

МЕХАНИКА

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ,
ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАГЛУБЛЕННЫМ ПОДВИЖНЫМ
ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ

Сыромятников П. В.

SIMULATION OF SPATIAL PERTURBATIONS OF A TWO-LAYER ELASTIC
SEMIBOUNDED MEDIUM CAUSED BY AN INTERNAL MOVING OSCILLATING
SOURCE

Syromyatnikov P. V.**,**

* Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Krasnodar Branch, Krasnodar, Russia

** Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru

Abstract. This paper is devoted to numerical modeling of spatial perturbations in semibounded two-layer elastic isotropic media. The vibrations of the media are caused by a moving oscillating internal or surface mechanical stress source. Three variants of an elastic isotropic medium were investigated: the first is a two-layer laminate with a rigidly fixed base, the second variant is a two-layer laminate with a mechanically free base, the third variant is a single-layer half-space. The surface source moves at a constant velocity along the surface of the body, the internal source moves in the interface plane. Homogeneous boundary value problems are considered in a moving coordinate system that is related to the source. The solution of the spatial problem is based on the use of integral Fourier transforms, the method of direct contour integration, the algorithms for constructing the symbol of the block Green matrix for the media under consideration. Due to its simplicity, the method of direct contour integration can be considered an engineering method. Nevertheless, this method can be successfully used for research purposes. Variants of motion are considered for zero and nonzero frequencies at a velocity that exceeds the velocity of transverse waves in a half-space. For a single-layer half-space, two solutions are compared, one solution is obtained for a surface source, another solution is obtained for an internal source that performs oscillations.

Keywords: two-layer elastic medium, internal moving oscillating source, spatial medium perturbations, numerical integration.

Введение

Имеется немало работ, посвященных исследованию возмущений, вызванных движущимися по поверхности твердого тела источниками [1–8]. Работ, исследующих аналогичные задачи для заглубленных источников, значительно меньше [9, 10]. В большинстве работ используются различные варианты методов граничного и конечного элемента [1–6, 10].

К задачам с движущимся источником, как правило, применимы те же методы, что и для соответствующих задач теории упруго-

сти с неподвижным источником колебаний, но они имеют и свою специфику, приводящую к необходимости модификаций имеющихся и разработке новых методов. Так, для задач с подвижным источником характерно появление так называемой наведенной анизотропии, которая существенно осложняет расчет контурных интегралов при традиционном подходе к их вычислению [7]. Взаимосвязь между задачами с подвижным и неподвижным источником устанавливает принцип соответствия, описанный в работе [8].

Сыромятников Павел Викторович, канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией прикладной математики и механики Южного научного центра РАН, Краснодарское отделение; доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края 16-48-230336 р_а, Госзадания на 2017 г. проект (0256-2014-0006), программы Президиума РАН 1-33Р проекты (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093) и программ Президиума Южного научного центра РАН.

Данная работа посвящена моделированию возмущений в двухслойном пакете или однослойном полупространстве, вызванных скачком напряжений, который моделирует жесткое включение, перемещающееся с постоянной скоростью в интерфейсной плоскости и совершающее гармонические колебания.

Задача решается с помощью интегральных преобразований Фурье [8] и метода прямого контурного интегрирования [9]. Благодаря своей простоте метод интегрирования можно считать инженерным, тем не менее, метод вполне пригоден для исследовательских целей. Важным этапом реализации метода является алгоритм построения символа блочной матрицы Грина, подробно описанный в работе.

1. Постановка задачи

Рассматриваются три вида изотропных упругих полуграниченных многослойных сред: двухслойный пакет на жестком основании, двухслойный пакет со свободным основанием и слой, сцепленный с полупространством. Двухслойные пакеты образованы тремя плоскостями $z = z_j : z_3 < z_2 < z_1 = 0$, в декартовой системе координат $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$ пакеты занимают объем $-\infty < x, y < \infty, z_3 \leq z \leq z_1$. Для полупространства $z_3 = -\infty$. Параметры Ламе $\lambda^{(j)}, \mu^{(j)}$, плотности $\rho^{(j)}$ верхних и нижних слоев, подстилающего полупространства могут быть различны. Значение $j = 1$ соответствует верхнему слою, $j = 2$ — нижнему слою или полупространству. Векторы перемещений в упругой среде $\mathbf{u}^{(j)} = \{u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}\}^T$ должны удовлетворять уравнениям Ламе:

$$(\lambda^{(j)} + \mu^{(j)}) \frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{u}^{(j)})}{\partial x_i} + \mu^{(j)} \Delta u_i^{(j)} - \rho^{(j)} \frac{\partial^2 u_i^{(j)}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\lambda^{(j)}, \mu^{(j)}$ — параметры Ламе, $\rho^{(j)}$ — плотность, t — время.

Гармоническая нагрузка $q \exp(-i\omega t)$, заданная на поверхности тела $z = z_1$ или в его глубине $z = z_2$ в прямоугольной области Ω со сторонами L_x, L_y , движется вдоль прямой Ox_1 с постоянной скоростью v (в дальнейшем общий экспоненциальный множитель

$\exp(-i\omega t)$ опускается). В подвижной системе координат $\{\tilde{x}, y, z\}$, где

$$\tilde{x} = x - vt, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z, \quad (1.2)$$

области Ω_j описывается неравенствами

$$-\frac{L_x}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{L_x}{2}, \quad -\frac{L_y}{2} \leq y \leq \frac{L_y}{2}, \quad (1.3)$$

$$z = z_j.$$

На поверхности тела $z = z_1$ заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{i3}(\tilde{x}, y, z)|_{z=0} = q_i^{(1)}, \quad (1.4)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad (\tilde{x}, y) \in \Omega_1,$$

$$\sigma_{i3}(\tilde{x}, y, z)|_{z=0} = 0, \quad (\tilde{x}, y) \notin \Omega_1.$$

На поверхности раздела слоев (или полупространства и слоя) $z = z_2$ заданы условия скачка напряжений

$$(\sigma_{i3}^{(1)}(\tilde{x}, y, z) - \sigma_{i3}^{(2)}(\tilde{x}, y, z))|_{z=z_2} = q_i^{(2)}, \quad (1.5)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad (\tilde{x}, y) \in \Omega_2,$$

$$(\sigma_{i3}^{(1)}(\tilde{x}, y, z) - \sigma_{i3}^{(2)}(\tilde{x}, y, z))|_{z=z_2} = 0, \quad (\tilde{x}, y) \notin \Omega_2.$$

При $z = z_3$ граничные условия для жесткого основания следующие:

$$u_j^{(2)}(x, y, z)|_{z=z_3} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.6)$$

Граничные условия для механически свободного основания:

$$\sigma_{i3}^{(2)}(\tilde{x}, y, z)|_{z=z_3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7)$$

Для полупространства должны выполняться условия убывания

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} |\mathbf{u}^{(2)}(\tilde{x}, y, z)| = 0 \quad (1.8)$$

и условия излучения [8] в области эллиптичности решаемых уравнений.

Требуется определить смещения $\mathbf{u}^{(n)}(\tilde{x}, y, z, v, \omega)$ как функцию координат $\{\tilde{x}, y, z\}$, скорости v , частоты осцилляций ω , глубины залегания внутреннего источника z_2 , вида источника $\mathbf{q}^{(n)}$, вида граничных условий (1.6)–(1.8).

2. Метод решения

Задачу (1.1)–(1.8) можно рассматривать как нестационарную задачу общего вида, однако такой подход чрезвычайно трудоемок [5, 6], особенно в пространственном случае.

С другой стороны, в системе координат, связанной с подвижным источником $\{\tilde{x}, y, z\}$ (1.2), задачу можно рассматривать как частный, хотя и весьма специфический, случай аналогичной задачи для неподвижного гармонического поверхностного или заглубленного источника [7–9].

Данное обстоятельство позволяет для решения задач (1.1)–(1.8) использовать большой арсенал средств, разработанный для задач с неподвижным гармоническим источником [7, 8].

Обозначим функцией $G(\alpha_1, \alpha_2)$ двукратное преобразование Фурье $G(\alpha_1, \alpha_2) = F_{x,y}[g(x, y)]$ функции $g(x, y)$ по переменным (x, y) , где (α_1, α_2) — параметры преобразования Фурье. Решение задач (1.1)–(1.8), как и в случае с неподвижным источником, может быть представлено в виде двойного интеграла Фурье [7–9]

$$u_j^{(m)}(\tilde{x}, y, z, \omega, v) = \frac{1}{4\pi^2} \times \\ \times \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^3 K_{jl}^{(m,n)}(\alpha_1, \alpha_2, z, \tilde{\omega}) \times \\ \times Q_l^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 \tilde{x} + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (2.1) \\ \tilde{\omega} = (\omega - \alpha_1 v).$$

Здесь матрица $\mathbf{K}^{(m,n)}(\alpha_1, \alpha_2, z, \omega)$ является образом Фурье блочной матрицы Грина $\mathbf{k}^{(m,n)}(x_1, x_2, z, \omega)$ для соответствующих внешних и внутренних неподвижных источников (индекс m соответствует номеру слоя, индекс n соответствует номеру интерфейсной плоскости $z = z_n$, в которой действует нагрузка $\mathbf{Q}^{(n)} = F_{x,y}[\mathbf{q}^{(n)}]$ в подвижной системе координат), Γ_1, Γ_2 представляет собой контуры в комплексных плоскостях $\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}$, отклоняющиеся при обходе вещественных полюсов определителя матрицы \mathbf{K} в соответствии с принципом предельного поглощения [7–9].

В полярных системах координат

$$\alpha_1 = \alpha \cos \tau, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \tau, \\ \alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \tau = \arctg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{x} = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta, \\ r = \sqrt{\tilde{x}^2 + y^2}, \quad \beta = \arctg \frac{y}{\tilde{x}}.$$

интеграл (2.1) можно записать в следующем виде:

$$u_j^{(m)}(r, \beta, z, \omega, v) = \frac{1}{4\pi^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^3 K_{jl}^{(m,n)}(\alpha, \tau, z, \tilde{\omega}) \times \\ \times Q_l^{(n)}(\alpha, \tau) \alpha e^{(-i r \alpha \cos(\tau - \beta))} d\tau d\alpha, \quad (2.3) \\ \tilde{\omega} = (\omega - \alpha \cos \tau v).$$

Использование интегрального представления вида (2.3) в вычислительном отношении более удобно.

Отметим, что в формулах (2.1), (2.3) для подвижных систем координат единственное формальное отличие от соответствующих представлений для неподвижных источников состоит в замене частоты ω на выражение $\omega \leftrightarrow (\omega - \alpha_1 v)$ в декартовых координатах или $\omega \leftrightarrow (\omega - \alpha \cos \tau v)$ — в полярных.

Дисперсионные поверхности, в зависимости от величины скорости v , могут претерпевать значительные изменения, влияющие на вид контуров Γ_j, Γ .

При ненулевой скорости $v \neq 0$ изотропная среда приобретает специфическую анизотропию, обусловленную направлением движения и величиной v . В зависимости от величины скорости может меняться тип уравнений (гиперболический или эллиптический) [7].

3. Символ блочной матрицы Грина

Рассмотрим три варианта алгоритма построения символа блочной матрицы Грина: 1) для двухслойного пакета, лежащего на жестком основании, 2) двухслойного пакета с механически свободным основанием и 3) однослойного полупространства.

В первых двух вариантах среда представляет собой два изотропных слоя $\{-\infty \leq x, y \leq \infty, z_2 \leq z \leq z_1, z_3 \leq z \leq z_2\}$, образуемых тремя плоскостями $z = z_1 = 0, z = z_2, z = z_3$, где каждый слой имеет свои материальные константы — параметры Ламе $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$ и плотность $\rho^{(n)}$. Гармонические колебания возбуждаются поверхностными $\mathbf{q}^{(1)}$ или внутренними $\mathbf{q}^{(2)}$ механическими нагрузками, заданными в плоскостях

$z = z_j, j = 1, 2$. Поведение упругой среды описывается символом блочной матрицы Грина \mathbf{K} , состоящей из четырех блоков $\mathbf{K}^{(n,j)}$ размерности (3×3) . Блок $\mathbf{K}^{(n,j)}$ матрицы $\mathbf{K} = \{\mathbf{K}^{(n,j)}\}_{n,j=1}^2$ имеет вид

$$\mathbf{K}^{(n,j)}(z) = \widehat{\mathbf{L}}^{(n)}(z)\mathbf{t}^{(n,j)}, \quad (3.1)$$

$$z_{n+1} \leq z \leq z_n, \quad n, j = 1, 2.$$

Первый индекс (n) соответствует номеру слоя, второй (j) — номеру плоскости $z = z_j$, в которой действует нагрузка $\mathbf{q}^{(j)}$. Матрица $\widehat{\mathbf{L}}^{(n)}$ представляет собой верхнюю половину матрицы $\mathbf{L}^{(n)}$, составленной из собственных векторов $\mathbf{h}_j^{(n)}$ и собственных значений $\lambda_j^{(n)}$ для слоя с номером (n)

$$\mathbf{L}^{(n)}(z) = \left\{ \mathbf{h}_1^{(n)} e^{\lambda_1^{(n)} z}, \mathbf{h}_2^{(n)} e^{\lambda_2^{(n)} z}, \dots, \dots, \mathbf{h}_6^{(n)} e^{\lambda_6^{(n)} z} \right\}. \quad (3.2)$$

Величины $\mathbf{h}_j^{(n)}, \lambda_j^{(n)}$ находятся в общем случае из решения алгебраической спектральной задачи вида $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{h} = 0$. В изотропном случае ее решение может быть получено явно, поэтому здесь приведем только вид решений $\mathbf{h}_j^{(n)}, \lambda_j^{(n)}, j = 1, 2, \dots, 6; n = 1, 2$,

$$\lambda_1^{(n)} = \sigma_1^{(n)}, \quad \lambda_2^{(n)} = \lambda_3^{(n)} = \sigma_2^{(n)}, \quad (3.3)$$

$$\lambda_4^{(n)} = -\sigma_1^{(n)}, \quad \lambda_5^{(n)} = \lambda_6^{(n)} = -\sigma_2^{(n)},$$

$$\sigma_1^{(n)} = \sqrt{\alpha^2 - (\kappa_1^{(n)})^2},$$

$$\sigma_2^{(n)} = \sqrt{\alpha^2 - (\kappa_2^{(n)})^2},$$

$$(\kappa_1^{(n)})^2 = \frac{\rho^{(n)}\omega^2}{(\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)})}, \quad (\kappa_2^{(n)})^2 = \frac{\rho^{(n)}\omega^2}{\mu^{(n)}},$$

$$h_{1,1}^{(n)} = -i\alpha_1, \quad h_{1,2}^{(n)} = -i\alpha_2, \quad h_{1,3}^{(n)} = \sigma_1^{(n)},$$

$$h_{1,4}^{(n)} = -i\alpha_1\sigma_1^{(n)}, \quad h_{1,5}^{(n)} = -i\alpha_2\sigma_1^{(n)},$$

$$h_{1,6}^{(n)} = (\sigma_1^{(n)})^2,$$

$$h_{2,1}^{(n)} = -i\alpha_1\sigma_2^{(n)} - i\alpha_2, \quad h_{2,2}^{(n)} = -i\alpha_2\sigma_2^{(n)} + i\alpha_1,$$

$$h_{2,3}^{(n)} = \alpha^2, \quad h_{2,4}^{(n)} = -(i\alpha_1\sigma_2^{(n)} + i\alpha_2)\sigma_2^{(n)},$$

$$h_{2,5}^{(n)} = (-i\alpha_2\sigma_2^{(n)} + i\alpha_1)\sigma_2^{(n)}, \quad h_{2,6}^{(n)} = \alpha^2\sigma_2^{(n)},$$

$$h_{3,1}^{(n)} = -i\alpha_1\sigma_2^{(n)} + i\alpha_2, \quad h_{3,2}^{(n)} = -i\alpha_2\sigma_2^{(n)} - i\alpha_1,$$

$$h_{3,3}^{(n)} = \alpha^2, \quad h_{3,4}^{(n)} = (-i\alpha_1\sigma_2^{(n)} + i\alpha_2)\sigma_2^{(n)},$$

$$h_{3,5}^{(n)} = (-i\alpha_2\sigma_2^{(n)} - i\alpha_1)\sigma_2^{(n)}, \quad h_{3,6}^{(n)} = \alpha^2\sigma_2^{(n)},$$

$$h_{4,1}^{(n)} = -i\alpha_1, \quad h_{4,2}^{(n)} = -i\alpha_2, \quad h_{4,3}^{(n)} = -\sigma_1^{(n)},$$

$$h_{4,4}^{(n)} = i\alpha_1\sigma_1^{(n)}, \quad h_{4,5}^{(n)} = i\alpha_2\sigma_1^{(n)},$$

$$h_{4,6}^{(n)} = (\sigma_1^{(n)})^2,$$

$$h_{5,1}^{(n)} = i\alpha_1\sigma_2^{(n)} - i\alpha_2, \quad h_{5,2}^{(n)} = i\alpha_2\sigma_2^{(n)} + i\alpha_1,$$

$$h_{5,3}^{(n)} = \alpha^2, \quad h_{5,4}^{(n)} = (-i\alpha_1\sigma_2^{(n)} + i\alpha_2)\sigma_2^{(n)},$$

$$h_{5,5}^{(n)} = (-i\alpha_2\sigma_2^{(n)} - i\alpha_1)\sigma_2^{(n)}, \quad h_{5,6}^{(n)} = -\alpha^2\sigma_2^{(n)},$$

$$h_{6,1}^{(n)} = i\alpha_1\sigma_2^{(n)} + i\alpha_2, \quad h_{6,2}^{(n)} = i\alpha_2\sigma_2^{(n)} - i\alpha_1,$$

$$h_{6,3}^{(n)} = \alpha^2, \quad h_{6,4}^{(n)} = -(i\alpha_1\sigma_2^{(n)} + i\alpha_2)\sigma_2^{(n)},$$

$$h_{6,5}^{(n)} = (-i\alpha_2\sigma_2^{(n)} + i\alpha_1)\sigma_2^{(n)}, \quad h_{6,6}^{(n)} = -\alpha^2\sigma_2^{(n)}.$$

Матрицы $\mathbf{t}^{(n,j)}, n, j = 1, 2$ находятся из решения линейных систем уравнений, описываемых ниже. Если $\mathbf{t}^{(n,j)}$ известны, получаем суммарный вектор перемещений $\mathbf{U}^{(n)} = F_{x,y}[\mathbf{u}^{(n)}]$ для n -го слоя

$$\mathbf{U}^{(n)}(z) = \sum_{j=1}^2 \mathbf{K}^{(n,j)}(z)\mathbf{Q}^{(j)}, \quad (3.4)$$

$$z_{n+1} \leq z \leq z_n, \quad n = 1, 2.$$

Здесь $\mathbf{Q}^{(1)} = F_{x,y}[\mathbf{q}^{(1)}]$ — образ Фурье вектора поверхностных нагрузок в области Ω_1 плоскости $z = z_1$, $\mathbf{Q}^{(2)} = F_{x,y}[\mathbf{q}^{(2)}]$ — образ Фурье векторов скачков напряжений в области задания жесткого включения Ω_2 плоскости $z = z_2$.

Для пакетов слоев линейные системы уравнений относительно матриц $\mathbf{t}^{(n,j)}$ размерности (6×3) имеют вид

$$\mathbf{C}_i \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1,1)} \\ \mathbf{t}^{(2,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C}_i \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1,2)} \\ \mathbf{t}^{(2,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2.$$

Для однослойного полупространства матрица $\mathbf{t}^{(1,j)}$ имеет размерность (6×3) , $\mathbf{t}^{(2,j)}$ имеет размерность (3×3) , соответствующие полупространству системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1,1)} \\ \mathbf{t}^{(2,1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1,2)} \\ \mathbf{t}^{(2,2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В формулах (3.5), (3.6) \mathbf{I} , $\mathbf{0}$ — единичная и нулевая матрицы размерности (3×3) . Первые формулы (3.5), (3.6) соответствуют единичным поверхностным нагрузкам в плоскости $z = z_1$, вторые — единичным скачкам напряжений в плоскости $z = z_2$. В случае пакета слоев (матрицы $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$) или однослойного полупространства (матрица \mathbf{C}_3) матрицы систем уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{(1)}(z_2) & -\mathbf{C}^{(2)}(z_2) \\ \mathbf{0} & \check{\mathbf{C}}^{(2)}(z_3) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_2 &= \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{(1)}(z_2) & -\mathbf{C}^{(2)}(z_2) \\ \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{C}}^{(2)}(z_3) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_3 &= \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{(1)}(z_2) & -\mathbf{C}^{(2,L)}(z_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Размерность матриц $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ — (12×12) , матрицы \mathbf{C}_3 — (9×9) . Матрицы $\widehat{\mathbf{C}}^{(i)}, \check{\mathbf{C}}^{(i)}$ имеют размерности (3×6) и представляют собой соответственно верхнюю и нижнюю половины матрицы $\mathbf{C}^{(i)}$, матрица $\mathbf{C}^{(2,L)}$ есть левая половина матрицы $\mathbf{C}^{(2)}$. Случаю пакета слоев, лежащему на жестком основании, соответствует матрица \mathbf{C}_1 , случаю механически свободного основания пакета — матрица \mathbf{C}_2 . Матрицы $\mathbf{C}^{(i)}(z_j)$ размерности (6×6) описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(n)}(z_j) &= \mathbf{R}^{(n)} \mathbf{L}^{(n)}(z_j), \\ R_{31}^{(n)} &= -i\alpha_1 \mu^{(n)}, \quad R_{32}^{(n)} = -i\alpha_2 \mu^{(n)}, \\ R_{13}^{(n)} &= -i\alpha_1 \lambda^{(n)}, \quad R_{23}^{(n)} = -i\alpha_2 \lambda^{(n)}, \\ R_{14}^{(n)} &= \mu^{(n)}, \quad R_{25}^{(n)} = \mu^{(n)}, \quad R_{36}^{(n)} = \lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$R_{44}^{(n)} = R_{55}^{(n)} = R_{66}^{(n)} = 1.$$

Здесь α_m — параметры преобразования Фурье, $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$ — коэффициенты Ламе. Размерность матрицы $\mathbf{R}^{(n)}$ (6×6) , неописанные элементы равны нулю. Собственные значения $\lambda_j^{(2)}$ и соответствующие собственные векторы $\mathbf{h}_j^{(2)}$ в случае полупространства упорядочены таким образом, что $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(2)}$ удовлетворяют условиям убывания (для эллиптических уравнений) и условиям излучения для полупространства $z \leq 0$, а $\lambda_4^{(2)}, \lambda_5^{(2)}, \lambda_6^{(2)}$ — для полупространства $z \geq 0$ [7].

Решая системы уравнений (3.5), (3.6) с матрицами \mathbf{C}_i для разных граничных условий, находим $\mathbf{t}^{(n,j)}$, что завершает построение блочных матриц $\mathbf{K}^{(n,j)}$ (3.1).

4. Метод прямого контурного интегрирования

Метод прямого контурного интегрирования, используемый в данной работе в качестве основного метода интегрирования, подробно описан в [9], здесь приведем только основные соотношения. Метод представляет собой алгоритм непосредственного вычисления контурных интегралов (2.3) в ближней зоне и основывается на использовании принципа предельного поглощения [8]. При гармонических колебаниях вида $\exp(-i\omega t)$, $0 < \omega$, предполагается введение в уравнения движений слагаемого $\varepsilon \partial u / \partial t$, $0 < \varepsilon \ll \omega$, соответствующего действию малого внутреннего трения, что эквивалентно введению комплексной частоты

$$\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 + i \frac{\varepsilon}{\rho} \omega. \quad (4.1)$$

Обозначая решение краевой задачи с комплексной частотой $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$, результирующее решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ получим как равномерный предел

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

При введении комплексной частоты все вещественные полюса символа блочной матрицы Грина \mathbf{K} (3.1) смещаются с действительной оси в комплексную плоскость. Тогда интеграл по Γ в (2.3) может быть вычислен непосредственно вдоль вещественной полуоси Γ_R без деформирования контура в комплексную плоскость, т.к. в этом случае вещественная полуось является корректным контуром интегрирования. Погрешность, возникающая при

введении ненулевого ε (4.1), связана с возникновением мнимых частей действительных полюсов и смещением комплексных. Кроме того, ограниченность вещественного контура Γ_R некоторой величиной R также вносит свою погрешность. Приведем приближенную оценку относительной погрешности для отдельной компоненты вектора $u_\varepsilon(r)$

$$\delta(r) = |1 - u_\varepsilon(r)/u(r)| \approx |\varepsilon r/c_g|. \quad (4.3)$$

В нерезонансном случае для любой фиксированной частоты можно указать диапазон изменения $\delta(r)$

$$\varepsilon r/c_{\max}^{(g)} \leq \delta(r) \leq \varepsilon r/c_{\min}^{(g)}, \quad (4.4)$$

$$c_{\max}^{(g)} = \max_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |c_g(\tau)|, \quad c_{\min}^{(g)} = \min_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |c_g(\tau)|,$$

где τ — угол в плоскости волновых чисел (2.2).

Расчет интегралов по ограниченному вещественному контуру Γ_R может осуществляться с помощью специальных квадратур для сильно осциллирующих функций, например, реализованных в пакете NAG [11]. Ключевым моментом в реализации метода являются устойчивость и экономичность алгоритмов расчета символов блочных матриц Грина, описанных в п. 3. Применение метода прямого контурного интегрирования в случае однородного или многослойного полупространства имеет дополнительное преимущество, поскольку избавляет от необходимости расчета интегралов вдоль разрезов в комплексной плоскости.

Заметим, что помимо прочего применение принципа предельного поглощения (4.1) дает простую процедуру для определения деформации контуров интегрирования, что необходимо при расчете контурных интегралов при традиционном подходе к расчету интегралов Фурье [7, 8].

5. Численные результаты

В численных расчетах механические параметры слоев рассматривались одинаковые

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 2,38833 \times 10^7 \text{ Н/м}^2, \quad (5.1)$$

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 2,448 \times 10^7 \text{ Н/м}^2,$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = 1,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$z_1 = 0 \text{ м}, \quad z_2 = -50 \text{ м}, \quad z_3 = -100 \text{ м}.$$

Общая толщина пакетов слоев $(z_1 - z_3) = h = 100$ м, толщина верхнего слоя $(z_1 - z_2) = h_1 = 50$. Значениям параметров (5.1) соответствуют следующие скорости поперечной волны v_s , продольной волны v_p и релеевской волны v_r в полупространстве:

$$\begin{aligned} v_s &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 120 \text{ м/с}, \\ v_p &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = 207 \text{ м/с}, \\ v_r &\approx 110,267 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Далее параметры для расчетов и результаты расчетов приводятся в безразмерном виде. Приведем соответствующие величинам (5.1), (5.2) безразмерные значения

$$v_s = 1,2, \quad v_p = 2,07, \quad v_r \approx 1,10267, \quad (5.3)$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -0,5, \quad z_3 = -1,$$

$$\lambda^{(j)} = 2,38833, \quad \mu^{(j)} = 2,448,$$

$$\rho^{(j)} = 1,7, \quad j = 1, 2.$$

В качестве вертикального поверхностного $q_3^{(1)}$ и заглубленного подвижного источника $q_3^{(2)}$ (1.3)–(1.5) рассматривались источники

$$q_3^{(j)} = q(\tilde{x}, y, z)|_{z=z_j} = -1, \quad j = 1, 2, \quad (5.4)$$

$$L_x = L_y = 0,1.$$

Приведенные далее на рис. 1–5 графики вертикальных смещений u_3 на поверхности $z = 0$ рассчитаны по формулам (2.3).

Интегралы рассчитывались методом прямого контурного интегрирования при введении комплексной частоты ω_ε (4.1) с параметром $\varepsilon = 10^{-2}$ по ограниченному вещественному контуру $\Gamma = \Gamma_R : [0, R]$. В расчетах использовались программы вычисления интегралов от осциллирующих функций пакета NAG [11].

На рис. 1–3 представлены графики $u_3(\tilde{x}, y)|_{z=0}$ решений пространственной задачи при отсутствии осцилляций ($\omega = 0$) для трех разных сред, возбуждаемых внутренним подвижным источником $q_3^{(2)}$ (5.4), движущимся в плоскости $z = z_2$ вдоль оси Ox со скоростью $v = 1,01v_s = 1,212$. Скорость источника незначительно (на 1 %) превышает скорость поперечных волн v_s . В силу геометрической симметрии источника относительно вектора

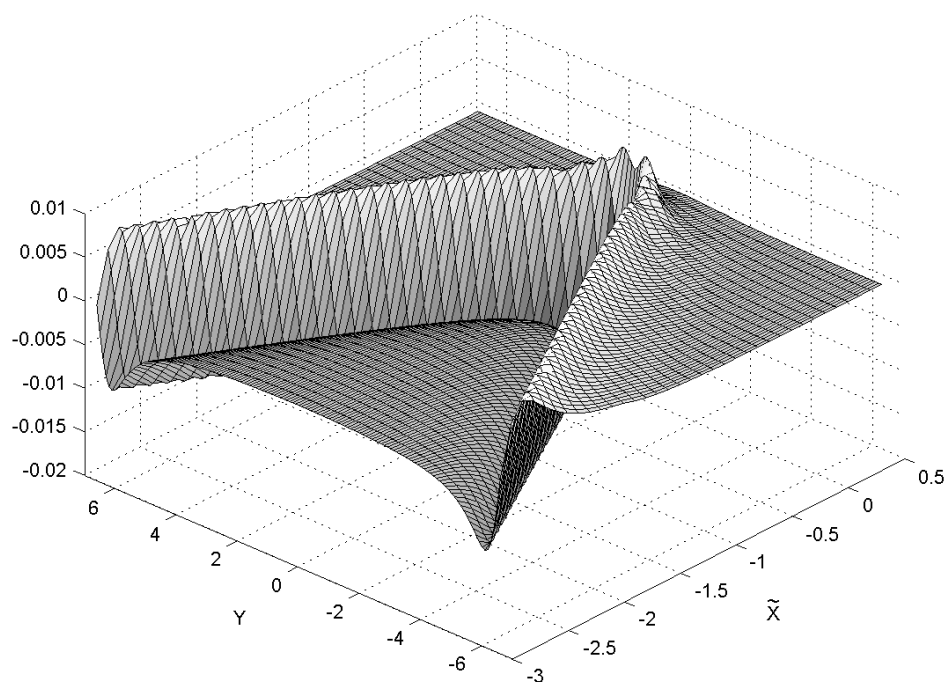


Рис. 1. Вид $u_3(\tilde{x}, y, z)|_{z=0}$ возмущений поверхности полупространства, возбуждаемого внутренним подвижным источником $q_3^{(2)}$, скорость $v = 1,01v_s$, частота $\omega = 0$

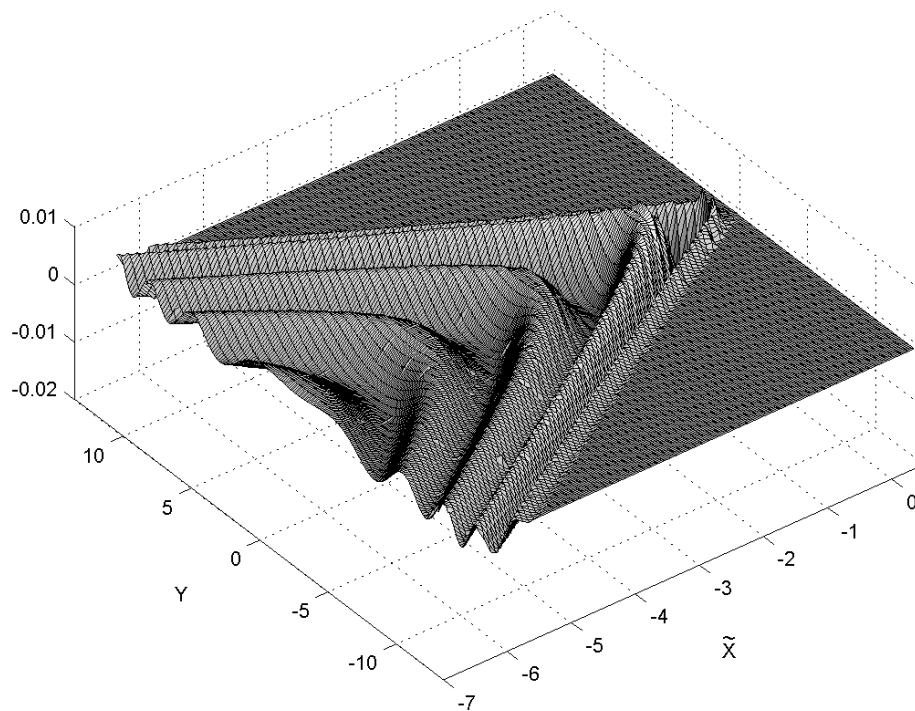


Рис. 2. Вид $u_3(\tilde{x}, y, z)|_{z=0}$ возмущений поверхности слоя с жестко фиксированным основанием, возбуждаемого внутренним подвижным источником $q_3^{(2)}$, скорость $v = 1,01v_s$, частота $\omega = 0$

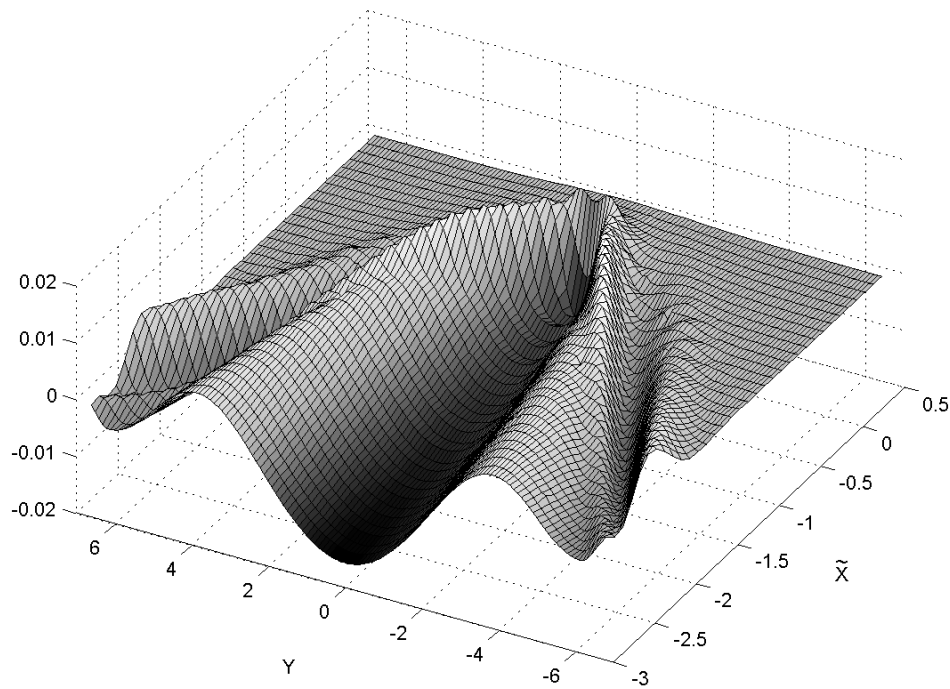


Рис. 3. Вид $u_3(\tilde{x}, y, z)|_{z=0}$ возмущений поверхности слоя с механически свободным основанием, возбуждаемого внутренним подвижным источником $q_3^{(2)}$, скорость $v = 1,01v_s$, частота $\omega = 0$

направления движения, симметричном распределении нагрузки, симметрии самой механической структуры, картина поверхностных возмущений $u_3(\tilde{x}, y, z, v)$ является симметричной относительно плоскости $Oz\tilde{x}$ при любой скорости.

На поверхности всех трех вариантов сред в данном режиме движения в подвижной системе координат (1.2) образуется статический шлейф, соответствующий конусу Маха. Угол конуса $\phi = \arcsin(v_r/v) \approx 65,48^\circ$ в данном случае соответствует скорости релеевских волн v_r (5.1) и скорости движения $v = 1,01v_s$.

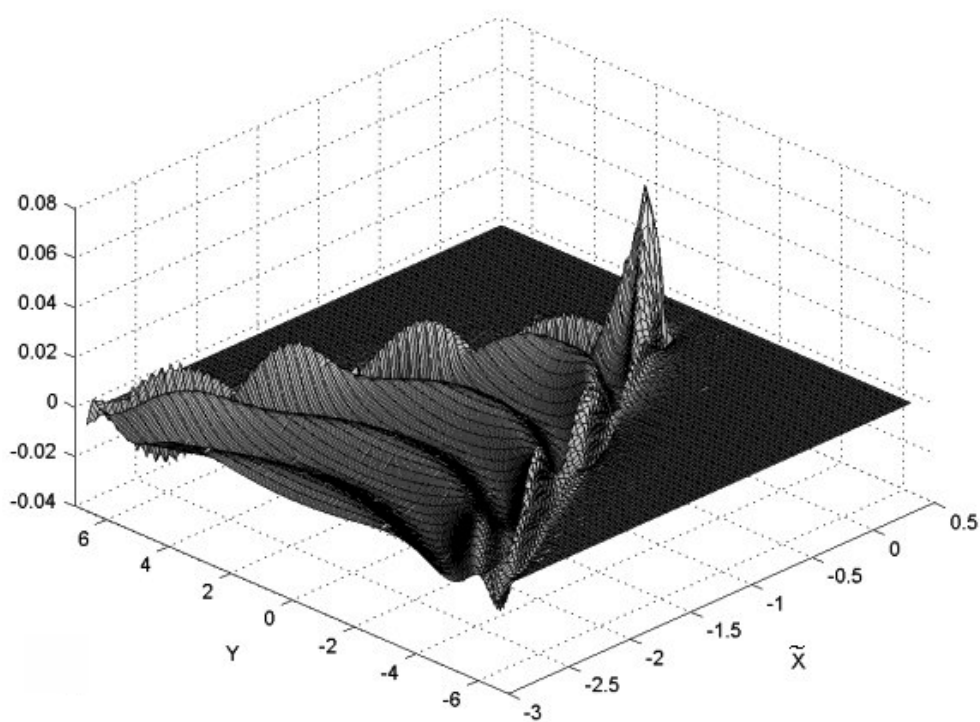
Наиболее простую структуру шлейф имеет в случае полупространства (рис. 1), границы конуса Маха четкие и прямолинейные, внутренняя часть конуса представляет собой почти постоянную величину, возмущения за пределами конуса быстро убывают.

В случае слоя на жестком основании (рис. 2) граница конуса Маха также четкая и прямолинейная, внутренняя структура шлейфа имеет почти периодический характер. За пределами конуса возмущения также убывают быстро.

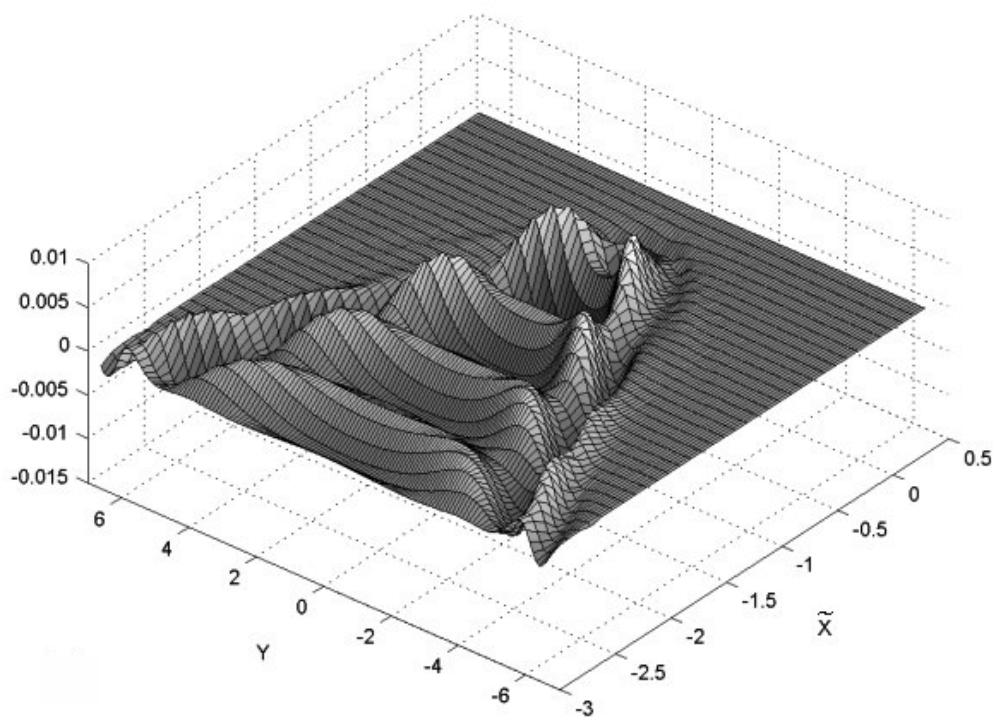
Случай слоя с механически свободным основанием (рис. 3) существенно отличается от

первых двух рассмотренных вариантов. Границы конуса нечеткие, имеют криволинейный характер, близкий к параболе, внутренность конуса напоминает желоб, вытянутый вдоль плоскости симметрии $Oz\tilde{x}$. Возмущения за границами конуса имеют относительно большую величину и убывают с удалением от периметра медленно.

На рис. 4, 5 сравниваются действительные и мнимые части возмущений поверхности полупространства, возбуждаемого поверхностным $q_3^{(1)}$ и внутренним $q_3^{(2)}$ источником при той же скорости движения $v = 1,01v_s$, но при ненулевой частоте $\omega = 1$. Отмечая качественное сходство обоих вариантов, необходимо отметить и очевидные отличия. В случае поверхностного источника границы конуса Маха четкие и прямолинейные, амплитуда колебаний вдоль периметра имеет большую величину, внутренность конуса имеет простую периодическую структуру в виде однотипных гребней. За пределами конуса возмущения поверхности убывают достаточно быстро. В случае же внутреннего источника границы конуса нечеткие, криволинейные, сходные с параболой. Амплитуда колебаний вдоль границы значительно меньше. Внутренняя часть

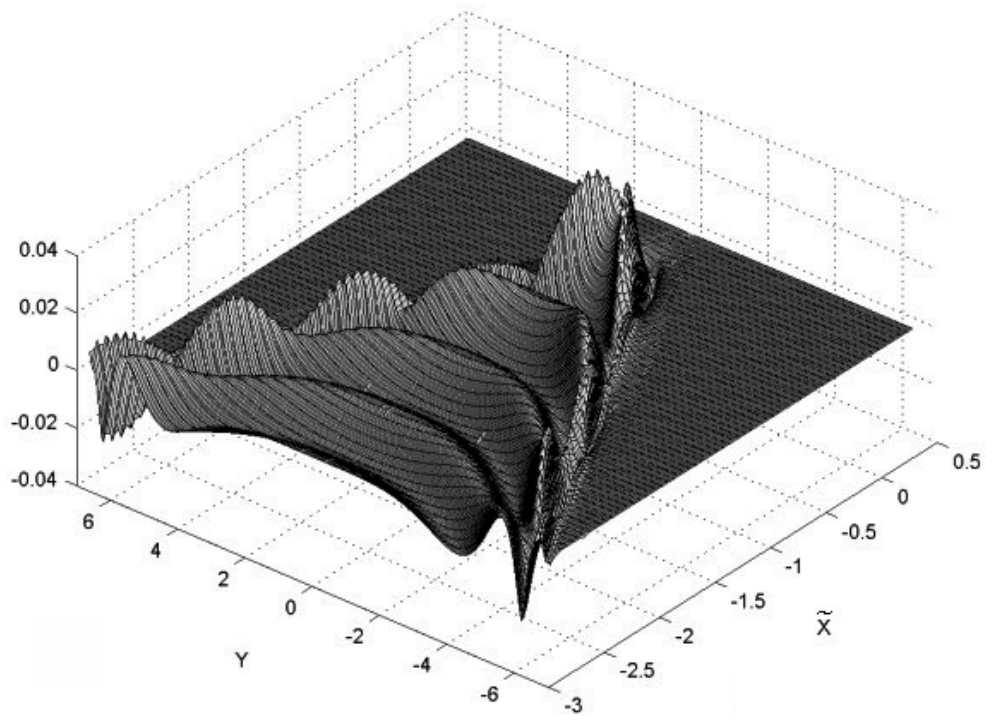


а)

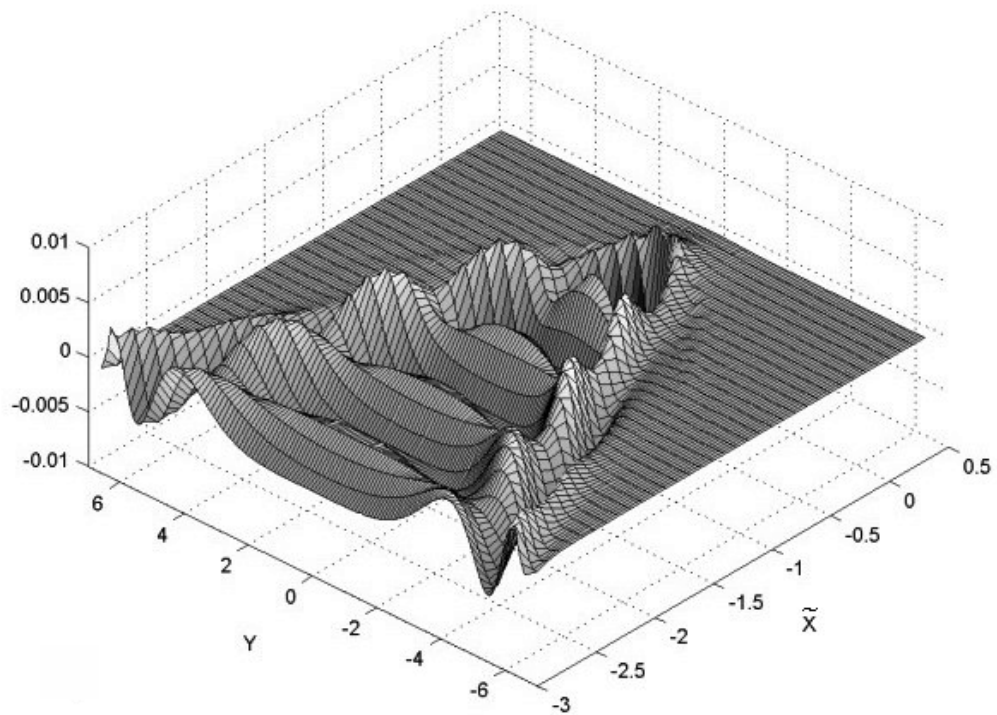


б)

Рис. 4. Вид $\text{Re } u_3(\tilde{x}, y, z)|_{z=0}$ возмущений поверхности полупространства:
 а) возбуждаемого поверхностным подвижным источником $q_3^{(1)}$;
 б) возбуждаемого внутренним подвижным источником $q_3^{(2)}$;
 скорость $v = 1,01v_s$, частота $\omega = 1$



а)



б)

Рис. 5. Вид $\text{Im } u_3(\tilde{x}, y, z)|_{z=0}$ возмущений поверхности полупространства:

а) возбуждаемого поверхностным подвижным источником $q_3^{(1)}$;

б) возбуждаемого внутренним подвижным источником $q_3^{(2)}$;

скорость $v = 1,01v_s$, частота $\omega = 1$

конуса также имеет почти периодическую структуру, однако теперь гребни более сложной формы. Возмущения поверхности за пределами конуса более выражены и убывают медленнее, чем в случае поверхностного источника. Средние и максимальные амплитуды возмущений при поверхностном возбуждении примерно в четыре раза больше, чем при возбуждении внутренним источником.

В целом, помимо скорости v , частоты ω и глубины залегания источника z_2 , необходимо в первую очередь отметить существенное влияние граничных условий (1.6)–(1.8) на характер возмущения поверхности рассмотренных сред.

На данном этапе исследовались среды с одинаковыми параметрами слоев с условной внутренней границей, однако рассмотрение сред с различными параметрами слоев не требует каких-либо модификаций приведенных алгоритмов расчета. В рассмотренной задаче о движении источника по поверхности или внутри полуограниченного упругого тела использованный метод прямого контурного интегрирования показал высокую эффективность.

Контрольные расчеты по методу интегрирования с помощью вычетов [7] показали, что различия по сравнению с методом прямого контурного интегрирования лежат в пределах средних погрешностей этих двух методов, но при этом метод прямого контурного интегрирования существенно проще в реализации.

Литература

1. Chahour, Lefeuve-Mesgouez G., Mesgouez A., Safi B. Dynamic analysis of a multilayered poroviscoelastic ground under a moving harmonic load // *Travaux du 23 Congrès Français de Mécanique*, Lille, 28 Août au 1er Septembre 2017. 12 pp.
2. Wang L., Zhang Y., Tjhen Lie S. Detection of damaged supports under railway track based on frequency shift // *J. Sound Vib.* 2017. Vol. 392. P. 142–153.
3. Shi Li, Selvadurai A.P.S. Dynamic response of an infinite beam supported by a saturated poroelastic half-space and subjected to a concentrated load moving at a constant velocity // *Int. J. Solids Struct.* 2016. Vol. 88–89. P. 35–55.
4. Lefeuve-Mesgouez G., Mesgouez A. Three-dimensional dynamic response of a porous multilayered ground under moving loads of various distributions // *Adv. Eng Software*. 2012. Vol. 46. P. 75–84.

5. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // *Труды МАИ*. 2015. №82. 20 с. Режим доступа: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58464> (дата обращения 16 октября 2017 г.).
6. Tosecký A. Wave propagation in homogeneous elastic half-space using the Dual Reciprocity Boundary Element Method: Diss. ... Doctor Engineer. The Ruhr University Bochum, 2005. 129 pp.
7. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 240 с.
8. Белоконов А.В., Наседкин А.В. Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами // В сб.: *Механика контактных взаимодействий*. М.: Физматлит, 2001. С. 331–348.
9. Сыромятников П.В. Моделирование возмущений поверхности упругой полуограниченной среды, вызываемых подвижным осциллирующим источником // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2016. № 4. С. 82–91.
10. Clouteau D., Arnst M., Al-Hussainia T.M., Degrande G. Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium // *J. Sound and Vibration*. 2005. Vol. 283. P. 173–199.
11. D01AKF Subroutine. NAG Fortran Library. Режим доступа: <http://www.nag.co.uk/numeric/FL/FLdescription.asp> (дата обращения 16 октября 2017 г.).

References

1. Chahour, Lefeuve-Mesgouez G., Mesgouez A., Safi B. Dynamic analysis of a multilayered poroviscoelastic ground under a moving harmonic load. In: *Travaux du 23 Congrès Français de Mécanique*, Lille, 28 Août au 1er Septembre 2017, 12 pp.
2. Wang L., Zhang Y., Tjhen Lie S. Detection of damaged supports under railway track based on frequency shift. *J. Sound Vib.*, 2017, vol. 392, pp. 142–153.
3. Shi Li, Selvadurai A.P.S. Dynamic response of an infinite beam supported by a saturated poroelastic half-space and subjected to a concentrated load moving at a constant velocity. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 88–89, pp. 35–55.
4. Lefeuve-Mesgouez G., Mesgouez A. Three-dimensional dynamic response of a porous multilayered ground under moving loads of various distributions. *Adv. Eng Software*, 2012, vol. 46, pp. 75–84.

5. Okonechnikov A.S., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Nestatsionarnoye dvizheniye normal'noy sosredotochennoy nagruzki vdol' granitsy uprugoy poluploskosti [Nonstationary motion of a normal concentrated load along the boundary of an elastic half-plane]. *Proc. MAI*, 2015, no. 82, available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58464> (access date 16.10.2017) (In Russian)
6. Tosecký A. *Wave propagation in homogeneous elastic half-space using the Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Diss. . . . Doctor Engineer. The Ruhr University Bochum, 2005, 129 pp.
7. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamika poverhnosti neodnorodnih sred* [The dynamics of the surface of inhomogeneous media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 240 p. (In Russian)
8. Belokon A.V., Nasedkin A.V. Vzaimodeistvie dvijushihhsya shtampov s uprugimi i vyazkoupругimi telami [Interaction moving punches with elastic and viscoelastic bodies]. In: *Mehhanika kontaktnih vzaimodeistvii* [Contact mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 672 p. (In Russian)
9. Syromyatnikov P.V. Modelirovanie vozmushenii poverhnosti uprugoi poluogranichennoi sredi, vizivaemih podvijnim oscilliruushim istochnikom [Simulation of surface disturbances elastic semi-infinite medium, caused by moving oscillating source]. *Ecologicheskii vestnik nauchnih centrov Scernomorskogo ekonomicheskogo sodrujestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no. 4, pp. 82–91. (In Russian)
10. Clouteau D., Arnsta M., Al-Hussainia T.M., Degrandeb G. Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium. *J. Sound and Vibration*, 2005, vol. 283, pp. 173–199.
11. D01AKF Subroutine. NAG Fortran Library. Available at: <http://www.nag.co.uk/numeric/FL/FLdescription.asp> (access date 16.10.2017).