, решаемую методом Винера–Хопфа относительно неизвестных  $\mathbf{S}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{+,0} + \sum_{j=1}^4 C_{+,j}(\alpha_2) \mathbf{Q}_{+,j} + \mathbf{S}_- &= \\
= \mathbf{M} \left( \mathbf{Q}_{-,0} + \sum_{j=1}^4 C_{-,j}(\alpha_2) \mathbf{Q}_{-,j} + \mathbf{S}_+ \right). & \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{M}_1(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{M}_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$  стремится к диагональной с постоянными коэффициентами,

$$\mathbf{M} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mu_{11} = 1 + O(\alpha_1^{-1}),$$

$$\mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{13} = O(\alpha_1^{-1}), \quad \mu_{23} = O(\alpha_1^{-2}),$$

$$\mu_{31} = O(\alpha_1^{-3}), \quad \mu_{32} = O(\alpha_1^{-4}),$$

$$\mu_{22} = \varepsilon_{+,1}/\varepsilon_{-,1} + O(\alpha_1^{-1}),$$

$$\mu_{33} = \varepsilon_{+,3}/\varepsilon_{-,3} + O(\alpha_1^{-3}), \quad \alpha_1 \rightarrow \pm\infty.$$

При этом в некоторой криволинейной полосе, содержащей контур  $\sigma$ , элементы матрицы-функции  $\mathbf{M}$  регулярны и определитель её отличен от нуля, т.е. она может быть факторизована по параметру  $\alpha_1$  в виде произведения относительно контура  $\sigma$  [11]

$$\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{M}_-(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{M}_+(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.8)$$

Факторизация матрицы  $\mathbf{M}$  (2.8) составляет основную сложность применяемого подхода, для этого можно использовать методы, описанные в [11, 15]. Следуя алгоритму метода Винера–Хопфа, перенеся регулярные в  $\Theta_+$  слагаемые в левую часть, а в области  $\Theta_-$  — в

правую, используя обобщенную теорему Ливилля [16], получим систему

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_+ \mathbf{S}_+ - \left\{ (\mathbf{M}_-)^{-1} \mathbf{Q}_{+,0} \right\}^+ + \left\{ \mathbf{M}_+ \mathbf{Q}_{-,0} \right\}^+ - \\ & - \sum_{j=1}^4 C_{+,j}(\alpha_2) \left\{ (\mathbf{M}_-)^{-1} \mathbf{Q}_{+,j} \right\}^+ + \\ & + \sum_{j=1}^4 C_{-,j}(\alpha_2) \left\{ \mathbf{M}_+ \mathbf{Q}_{-,j} \right\}^+ = 0, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}_-)^{-1} \mathbf{S}_- - \left\{ \mathbf{M}_+ \mathbf{Q}_{-,0} \right\}^- + \left\{ (\mathbf{M}_-)^{-1} \mathbf{Q}_{+,0} \right\}^- - \\ & - \sum_{j=1}^4 C_{-,j}(\alpha_2) \left\{ \mathbf{M}_+ \mathbf{Q}_{-,j} \right\}^- + \\ & + \sum_{j=1}^4 C_{+,j}(\alpha_2) \left\{ (\mathbf{M}_-)^{-1} \mathbf{Q}_{+,j} \right\}^- = 0. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Здесь факторизация в виде суммы вектор-функций производилась покомпонентно.

Из полученной системы можно найти вектор-функции  $\mathbf{S}_+(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{S}_-(\alpha_1, \alpha_2)$ , внеся которые в соотношения (2.6), получим представление Фурье-образов напряжений на поверхности упругого слоя. Соотношения (1.2) в интегральной форме могут быть записаны как

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.11)$$

где

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = V_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{u}(x_1, x_2).$$

Используя (2.9), (2.11) (или (2.10), (2.11)) можно записать выражения для интегральных характеристик амплитуд перемещений на поверхности подложки, в которые линейно входят восемь неизвестных функций  $C_{\pm,j}(\alpha_2)$ ,  $j = \overline{1,4}$ , определяемых из условий стыковки пластин. В результате ряда преобразований получим следующее представление  $\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{U}_0(\alpha_1, \alpha_2) + \\ &+ \sum_{j=1}^4 [C_{+,j}(\alpha_2) \mathbf{U}_{+,j}(\alpha_1, \alpha_2) + \\ &+ C_{-,j}(\alpha_2) \mathbf{U}_{-,j}(\alpha_1, \alpha_2)], \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{P} \left( \mathbf{Q}_{+,0} + \mathbf{M}_- \left[ \left\{ \mathbf{M}_+ \mathbf{Q}_{-,0} \right\}^- - \left\{ (\mathbf{M}_-)^{-1} \mathbf{Q}_{+,0} \right\}^- \right] \right),$$

$$\mathbf{U}_{+,j} = \mathbf{P} \left( \mathbf{Q}_{+,j} - \mathbf{M}_- \left\{ (\mathbf{M}_-)^{-1} \mathbf{Q}_{+,j} \right\}^- \right),$$

$$\mathbf{U}_{-,j} = \mathbf{P} \mathbf{M}_- \left\{ \mathbf{M}_+ \mathbf{Q}_{-,j} \right\}^-, \quad \mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{M}_1^{-1}.$$

Неизвестные коэффициенты  $C_{\pm,j}(\alpha_2)$ ,  $j = \overline{1,4}$ , находятся из граничных условий (2.9), при этом к соотношению (2.12) для интегральных характеристик амплитуд перемещений  $\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2)$  по параметру  $\alpha_1$  применяется обратное преобразование Фурье  $V^{-1}(x_1)$ , а к условиям (2.9) — прямое преобразование  $V(\alpha_2)$  по переменной  $x_2$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(x_1, \alpha_2) &= \\ &= \bar{\mathbf{u}}_0(x_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^4 C_{+,j}(\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{+,j}(x_1, \alpha_2) + \\ &+ \sum_{j=1}^4 C_{-,j}(\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{-,j}(x_1, \alpha_2), \quad (2.13) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\mathbf{u}}(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_0(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) \mathbf{U}_0(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{\pm,j}(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1) \mathbf{U}_{\pm,j}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$j = \overline{1,4};$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0+0} + \\ & + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0-0} = \\ & = \mathbf{F}(\alpha_2), \quad (2.14) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{L}_j(\partial x_1, -i\alpha_2) = V(\alpha_2) \mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2),$$

$$j = 1, 2,$$

$$\mathbf{F} = V(\alpha_2) \mathbf{f}.$$

В результате подстановки (2.13) в (2.14) приходим к линейной системе для определения неизвестных  $C_{\pm,j}(\alpha_2)$ ,  $j = \overline{1,4}$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 C_{+,j}(\alpha_2) \times \\ & \times \left[ \mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{+,j}(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0+0} + \right. \\ & \left. + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{+,j}(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0-0} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^4 C_{-,j}(\alpha_2) \times \\ & \times \left[ \mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{-,j}(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0+0} + \right. \\ & \left. + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{-,j}(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0-0} \right] = \\ & = \mathbf{F}(\alpha_2) - \mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_0(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0+0} - \\ & - \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_0(x_1, \alpha_2)|_{x_1=0-0}. \end{aligned}$$

Амплитуды смещений поверхности системы покрытие/подложка находятся применением к  $\bar{\mathbf{u}}(x_1, \alpha_2)$  (2.13) обращения Фурье

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = V^{-1}(x_2) \bar{\mathbf{u}}(x_1, \alpha_2), \quad x_1 \neq 0.$$

### 3. Решение задачи для плоского случая

Рассматривается задача о вертикальных колебаниях пластин на поверхности упругого слоя с заземленной нижней гранью в плоском случае. В качестве внешнего воздействия выбрана сосредоточенная нагрузка, действующая на правую пластину, с амплитудой  $t_+(x_1) = A\delta(x_1 - x_1^0)$ ,  $x_1^0 > 0$  — координата точки приложения нагрузки,  $A > 0$  — её интенсивность;  $t_-(x_1) = 0$ .

Уравнения колебания пластин (1.1) принимают вид

$$R_{\pm}(\partial x_1) u_{\pm}(x_1) - \varepsilon_{\pm,5} g_{\pm}(x_1) = b_{\pm}(x_1), \quad (3.1)$$

$$\pm x_1 > 0,$$

где  $u_{\pm}(x_1)$  и  $g_{\pm}(x_1)$  — амплитуды перемещений и контактных напряжений на границе покрытия и подложки;

$$R_{\pm}(\partial x_1) = \varepsilon_{\pm,3} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \varepsilon_{\pm,4};$$

$$b_{\pm}(x_1) = -\varepsilon_{\pm,5} t_{\pm}(x_1).$$

В рассматриваемой задаче соотношения для упругой подложки имеют вид

$$u(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi_1) g(\xi_1) d\xi_1,$$

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,$$

где  $u(x_1)$  и  $g(x_1)$  — перемещения и напряжения на поверхности упругого слоя соответственно; функция Грина  $K(\alpha_1) = \mathbf{K}_{3,3}(\alpha_1, 0)$  (1.2). В трансформантах Фурье последнее соотношение можно записать

$$U(\alpha_1) = K(\alpha_1) G(\alpha_1), \quad \alpha_1 \in \sigma, \quad (3.2)$$

где

$$U(\alpha_1) = V(\alpha_1) u(x_1),$$

$$G(\alpha_1) = V(\alpha_1) g(x_1).$$

Условия сопряжения подложки с пластинами покрытия принимают вид

$$u_{\pm}(x_1) = u(x_1), \quad g_{\pm}(x_1) = g(x_1), \quad (3.3)$$

$$\pm x_1 > 0.$$

Из (2.12) для интегральной характеристики перемещений можно получить выражение Фурье-образа вертикальной компоненты перемещений

$$\begin{aligned} U = & KM_1^{-1} \left( Q_{+,0} + \sum_{j=1}^2 C_{+,j} Q_{+,j} + \right. \\ & + M_- \left[ \{M_+ Q_{-,0}\}^- - \left\{ (M_-)^{-1} Q_{+,0} \right\}^- + \right. \\ & + \sum_{j=1}^2 C_{-,j} \{M_+ Q_{-,j}\}^- - \\ & \left. \left. - \sum_{j=1}^2 C_{+,j} \left\{ (M_-)^{-1} Q_{+,j} \right\}^- \right] \right), \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \in \sigma,$$

где

$$\begin{aligned} M_j(\alpha_1) = & \\ = & N^{-1}(-i\alpha_1) [R_{\pm}(-i\alpha_1) K(\alpha_1) - \varepsilon_{\pm,5}], \end{aligned}$$

причем индекс «+» соответствует  $j = 1$ , «-» —  $j = 2$ ;

$$N(-i\alpha_1) = (\alpha_1^2 + l_1^2)(\alpha_1^2 + l_2^2) = V(\alpha_1) N(\partial x_1);$$

$$N(\partial x_1) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - l_1^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - l_2^2 \right);$$

$$l_2 > l_1 > 0;$$

$$R_{\pm}(-i\alpha_1) = \varepsilon_{\pm,3}\alpha_1^4 - \varepsilon_{\pm,4};$$

$$M(\alpha_1) = M_1(\alpha_1) M_2^{-1}(\alpha_1);$$

$M_{\pm}(\alpha_1)$  — множители, получаемые в результате факторизации относительно контура  $\sigma$  функции  $M(\alpha_1)$  в виде произведения,

$$M(\alpha_1) = M_-(\alpha_1) M_+(\alpha_1);$$

$Q_{\pm,0}(\alpha_1)$  и  $Q_{\pm,j}(\alpha_1)$ ,  $j = 1, 2$  — Фурье-образы составляющих общих решений дифференциальных уравнений  $N(\partial x_1) q_{\pm}(x_1) = b_{\pm}(x_1)$ ,  $\pm x_1 > 0$ , убывающих в областях их определения;

$$b_+(x_1) = -\varepsilon_{+,5} A \delta(x_1 - x_1^0); \quad b_-(x_1) = 0;$$

$C_{\pm j}$ ,  $j = 1, 2$  — произвольные постоянные.

Нетрудно убедиться, что

$$q_-(x_1) = C_{-,1} e^{l_1 x_1} + C_{-,2} e^{l_2 x_1}, \quad x_1 < 0,$$

$$q_+(x_1) = q_{+,0}(x_1) + C_{+,1} e^{-l_1 x_1} + C_{+,2} e^{-l_2 x_1}, \quad x_1 > 0.$$

Откуда

$$Q_{-,0}(\alpha_1) = 0,$$

$$Q_{+,0}(\alpha_1) = V(\alpha_1) q_{+,0}(x_1),$$

$$Q_{\pm,j}(\alpha_1) = V(\alpha_1) \left[ e^{\mp l_j x_1} \right] = \frac{\pm i}{\alpha_1 \pm i l_j}.$$

Можем записать выражение для внешних нагрузок  $b_+(x_1)$ , воспользовавшись интегральным представлением  $\delta$ -функции

$$b_+(x_1) = -\frac{\varepsilon_{+,5} A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_1(x_1^0 - x_1)} d\alpha_1 = V^{-1}(x_1) B_+(\alpha_1), \quad x_1 > 0.$$

При этом частное решение  $q_{+,0}(x_1)$  ОДУ  $N(\partial x_1) q_+(x_1) = b_+(x_1)$  запишется

$$q_{+,0}(x_1) = \frac{\varepsilon_{+,5} A}{4(l_1^2 - l_2^2)} \left[ (1 + \text{sign}(x_1 - x_1^0)) \times \left( \frac{e^{-l_1(x_1 - x_1^0)}}{l_1} - \frac{e^{-l_2(x_1 - x_1^0)}}{l_2} \right) + (1 - \text{sign}(x_1 - x_1^0)) \times \left( \frac{e^{l_1(x_1 - x_1^0)}}{l_1} - \frac{e^{l_2(x_1 - x_1^0)}}{l_2} \right) \right], \quad x_1 > 0,$$

а его трансформанта Фурье  $Q_{+,0}(\alpha_1)$  имеет вид

$$Q_{+,0}(\alpha_1) = \frac{\varepsilon_{+,5} A}{(\alpha_1^2 + l_1^2)(\alpha_1^2 + l_2^2) 2l_1 l_2 (l_2^2 - l_1^2)} \times \left[ i\alpha_1 \left( l_1 e^{-x_1^0 l_2} (\alpha_1^2 + l_1^2) - l_2 e^{-x_1^0 l_1} (\alpha_1^2 + l_2^2) \right) + l_1 l_2 \left( e^{-x_1^0 l_1} (l_2^2 + \alpha_1^2) - e^{-x_1^0 l_2} (l_1^2 + \alpha_1^2) \right) \right] - \frac{\varepsilon_{+,5} A e^{i x_1^0 \alpha_1}}{(\alpha_1^2 + l_1^2)(\alpha_1^2 + l_2^2)}.$$

Последнее выражение может быть представлено в виде суммы простых дробей

$$Q_{+,0}(\alpha_1) = \frac{a_1 e^{i x_1^0 \alpha_1} + a_2}{\alpha_1 - i l_1} + \frac{a_3 e^{i x_1^0 \alpha_1} + a_4}{\alpha_1 - i l_2} + \frac{a_5 e^{i x_1^0 \alpha_1} + a_6}{\alpha_1 + i l_1} + \frac{a_7 e^{i x_1^0 \alpha_1} + a_8}{\alpha_1 + i l_2}, \quad (3.4)$$

$$a_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, 8}.$$

Факторизуем  $M(\alpha_1)$  относительно контура  $\sigma$ , отклоняющегося в комплексную плоскость при обходе вещественных полюсов [11, 12], в виде произведения  $M(\alpha_1) = M_- M_+$ . Произведем приближенную факторизацию, аппроксимировав  $M(\alpha_1)$  функцией  $\bar{M}(\alpha_1)$ . Четные функции  $K(\alpha_1)$ ,  $M_1(\alpha_1)$  и  $M_2(\alpha_1)$  имеют конечное число однократных вещественных полюсов и нулей. Воспользуемся для них обозначениями:  $p_j$ ,  $j = \overline{1, N_p}$  — положительные полюсы  $K(\alpha_1)$  (вещественные полюсы  $M_1$  и  $M_2$  совпадают с полюсами  $K$ );  $z_{0,j}$ ,  $j = \overline{1, N_z^0}$  — вещественные положительные нули  $K$ ;  $z_{k,j}$ ,  $j = \overline{1, N_z^k}$  — вещественные положительные нули  $M_k$ . Введем функции:

$$K_0(\alpha_1) = \Pi_0^{-1}(\alpha_1) K,$$

$$M_{k,0}(\alpha_1) = \Pi_k^{-1}(\alpha_1) M_k, \quad k = 1, 2.$$

Здесь

$$\Pi_0(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_p} \prod_{j=1}^{N_z^0} (\alpha_1^2 - z_{0,j}^2)}{(\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_z} \prod_{j=1}^{N_p} (\alpha_1^2 - p_j^2)};$$

$$\Pi_k(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_p} \prod_{j=1}^{N_z^k} (\alpha_1^2 - z_{k,j}^2)}{(\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_z} \prod_{j=1}^{N_p} (\alpha_1^2 - p_j^2)};$$

$$l_3 > l_2.$$

Четные функции  $K_0(\alpha_1)$  и  $M_{k,0}(\alpha_1)$  ( $k = 1, 2$ ) не имеют нулей и полюсов на контуре  $\sigma$  и вещественной оси и на бесконечности ведут себя как  $O(\alpha_1^{-1})$ . Аппроксимировав функции

$$\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + l_4^2}}{\kappa_0} K_0(\alpha_1), \quad \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + l_4^2}}{\kappa_k} M_{k,0}(\alpha_1)$$

полиномами Бернштейна одинаковой степени  $N_A$  [11], получим

$$K_0(\alpha_1) \approx \bar{K}_0(\alpha_1) = \frac{\kappa_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + l_4^2}} \frac{\Pi_{A0}^-(\alpha_1) \Pi_{A0}^+(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_A}},$$

$$M_{k,0}(\alpha_1) \approx \bar{M}_{k,0}(\alpha_1) = \frac{\kappa_k}{\sqrt{\alpha_1^2 + l_4^2}} \frac{\Pi_{A,k}^-(\alpha_1) \Pi_{A,k}^+(\alpha_1)}{(\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_A}},$$

$$k = 1, 2,$$

$$\Pi_{A,m}^\pm \equiv \Pi_{A,m}^\pm(\alpha_1) = \prod_{j=1}^{N_A} (\alpha_1 \pm z_{m,j}^A),$$

$$m = \overline{0, 2}.$$

Здесь  $l_4 > l_3$ ;

$$\kappa_0 = \lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \alpha_1 K(\alpha_1); \quad \kappa_k = \lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \alpha_1 M_k(\alpha_1),$$

$z_{m,j}^A$ ,  $m = \overline{0, 2}$  — нули аппроксимирующих полиномов. Таким образом,

$$K(\alpha_1) \approx \bar{K}(\alpha_1) = \Pi_0(\alpha_1) \bar{K}_0(\alpha_1),$$

$$M_k(\alpha_1) \approx \bar{M}_k(\alpha_1) = \Pi_k(\alpha_1) \bar{M}_{k,0}(\alpha_1).$$

А аппроксимирующая  $M(\alpha_1)$  функция примет вид

$$M(\alpha_1) \approx \bar{M}(\alpha_1) = \frac{\kappa_1 (\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_z^2} \Pi_1^+ \Pi_1^- \Pi_{A,1}^+ \Pi_{A,1}^-}{\kappa_2 (\alpha_1^2 + l_3^2)^{N_z^1} \Pi_2^+ \Pi_2^- \Pi_{A,2}^+ \Pi_{A,2}^-},$$

$$\alpha_1 \in \sigma,$$

$$\Pi_k^\pm \equiv \Pi_k^\pm(\alpha_1) = \prod_{j=1}^{N_z^k} (\alpha_1^2 - z_{k,j}^2), \quad k = 1, 2.$$

Факторизация в виде произведения функции  $\bar{M}(\alpha_1)$  относительно контура  $\sigma$ , который обходит снизу вещественные положительные особенности и сверху — отрицательные, представляется следующим образом:

$$M_\pm(\alpha_1) \approx \bar{M}_\pm(\alpha_1) = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \frac{(\alpha_1 \pm il_3)^{N_z^2} \Pi_1^\pm \Pi_{A,1}^\pm}{(\alpha_1 \pm il_3)^{N_z^1} \Pi_2^\pm \Pi_{A,2}^\pm}.$$

Выражения для  $\{\bar{M}_+ Q_{-,0}\}^-$ ,  $\{\bar{M}_+ Q_{-,j}\}^-$ ,  $\{\bar{M}_-^{-1} Q_{+,0}\}^-$ ,  $\{\bar{M}_-^{-1} Q_{+,j}\}^-$  получаются в результате факторизации функций, стоящих в фигурных скобках, в виде сумм относительно контура  $\sigma$  [11]. Функции, факторизуемые в виде суммы, принимают вид

$$\bar{M}_+ Q_{-,0} = 0,$$

$$\bar{M}_+ Q_{-,j} = -i \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \frac{(\alpha_1 + il_3)^{N_z^2} \Pi_1^+ \Pi_{A,1}^+}{(\alpha_1 - il_j) (\alpha_1 + il_3)^{N_z^{\bar{M}_1}} \Pi_2^+ \Pi_{A,2}^+},$$

$$\bar{M}_-^{-1} Q_{+,j} = i \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \frac{(\alpha_1 - il_3)^{N_z^1} \Pi_2^- \Pi_{A,2}^-}{(\alpha_1 + il_j) (\alpha_1 - il_3)^{N_z^2} \Pi_1^- \Pi_{A,1}^-},$$

$$j = 1, 2,$$

$$\bar{M}_-^{-1} Q_{+,0} = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \frac{(\alpha_1 - il_3)^{N_z^1} \Pi_2^- \Pi_{A,2}^-}{(\alpha_1 - il_3)^{N_z^2} \Pi_1^- \Pi_{A,1}^-} Q_{+,0}.$$

где  $Q_{+,0}$  представлено в виде (3.4). Таким образом,

$$\begin{aligned} \{\bar{M}_+ Q_{-,0}\}^- &= 0, \\ \{\bar{M}_+ Q_{-,j}\}^- &= \frac{\operatorname{res}_{\alpha_1=il_j} \bar{M}_+ Q_{-,j}}{\alpha_1 - il_j}, \\ \{\bar{M}_-^{-1} Q_{+,0}\}^- &= \sum_{\xi \in \Xi} \frac{\operatorname{res}_{\alpha_1=\xi} \bar{M}_-^{-1} Q_{+,0}}{\alpha_1 - \xi}, \\ \{\bar{M}_-^{-1} Q_{+,j}\}^- &= \sum_{\xi \in \Xi} \frac{\operatorname{res}_{\alpha_1=\xi} \bar{M}_-^{-1} Q_{+,j}}{\alpha_1 - \xi}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi &= \{il_1; il_2; il_3; \\ & z_{1,j} : j = \overline{1, N_z^1}; z_{1,j}^A : j = \overline{1, N_A}\}. \end{aligned}$$

В результате для приближенных значений интегральных характеристик смещений при вертикальных колебаниях пластин приходим к выражению

$$\begin{aligned} U &\approx \bar{U} = \\ &= \bar{K} \bar{M}_1^{-1} \left( Q_{+,0} + \sum_{j=1}^2 C_{+,j} Q_{+,j} + \right. \\ &+ \bar{M}_- \left[ \{\bar{M}_+ Q_{-,0}\}^- - \{\bar{M}_-^{-1} Q_{+,0}\}^- + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^2 C_{-,j} \{\bar{M}_+ Q_{-,j}\}^- - \\ &\left. \left. - \sum_{j=1}^2 C_{+,j} \{\bar{M}_-^{-1} Q_{+,j}\}^- \right] \right). \end{aligned}$$

Здесь  $K(\alpha_1)$  и  $M_1(\alpha_1)$  также заменены аппроксимациями  $\bar{K}(\alpha_1)$  и  $\bar{M}_1(\alpha_1)$ , что обеспечивает возможность аналитического обращения преобразования Фурье, откуда могут быть найдены приближенные значения смещений, в которые входят неизвестные постоянные  $C_{\pm,j}$  ( $j = 1, 2$ )

$$u(x_1) \approx V^{-1}(x_1) \bar{U}(\alpha_1), \quad x_1 \neq 0.$$

Чтобы получить окончательное решение, последнее соотношение, содержащее коэффициенты  $C_{\pm,j}$  ( $j = 1, 2$ ), следует подставить в граничные условия на стыке пластин вида (1.4).

## Заключение

В результате численной реализации разработанных алгоритмов для ряда задач проведены расчеты и проанализированы полученные результаты при варьировании физико-механических характеристик пластин и упругой подложки. На рис. 1 приведены результаты решения плоской задачи вышеизложенным методом.

Приведенные графики получены для следующих модельных безразмерных (здесь и далее помечены чертой) параметров подложки:  $\bar{\rho} = 1$ ,  $\bar{\mu} = 0,67$ ,  $\nu = 0,125$ ,  $\bar{H} = 5$ . Для пластин  $\bar{\rho}_+ = \bar{\rho}_- = 1$ ,  $\bar{\mu}_+ = 1$ ,  $\nu_+ = \nu_- = 0,125$ ,  $\bar{h}_+ = \bar{h}_-$ . Безразмерная частота определяется формулой

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho_+ \omega^2 h_+^2}{\mu_+}, \quad \bar{x}_0 = 5.$$

На стыке пластин заданы условия непрерывности поперечных сил и смещений, изгибающие моменты равны нулю. На верхнем графике правая пластина более жесткая, на нижнем — менее жесткая, на среднем — жесткость пластин одинакова.

Полученные результаты позволили выявить характер распространения гармонического сигнала в рассматриваемой структуре для однотипных и разнотипных пластин при различных свойствах подложки и условиях контакта. Непосредственно на разломе определены конфигурации прохождения сигнала, которые могут служить для идентификации типа разлома.

Развитие механико-математических методов идентификации разломов как сейсмогенерирующих зон в системе блоковой делимости земной коры на примере рассматриваемых моделей позволяет для криволинейных участков границ литосферных плит строить кусочно-линейные аппроксимации, используя для каждого прямолинейного участка описанные подходы.

## Литература

1. *Садовский М.А.* Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 4. С. 829–831.
2. *Садовский М.А., Красный Л.И.* Блоковая тектоника литосферы // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1451–1454.
3. *Oparin V.N., Kurlenya M.V.* Gutenberg velocity section of the earth and its possible geomechanical explanation. I. Zonal

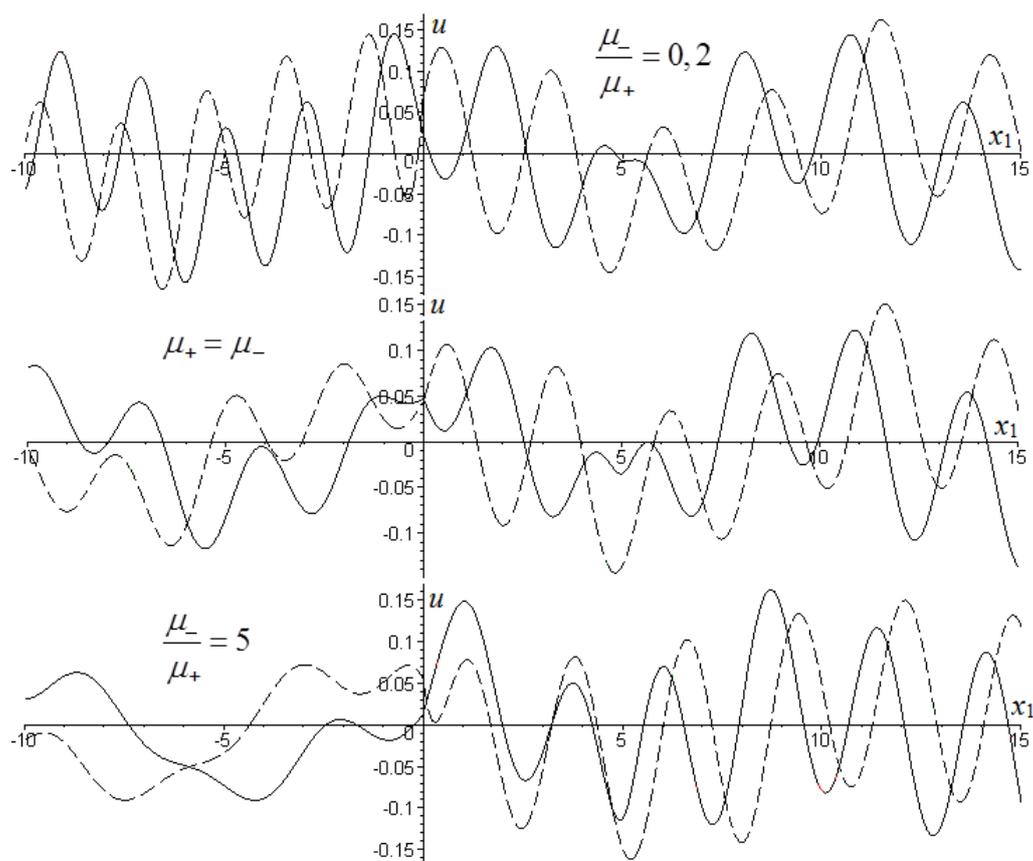


Рис. 1. Графики вещественной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) части амплитуды колебаний поверхности системы для  $\bar{\omega} = 2$

- disintegration and the hierarchical series of geoblocks // J. of Mining Science. 1994. Vol. 30. No. 2. P. 97–108.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Влияние состояния разломов литосферных плит на стартовое землетрясение // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 1. С. 24–38.
  5. *Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V.* Properties of “started” earthquakes // Doklady Physics. 2016. Vol. 61. No. 4. P. 188–191.
  6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Стартовое землетрясение при гармонических воздействиях // ДАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 37–40.
  7. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Block elements and analytical solutions of boundary-value problems for sets of differential equations // Doklady Physics. 2014. Vol. 59. No. 1. P. 30–34.
  8. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Gorshkova E.M., Gladskoi I.B., Grishenko D.V., Telyatnikov I.S.* Block element method for body, localizations and resonances // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 2. С. 13–19.
  9. *Колесников М.Н., Телятников И.С.* К методам исследования разломов в условиях вибрационных воздействий // Научный журнал КубГАУ. 2016. № 7. С. 647–659. Электронный ресурс: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/33.pdf> (дата обращения 21.11.2017).
  10. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
  11. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
  12. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Прягина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
  13. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
  14. *Павлова А.В., Рубцов С.Е.* Исследование многослойных материалов при наличии нарушений сплошности соединений // Экологиче-

ский вестник научных центров Черноморско-го экономического сотрудничества. 2004. № 3. С. 19–22.

15. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Factorization formulas for some meromorphic matrix functions // *Doklady Mathematics*. 2004. Vol. 70. No 3. P. 963–965.
  16. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 749 с.
- ### References
1. Sadovskiy M.A. Estestvennaja kuskovatost' gornoj porody [Natural lumpiness of rocks]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proc. of the USSR Academy of Sciences], 1979, vol. 247, no 4, pp. 829–831. (In Russian)
  2. Sadovskiy M.A., Krasnyi L.I. Blokovaja tektonika litosfery [Block tectonics of lithosphere]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proc. of the USSR Academy of Sciences], 1986, vol. 287, no. 6, pp. 1451–1454. (In Russian)
  3. Oparin V.N., Kurlenya M.V. Gutenberg velocity section of the earth and its possible geomechanical explanation. I. Zonal disintegration and the hierarchical series of geoblocks. *J. of Mining Science*, 1994, vol. 30, no. 2, pp. 97–108.
  4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Vlijanie sostojaniya razlomov litosfernyh plit na startovoe zemletrjasenie [Influence of the state of faults in lithospheric plates on the starting earthquake] // *PNRPU Mechanics bulletin*. 2017. No 1. P. 24–38. (In Russian)
  5. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Properties of “started” earthquakes. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 4, pp. 188–191.
  6. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Startovoe zemletrjasenie pri garmonicheskikh vozdeystvijah [Startup earthquake with harmonic vibrations]. *Doklady Akademii nauk* [Doklady of Academy of Sciences], 2016, vol. 471, no. 1, pp. 37–40. (In Russian)
  7. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block elements and analytical solutions of boundary-value problems for sets of differential equations. *Doklady Physics*, 2014, vol. 59, no. 1, pp. 30–34.
  8. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Gorshkova E.M., Gladskoi I.B., Grishenko D.V., Telyatnikov I.S. Block element method for body, localizations and resonances. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh tse ntrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2004, no 2. pp. 13–19.
  9. Kolesnikov M.N., Telyatnikov I.S. K metodam issledovaniya razlomov v usloviyah vibracionnyh vozdeystvij [To the research methods of faults under the vibration impacts]. *Nauchnyy zhurnal KubGAU* [Scientific Journal of KubSAU], 2016, vol. 121, no. 7, pp. 647–659. Available at: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/33.pdf> (accessed date 21.11.2017). (In Russian)
  10. Volmir A.S. *Nelinejnaja dinamika platinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka Pub., 1972, 432 p. (In Russian)
  11. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlja neklasicheskikh oblastej* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Pub., 1979, 319 p. (In Russian)
  12. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *Dinamika massivnyh tel i rezonansnye javlenija v deformiruemykh sredah* [Dynamic Behavior of Massive Bodies and Resonance Phenomena in Deformable Media]. Moscow, Nauchn. Mir Pub., 1999, 246 p. (In Russian)
  13. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlja predvaritel'no naprazhennyh jelektroprugih tel* [Dynamic contact problems for prestressed electroelastic bodies]. M.: Physmathlit, 2006. 272 p. (In Russian)
  14. Pavlova A.V., Rubtsov S.E. *Issledovanie mnogoslojnyh materialov pri nalichii narushenij sploshnosti soedinenij* [Investigation of multilayer materials in the presence of discontinuities in the continuity of compounds]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh tse ntrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2004, no. 3, pp. 19–22. (In Russian)
  15. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Factorization formulas for some meromorphic matrix functions. *Doklady Mathematics*, 2004, Vol. 70, no. 3, pp. 963–965.
  16. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of complex variable]. Moscow, Nauka Pub., 1973, 749 p. (In Russian)