ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2005. №1

УДК 532.536

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ СПЕКТР В ТЕОРИИ КАТЯЩИХСЯ ВОЛН

***Е. А. Демёхин*[1], *Е. Н. Калайдин*[2], *Е. М. Шапарь*[3]**

SOLITON SOLUTIONS AND THEIR SPECTRUM IN THE THEORY OF ROLLING WAVES

Demekhin E. A., Kalaidin E. N., Shapar E. M.

The work considers the motion of rolling waves in inclined passages. This type of waves doesn't depend on the boundary tension and may exist both in turbulent and laminar flow regimes. The set of Dressler's hydraulic equations was generalized to describe the resistance of rolling waves to 3D disturbances, and their spectra have been developed. It has been established that positive rolling waves are resistant to 3D disturbances, while negative rolling waves are non-resistant.

При стекании воды вниз по наклонному открытому каналу течение характеризуется квазидвумерными катящимися волнами или борой. Дресслер [1] вывел упрощенную версию гидравлических уравнений, которые описывают катящиеся волны. Эти уравнения иногда называют системой Сен-Венана [2]. В данной работе двумерные катящиеся волны впервые рассмотрены как солитоны, система уравнений и условия на скачке обобщены на трехмерный случай, исследована устойчивость катящихся волн к различным типам возмущений.

Система Сен-Венана легко обобщается для описания трехмерных волн в течении под углом θ к горизонту. Принимая в качестве базовых величин среднерасходную скорость плоского течения u_0, его толщину h_0 и плотность жидкости ρ, эту систему можно записать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qp}{h}\right) + Gh\frac{\partial h}{\partial x} = h - \frac{q\sqrt{q^2+p^2}}{h^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qp}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p^2}{h}\right) + Gh\frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{p\sqrt{q^2+p^2}}{h^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

где q и p — расходы в направлении действия силы тяжести x и в нормальном направлении z, h — толщина слоя, $G = gh_0^2\cos\theta/u_0^2$ — обобщенное число Фруда. Условия на скачке

$$-D[h] + [q]n_x + [p]n_z = 0,$$

$$-D[q] + \left[\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}Gh^2\right]n_x + \left[\frac{qp}{h}\right]n_z = 0, \quad (2)$$

$$-D[p] + \left[\frac{qp}{h}\right]n_x + \left[\frac{p^2}{h} + \frac{1}{2}Gh^2\right]n_z = 0,$$

где D — скорость скачка. Обозначение $[\ldots]$ соответствует величине скачка в точке разрыва решения (1).

Система (1) всегда имеет решение $h = 1$, $q = 1$, $p = 0$.

[1]Демехин Евгений Афанасьевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН.

[2]Калайдин Евгений Николаевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой экономико-математических методов и моделей Кубанского государственного университета.

[3]Шапарь Елена Михайловна, аспирантка факультета прикладной математики Кубанского государственного университета.

Катящиеся стационарные двумерные бегущие волны удобно рассматривать как цепочку слабо взаимодействующих солитонов, для которых $\partial/\partial z = 0$, $p = 0$, $\partial/\partial t = -c\partial/\partial x$. Для уединенной волны $h \to 1$ при $x \to \pm\infty$. Интегрируя уравнение неразрывности, найдем

$$q = 1 + c(h-1).$$

После подстановки этого соотношения в первое уравнение системы (1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h^3 - (ch - c + 1)}{G\left[h^3 - \frac{(c-1)^2}{G}\right]},$$

имеющее особенность при

$$Gh^3 - (c-1)^2 = 0.$$

Для устранения особенности применим известный подход Дресслера [1]. Разложим числитель и знаменатель на множители

$$h^3 - (ch - c + 1) = (h-1)(h-h_1)(h-h_2),$$

$$h^3 - \frac{(c-1)^2}{G} = (h-b)(h^2 + bh + b^2),$$

$$h_1 = \frac{1}{2}\left[c + 1 + \sqrt{(c+3)(c-1)}\right](c-1),$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\left[c + 1 - \sqrt{(c+3)(c-1)}\right](c-1),$$

$$b = \frac{(c-1)^{2/3}}{G^{1/3}}.$$

Чтобы избавиться от особенности следует положить $h_1 = b$. В результате получаем знаменитое решение Дресслера для положительного солитона

$$\frac{1}{2}\left[c + 1 + \sqrt{(c+3)(c-1)}\right](c-1) = \frac{(c-1)^{2/3}}{G^{1/3}}.$$

Это соотношение дает зависимость $c = c(G)$. Для положительных солитонов имеем уравнение

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{G}\frac{(h-1)(h-h_2)}{h^2 + bh + b^2},$$

решение которого может быть получено в аналитическом виде $x = x(h)$.

Для определения амплитуды волны используем условие на скачке или так называемое «слабое решение» [3]

$$-cq_{\max} + \frac{q_{\max}^2}{h_{\max}} + \frac{1}{2}Gh_{\max}^2 + c - 1 - \frac{1}{2}G = 0,$$

$$q_{\max} = ch_{\max} - c + 1.$$

Из этого соотношения получаем квадратное уравнение относительно амплитуды $h_{\max}$, решение которого дает

$$h_{\max} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2(c-1)^2}{G}}.$$

Решение нестационарной линеаризованнной около двумерного солитона задачи может быть представлено как суперпозиция собственных функций задачи. В силу бесконечной области линейного оператора в дополнение к дискретной части спектра добавляется непрерывная часть спектра [4]. Собственные функции дискретного спектра локализованы около горба, в то время как функции непрерывного спектра только ограничены при $x = \pm\infty$, где они ведут себя синусоидально.

Рассмотрим только дискретные собственные функции и соответствующие им собственные значения, ответственные за устойчивость или неустойчивость катящихся волн.

Предположим, что разрыв имеет место при $x - ct = 0$. Введем трехмерное малое возмущение $\hat{r}(z,t)$

$$x - ct - \hat{r}(z,t) = 0.$$

На «положительной» стороне скачка

$$q^+ = q_{\max} + {q'}_{\max}\hat{r} + \hat{q}^+,$$

$$h^+ = h_{\max} + {h'}_{\max}\hat{r} + \hat{h}^+, \quad \hat{p}^+ = \hat{p}^+.$$

Здесь первый член описывает невозмущенное решение, второй — возмущение за счет сдвига разрыва, третий — обычная часть возмущения.

На «отрицательной» стороне, где невозмущенные движения плоско-параллельны, имеем

$$p^- = \hat{p}^-, \quad q^- = 1 + \hat{q}^-, \quad h^- = 1 + \hat{h}^-.$$

В результате получим скачки величин

$$[q]|_{x=0} = q_{\max} - 1 + c{h'}_{\max}\hat{r} + \hat{q}^+ - \hat{q}^-,$$

$$[p]|_{x=0} = \hat{p}^+ - \hat{p}^-, \quad [h]|_{x=0} = \hat{h}^+ - \hat{h}^-.$$

D является возмущенной скоростью c, $D = c + \hat{r}_t$. В силу линейности возмущенной системы и того факта, что коэффициенты этой системы не зависят от t и z, элементарное решение ищем в форме

$$\hat{r} \to \hat{r}e^{i\beta z+\lambda t}, \quad \hat{h} \to \hat{h}e^{i\beta z+\lambda t}, \quad i\hat{p} = \hat{\pi}.$$

Здесь β — волновое число в направлении z, λ — коэффициент роста (затухания), являющийся собственным значением задачи. Двумерная волна неустойчива при $\lambda > 0$ и устойчива при $\lambda < 0$.

Условия на скачке для трехмерных возмущений этого решения получаются линеаризацией (2) около скачка и имеют вид

$$-c(\hat{h}^+ - \hat{h}^-) - \lambda\hat{r}(h_{\max} - 1) + (\hat{q}^+ - \hat{q}^-) = 0,$$

$$-c(\hat{q}^+ - \hat{q}^-) - \lambda c(h_{\max} - 1)\hat{r} - \frac{q^2_{\max}}{h^2_{\max}}\hat{h}^+ + \hat{h}^- + \\ + \frac{2q_{\max}}{h_{\max}}\hat{q}^+ - 2\hat{q}^- - \frac{(c-1)^2}{h^2_{\max}}h'_{\max}\hat{r} + \\ + Gh_{\max}h'_{\max}\hat{r} + Gh_{\max}\hat{h}^+ - G\hat{h}^- = 0,$$

$$-c(\pi^+ - \pi^-) + \frac{q_{\max}}{h_{\max}}\pi^+ - \pi^- - \frac{1}{2}\beta G h^2_{\max}\hat{r} = 0.$$

Рассмотрим решение в области перед разрывом $-\infty < x < 0$, описываемое системой уравнений (знак «+» опущен) для $\hat{q}^+$, $\hat{\pi}^+$ и $\hat{h}^+$

$$\lambda\hat{q} + \frac{q}{dx}\left(2\frac{q}{h}\hat{q} - \frac{q^2}{h^2}\hat{h} - c\hat{q}\right) + \beta\frac{q}{h}\pi + G(h\hat{h})_x = \\ = \hat{h} + \frac{2q^2\hat{h} - 2qh\hat{q}}{h^3},$$

$$\lambda\hat{\pi} + \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{h}\hat{\pi} - c\hat{\pi}\right) - \beta G h\hat{h} = -\frac{\hat{\pi}q}{h^2}, \qquad (3)$$

$$\lambda\hat{h} + \frac{d}{dx}(\hat{q} - c\hat{h}) + \beta\hat{\pi} = 0.$$

Для $\hat{q}^-$, $\hat{\pi}^-$ и $\hat{h}^-$ при $0 < x < +\infty$ (знак «$-$» опущен) имеем линейную систему с постоянными коэффициентами

$$h\hat{q} + 2\hat{q} - \hat{h}' - c\hat{q}' + \beta\hat{\pi} + G\hat{h}' = 3\hat{h} - 2\hat{q},$$

$$\lambda\hat{\pi} + \hat{\pi}' - c\hat{\pi}' - \beta G\hat{h} = -\hat{\pi},$$

$$\lambda\hat{h} + \hat{q}' - c\hat{h}' + \beta\hat{\pi} = 0,$$

поэтому решение ищем в форме $\hat{h} = e^{\sigma x}$, $\hat{q} = \hat{Q}e^{\sigma x}$, $\hat{\pi} = \hat{\Pi}e^{\sigma x}$.

После подстановки этих соотношений в систему и исключения $\hat{Q}$ и $\hat{\Pi}$, получаем дисперсионное соотношение

$$(-3c^2 + G - 1 - cG + 3c + c^3)\sigma^3 + \\ + (5c + \lambda G - 3\lambda + 6\lambda c - 3 - 3\lambda c^2 - 2c^2)\sigma^2 + \\ + (3\lambda^2 c + 4\lambda c - 3\lambda^2 + \beta^2 Gc - 5\lambda - \beta^2 G)\sigma - \\ - 2\lambda^2 - \beta^2 G\lambda - \lambda^3 - 2\beta^2 G = 0. \quad (4)$$

Подходящими являются только решения, затухающие при $x \to \pm\infty$ и соответствующие значения σ. Дисперсионное соотношение (4) имеет три корня σ_k $(k = 1, 2, 3)$ при фиксированном λ. Исследуем детально случай $\lambda < 0$ (случай $\lambda > 0$ исследуется аналогично). Корень σ_1 всегда действителен, другие два корня либо действительны, либо комплексно сопряжены, но их действительные части всегда отрицательны при $\lambda < 0$.

Рассмотрим решение в области $-\infty < x < 0$. Введем обозначения

$$D_0 = \frac{q}{h},$$

$$D_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{h}\right) = \frac{(c-1)}{h^2}h',$$

$$D_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{q^2}{h^2}\right) = 2\frac{q(c-1)}{h^3}h'$$

и перепишем (3) в виде

$$\lambda\hat{q} + 2D_1\hat{q} + 2D_0\hat{q}' - D_2\hat{h} - D_0^2\hat{h}' - c\hat{q}' + \\ + \beta D_0\hat{\pi} + Gh'\hat{h} + Gh\hat{h}' = \hat{h} + 2\frac{q^2}{h^3}\hat{h} - 2\frac{q}{h^2}\hat{q},$$

$$\lambda\hat{\pi} + D_1\hat{\pi} + D_0\hat{\pi}' - \beta G h\hat{h} = -\frac{q}{h^2}\hat{p},$$

$$\lambda\hat{h} + \hat{q}' - c\hat{h}' + \beta\hat{\pi} = 0.$$

Эту систему представим в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{b}, \qquad (5)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2D_0 - c & -D_0^2 + Gh & 0 \\ 1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & D_0 - c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q} = (\hat{q}', \hat{h}', \hat{\pi}'),$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

Компоненты вектора $\mathbf{b}$ описываются выражениями

$$b_1 = \left(-\lambda - 2D_1 - 2\frac{q}{h^2}\right)\hat{q} + $$
$$+\left(D_2 - Gh' + 1 + 2\frac{q^2}{h^3}\right)\hat{h} - \beta D_0\hat{\pi},$$

$$b_2 = -\lambda\hat{h} - \beta\hat{\pi},$$
$$b_3 = \beta G h\hat{h} - \lambda\hat{\pi} - D_1\hat{\pi}.$$

Решением системы (5) является

$$\hat{q} = \frac{\Delta\tilde{q}}{|\mathbf{A}|}, \quad \hat{h} = \frac{\Delta\tilde{h}}{|\mathbf{A}|}, \quad \hat{\pi} = \frac{\Delta\tilde{\pi}}{|\mathbf{A}|}.$$

Здесь определители $\Delta\tilde{q}$, $\Delta\tilde{h}$, $\Delta\tilde{\pi}$ получаются из определителя $|\mathbf{A}|$ заменой k-го столбца $(k = 1, 2, 3)$ столбцом свободных членов $\mathbf{b}$ для $\hat{q}$, $\hat{h}$, $\hat{\pi}$ соответственно. Определитель матрицы $\mathbf{A}$ дается формулой

$$\Delta = |\mathbf{A}| = \frac{(c-1)\left(Gh^3 - (c-1)^2\right)}{h^3}.$$

В результате найдем

$$\hat{q} = \frac{1}{\Delta}(-b_1 c D_0 + b_1 c^2 + b_2 D_0^2 c - b_2 G h D_0 + b_2 G h c),$$

$$\hat{h} = \frac{1}{\Delta}(2b_2 D_0^2 - 3b_2 D_0 c + b_2 c^2 - b_1 D_0 + b_1 c),$$

$$\hat{\pi} = \frac{1}{\Delta}(-2cb_3 D_0 + c^2 b_3 + b_3 D_0^2 - b_3 G h).$$

Решение имеет особенность при условии

$$Gh^3 - (c-1)^2 = 0. \tag{6}$$

Заметим, что $\hat{h} \to 1$, $\hat{h}' \to 0$ при $x \to -\infty$ и получаем дисперсионное соотношение (4). Корень $\sigma = \sigma_1 > 0$, соответствует затухающему решению при $x \to -\infty$

$$\hat{h}^+ = \exp\left(\sigma_1(x - x_0)\right),$$

$$\hat{q}^+ = \frac{\beta^2 G}{\sigma_1(c\sigma_1 - \sigma_1 - \lambda)}\exp\left(\sigma_1(x - x_0)\right),$$

$$\hat{\pi}^+ = \frac{\beta G}{\lambda + \sigma_1 - c\sigma_1}\exp\left(\sigma_1(x - x_0)\right).$$

Выберем $x = -x_0$. В таком случае появляются начальные условия для численного интегрирования системы от $x = -\infty$ (далеко от горба) до $x = 0$, где расположен скачок. Однако, как было найдено выше, в точке $x = x_1$ выполняется соотношение (6), и система имеет особенность дресслеровского типа. Представим нашу систему в виде, более удобном для дальнейшего исследования, введя новые функции $\hat{\psi}$ и $\hat{g}$ соотношениями

$$\hat{h} = \hat{\psi}',$$

$$\hat{g} = c\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} - \lambda\hat{\psi} - \beta\int\hat{\pi}dx = c\hat{\psi}' - \lambda\hat{\psi} - \beta\int\hat{\pi}dx.$$

В результате получим

$$h[Gh^3 - (c-1)^2]\hat{\psi}'' + \Big\{[Gh^3 + 2(c-1)^2]h' +$$
$$+ 2\lambda(c-1)h^2 + 2c(c-1)h - h^3 - 2(c-1)^2\Big\}\hat{\psi}' +$$
$$[-\lambda^2 h^3 - 2\lambda(c-1)hh' - 2\lambda c h^2 + 2\lambda(c-1)h]\hat{\psi} +$$
$$+\beta\Big\{(c-1)h^2\hat{g}' +$$
$$+[-2(c-1)hh' - \lambda h^3 + 2(c-1)h - 2ch^2]\hat{g}\Big\} = 0,$$

$$\hat{g}'' + \left\{-\frac{\lambda}{c-1}h - \frac{h'}{h}\right\}\hat{g}' + \beta\frac{Gh^2}{c-1}\hat{\psi}' = 0.$$

Около особенности $x = x_1$ имеем

$$3Gb^3 D h_1(x - x_1)\hat{\psi}'' + a_1\hat{\psi}' + a_0\hat{\psi} + k_1\hat{g}' + s_1\hat{g} = 0,$$
$$\hat{g}'' + m\hat{g}' + r\hat{\psi}' = 0.$$

Сдвигая особенность в начало координат $(x - x_1 \to x)$, найдем

$$x\hat{\psi}'' + a\hat{\psi}' + b\hat{\psi} + k\hat{g}' + s\hat{g} = 0,$$
$$\hat{g}'' + m\hat{g}' + r\hat{\psi}' = 0.$$

Имеется три регулярных решения $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$, $\hat{\psi}_3$, которые можно представить в виде

$$\hat{\psi}_i = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

$$A_{i+1} = -\frac{(i+1)kB_{i+1} + bA_i + sB_i}{(i+1)(a+i)},$$

$$B_{i+1} = -\frac{1}{(i+1)}\Big[mB_i + rA_i\Big] \quad (i = 1, 2, 3).$$

где коэффициенты A_1 и B_2 определяются выражениями

$A_1 = -b/a$, $B_2 = -1/2rA_1$ для $\hat{\psi}_1$,
$A_1 = -s/a$, $B_2 = -1/2rA_1$ для $\hat{\psi}_2$,
$A_1 = -k/a$, $B_2 = -1/2[m + rA_1]$ для $\hat{\psi}_3$.

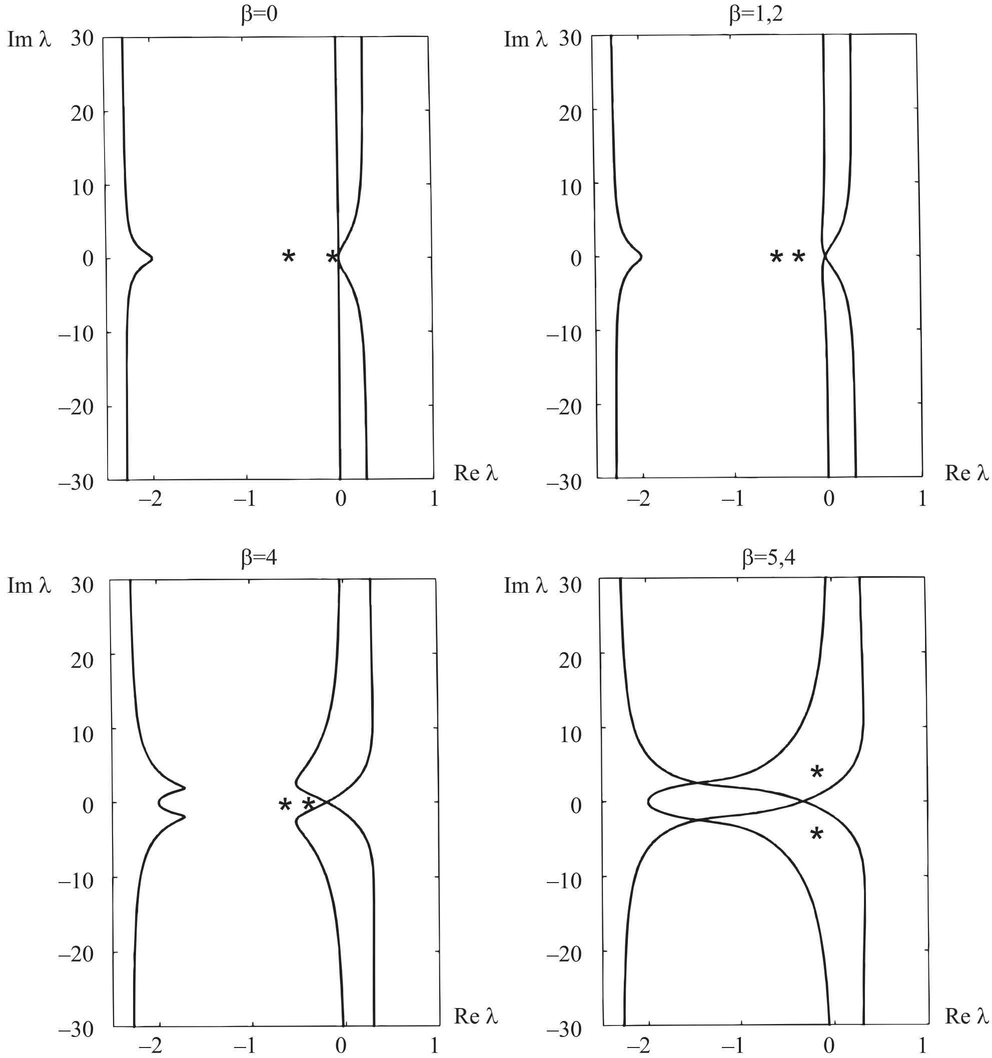

Рис. 1. Непрерывный и дискретный спектр при $G = 0,1$; течение турбулентно

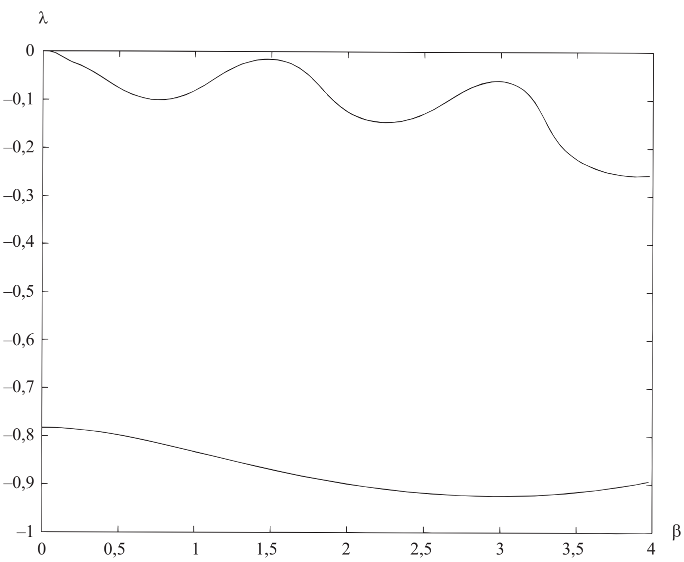

Рис. 2. Устойчивость к трехмерным возмущениям, $G = 0{,}1$; турбулентный режим

Имеется также одно сингулярное решение

$$\hat{\psi}_4 = (-x)^{1-a}[A_1 x + A_2 x^2 + \ldots],$$

$$A_1 = \frac{-b + kB_1(a-2)}{2-a},$$

$$A_{i+1} = \frac{-bA_i + kB_{i+1}(a-i-2) + sB_i}{(i+1)(i+2-a)},$$

$$B_2 = -\frac{r}{a-2}, \quad B_{i+1} = \frac{rA_i + mB_i}{(a-i-2)}.$$

Общим решением является

$$\hat{\psi} = c_1(\lambda)\hat{\psi}_1 + c_2(\lambda)\hat{\psi}_2 + c_3(\lambda)\hat{\psi}_3 + c_4(\lambda)\hat{\psi}_4.$$

Константы c_k для конкретного λ находятся в ходе численного интегрирования. Подберем λ таким образом, чтобы подавить сингулярное решение из условия $c_4(\lambda) = 0$. Это λ и является искомым собственным значением задачи. Для нахождения собственной функции необходимо проинтегрировать систему, которая теперь не имеет особенности, от $x = -\infty$ до $x = 0$, затем, воспользовавшись соотношением на скачке (3), пересчитать $\hat{h}^+$, $\hat{q}^+$, $\hat{\pi}^+$ на $\hat{h}^-$, $\hat{q}^-$, $\hat{\pi}^-$, чтобы в решении на интервале $0 < x < +\infty$

$$\hat{h}^- = M_1(\hat{r})\exp(\sigma_1 x) + M_2(\hat{r})\exp(\sigma_2 x) + \\ + M_3(\hat{r})\exp(\sigma_3 x)$$

подавить единственное растущее на $+\infty$ слагаемое, $M_1(\hat{r}) = 0$. Результаты исследования устойчивости положительных катящихся волн показаны на рис. 1 и 2. Когда возмущения двумерны, имеется одно устойчивое $\lambda_2 < 0$ и одно нейтральное $\lambda_1 = 0$. Для ненулевого волнового числа $\beta \neq 0$ при увеличении его от нуля, оба корня начинают сближаться и при $\beta \approx 5,2$; $G = 0,1$ они сливаются и становятся комплексно-сопряженной парой.

В работе проведено исследование устойчивости решения при всех параметрах G. Установлено, что положительные катящиеся волны устойчивы к трехмерным возмущениям, а отрицательные волны — неустойчивы.

Литература

1. *Dressler R. F.* Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 149–194.
2. *Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: СО РАН, 2000. 420 с.
3. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 21–27.
4. *Chang H.-C., Demekhin E. A.* Complex wave dynamics on thin films. Elsevier, 2002. 402 p.

Статья поступила 15 февраля 2005 г.
Кубанский государственный университет
Южный научный центр РАН