УДК 521.11

ОЦЕНКА КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Батмунх Н.

ESTIMATE OF SHORT-PERIODIC PERTURBATIONS IN A PROBLEM OF CELESTIAL MECHANICS

Batmunkh N.[*,**]

[*] Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russia

[**] Institute of Astronomy and Geophysics, Mongolian Academy of Sciences, Ulaanbaatar, 13343, Mongolia

e-mail: monastro@yandex.ru

Abstract. Let us consider the following problem of celestial mechanics. A zero-mass point moves under a gravitational acceleration $\mathbf{P}_0$ to a central body of finite mass, and a disturbing acceleration $\mathbf{P}$. The last vector is constant in an accompanying reference frame with axes directed along the radius, the transversal, and the angular momentum vector. Earlier this problem has been transformed using averaging method. In more exact terms a change of variables excluding short-periodic harmonics has been found (in the first approximation with respect to the ratio $|\mathbf{P}|/|\mathbf{P}_0|$). So the differences between osculating and mean elements were obtained explicitly, as well as the equations of motion in mean elements. A problem of evaluating the magnitude of short-periodic harmonics arises. It is not difficult to evaluate them for each element. But we need to do it in the coordinate space, not in the space of elements. Meanwhile the standard estimate of a coordinates increment via an elements increment is drastically rough. In the present paper we succeed to obtain an exact estimate using Euclidean (mean-squared) norm of a variance. For this a relatively simple expression for the squared variance of the radius-vector via variances of elements was firstly derived. It was applied to estimate the norm $\| \mathrm{d}\mathbf{r} \|$ (difference of position vectors on the osculating and mean orbit) in the above problem. It turns out that $\| \mathrm{d}\mathbf{r} \|^2$ is a weighted sum of squared components of $\mathbf{P}$, and the corresponding coefficients depend on semi-major axis and eccentricity of the mean orbit only. The results are applied to the two real problems on the motion of sputniks, and of asteroids.

Keywords: Euclidean (mean-squared) norm of a variance, osculating orbit, disturbing acceleration, short-periodic perturbations.

Введение

В последнее время появилось несколько работ, посвященных движению точки нулевой массы $\mathcal{A}$ под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения, компоненты которого постоянны в одной из двух сопутствующих систем отсчета, связанных с радиус-вектором или вектором скорости [1–4]. Методом осреднения [5] там найдены замкнутые формулы перехода от оскулирующих к средним элементам. Иными словами, найдены короткопериодические возмущения элементов. В практических задачах требуется оценить их норму. Ее величина показывает, нужно ли учитывать эти возмущения, или ими можно пренебречь. Этому посвящена настоящая статья.

1. Смещение оскулирующей орбиты относительно средней

Пусть точка нулевой массы $\mathcal{A}$ движется под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения. Введем неинерциальную систему отсчета $\mathcal{O}$ с началом в $\mathcal{S}$ и с осями, направлеными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Пусть компоненты S, T, W вектора возмущающего ускорения постоянны, а их отношение

Батмунх Нямсурэн, аспирант кафедры небесной механики Санкт-Петербургского государственного университета, научный сотрудник Института астрономии и геофизики Монгольской Академии наук; e-mail: monastro@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант 6.37.341.2015).

к основному ускорению, вызванному притяжением центрального тела $\mathcal{S}$, не превосходит значения $\mu \ll 1$. В этих условиях в [3,4] найдено осредняющее преобразование с точностью до первого порядка по μ: получены уравнения в средних элементах и разности (обозначенные символом дифференциала) оскулирующих и средних элементов. Приведем их для a (большая полуось), e (эксцентриситет), i (наклон), g (аргумент перицентра), Ω (долгота восходящего узла), M (средняя аномалия):

$$\mathrm{d}a = \frac{e}{\omega^2}[-(e+2\cos E)S+ \\ + 2\sin E\eta T], \quad (1.1)$$

$$\mathrm{d}e = \frac{1}{4\omega^2 a}\Big\{-2(e+2\cos E)\,\eta^2 S+ \\ + \big[2(4-3e^2)\sin E - e\sin 2E\big]\,\eta T\Big\},$$

$$\mathrm{d}i = \frac{1}{4\omega^2 a\eta}\Big\{[2(2-e^2)\sin E - e\sin 2E]\cos g+ \\ + \eta[2e+4\cos E - e\cos 2E]\sin g\Big\}W,$$

$$\mathrm{d}g = -\frac{1}{4\omega^2 ae}\Big\{4\eta^3\sin ES+ \\ + [2e(2-e^2)+4(2-e^2)\cos E - e\cos 2E]T\Big\}- \\ - c\,\mathrm{d}\Omega,$$

$$\mathrm{d}\Omega = \\ = \frac{1}{4\omega^2 a\eta s}\Big\{[2(2-e^2)\sin E - e\sin 2E]\sin g- \\ - \eta[2e+4\cos E - e\cos 2E]\cos g\Big\}W,$$

$$\mathrm{d}M = \\ = \frac{1}{4\omega^2 ae}\Big\{[2(2+6e^2-3e^4)\sin E - 5e^3\sin 2E]S+ \\ + [4e(1+e^2)+8(1+e^2)\cos E- \\ - e(1+3e^2)\cos 2E]\eta T\Big\}.$$

Здесь и ниже $\omega = \varkappa a^{-3/2}$ — среднее движение, E, θ — эксцентрическая и средняя аномалии, u — аргумент широты, r — модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$, $\eta = \sqrt{1-e^2}$, $c = \cos i$, $s = \sin i$, $\varkappa^2$ — гравитационный параметр.

Поставим задачу перейти от разности элементов к разности положений, т.е. разности оскулирующего и среднего радиус-вектора $\mathbf{r}$. Эта величина векторная, и нам достаточно ограничиться ее квадратом [4]

$$\varrho^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}u + c\,\mathrm{d}\Omega)^2+ \\ + r^2(\sin u\,\mathrm{d}i - s\cos u\,\mathrm{d}\Omega)^2\,. \quad (1.2)$$

Используя дифференциальные соотношения [6, 7]

$$\mathrm{d}E = \frac{a\sin E}{r}\,\mathrm{d}e + \frac{a}{r}\,\mathrm{d}M,$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{a\sin E}{r\eta}\,\mathrm{d}e + \frac{a\eta}{r}\,\mathrm{d}E, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}g + \mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}r = \frac{r}{a}\,\mathrm{d}a - a\cos E\,\mathrm{d}e + ae\sin E\,\mathrm{d}E, \quad (1.3)$$

получим

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{8r\omega^2 e}\Big\{[4(2+5e^2- \\ - 2e^4)\sin E - 2e(2+3e^2)\sin 2E]S+ \\ + [2e(8+e^2)+(16+15e^2)\cos E- \\ - 10e\cos 2E + e^2\cos 3E]\eta T\Big\}, \quad (1.4)$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{a}{16r^2\omega^2 e}\Big\{4[(4+9e^2-4e^4)\sin E- \\ - 2e(2+e^2)\sin 2E + e^2\sin 3E]\eta S+ \\ + [e(48-39e^2-4e^4)+ \\ + 4(8-3e^2-6e^4)\cos E - 4e(9-8e^2)\cos 2E+ \\ + 4e^2(3-2e^2)\cos 3E - e^3\cos 4E]T\Big\}.$$

$$\mathrm{d}r = \frac{a}{8r\omega^2}\Big\{[2(4+6e^2-3e^4) - e(20-3e^2)\cos E+ \\ 2e^4\cos 2E + e^3\cos 3E]S+ \\ + [e(42+3e^2)\sin E- \\ - 4e^2\sin 2E + e^3\sin 3E]\eta T\Big\}.$$

Используя (1.4), придем к представлению входящих в правую часть (1.2) выражений в виде многочленов Фурье по эксцентрической аномалии

$$\mathrm{d}r = \frac{a}{8r\omega^2}\Psi_1, \\ r(\mathrm{d}u + c\,\mathrm{d}\Omega) = \frac{a}{8r\omega^2}\Psi_2, \quad (1.5) \\ r(\sin u\,\mathrm{d}i - s\cos u\,\mathrm{d}\Omega) = \frac{1}{4\omega^2}\Psi_3,$$

где

$$\Psi_1 = [2(4+6e^2-3e^4) - e(20-3e^2)\cos E + 2e^4\cos 2E + e^3\cos 3E]S + [e(42+3e^2)\sin E - 4e^2\sin 2E + e^3\sin 3E]\eta T,$$

$$\Psi_2 = 2e[3(4-e^2)\sin E - 6e\sin 2E + e^2\sin 3E]\eta S + [(32-27e^2) + 2e(2-7e^2)\cos E + e^2(5+2e^2)\cos 2E - 2e^3\cos 3E]T,$$

$$\Psi_3 = \big[(4-3e^2) - 3e\cos E + 2e^2\cos 2E\big]\,W.$$

2. Норма смещения оскулирующей орбиты относительно средней

Для оценки смещения оскулирующей орбиты относительно средней воспользуемся среднеквадратической нормой по средней аномалии

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(1-e\cos E)\,\mathrm{d}E. \tag{2.1}$$

В силу (1.2), (1.5)

$$\varrho^2 = \frac{a^2}{64r^2\omega^4}\Psi_4, \qquad \Psi_4 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + 4\frac{r^2}{a^2}\Psi_3^2, \tag{2.2}$$

что можно представить в виде

$$\Psi_4 = \Psi_5 S^2 + \Psi_6 T^2 + \Psi_7 W^2 + \Psi_8 ST.$$

Здесь Ψ_5, Ψ_6, Ψ_7 — четные тригонометрические многочлены

$$\Psi_5 = 4e^2(1-e^2)[3(4-e^2)\sin E - 6e\sin 2E + e^2\sin 3E]^2 + [2(4+6e^2-3e^4) - e(20-3e^2)\cos E + 2e^4\cos 2E + e^3\cos 3E]^2,$$

$$\Psi_6 = [(32-27e^2) + 2e(2-7e^2)\cos E + e^2(5+2e^2)\cos 2E - 2e^3\cos 3E]^2 + (1-e^2)[e(42+3e^2)\sin E - 4e^2\sin 2E + e^3\sin 3E]^2,$$

$$\Psi_7 = 4\frac{r^2}{a^2}[(4-3e^2) - 3e\cos E + 2e^2\cos 2E]^2,$$

тогда как Ψ_8 — нечетный многочлен, пропадающий при осреднении.

Неожиданным подарком оказалось, что многочлен Ψ_4 содержит $1 - e\cos E$ множителем. В результате вычисление нормы свелось к нахождению свободного члена многочлена. Окончательно,

$$\|\varrho\|^2 = \frac{1}{32\omega^4}(A_1S^2 + A_2T^2 + A_3W^2) = \frac{a^6}{32\varkappa^4}(A_1S^2 + A_2T^2 + A_3W^2), \tag{2.3}$$

где

$$A_1 = 32 + 276e^2 - 255e^4 + 50e^6,$$

$$A_2 = 512 - 99e^2 - 385e^4 - e^6,$$

$$A_3 = 32 - 15e^2 + 10e^4.$$

Обратим внимание, что норма зависит только от компонент вектора возмущающего ускорения, большой полуоси и эксцентриситета, причем зависимость эта на удивление проста.

3. Примеры

В заключение применим полученные результаты к двум задачам.

1. Рассмотрим движение сближающегося с Землей астероида, на котором установлен двигатель малой тяги, обеспечивающий постоянное трансверсальное ускорение с компонентами $(0, T, 0)$. Выберем три АСЗ: 99 942 Апофис, 101 955 Бенну, 410 777 (2009 FD). Положим $\varkappa = 1{,}152\cdot 10^{10}$ м$^{3/2}$/с. Пусть тяга во всех случаях равна одному ньютону. Значения орбитальных и физических параметров найдем на сайте [8] и приведем их в табл. 1, в последней строке которой дается значение $\|\varrho\|$ согласно (2.3).

Как видим, периодическими возмущениями можно пренебречь. Однако для меньших в 20 раз (по размеру) астероидов величина $\|\varrho\|$ будет больше на 4 порядка и превысит диаметр Земли. Учет периодических возмущений становится обязательным.

2. Рассмотрим движение геостационарного спутника–ретранслятора. Пусть он непрерывно излучает на Землю поток электромагнитной энергии мощностью w. Космическому

Таблица 1. Значения орбитальных и физических параметров астероидов

Астероиды	99 942 Апофис	101 955 Бенну	410 777 (2 009 FD)
a, а.е.	0,9222	1,1264	1,1631
a, м	$1{,}3834 \cdot 10^{11}$	$1{,}6896 \cdot 10^{11}$	$1{,}7447 \cdot 10^{11}$
ω, рад/с	$2{,}2388 \cdot 10^{-7}$	$1{,}6587 \cdot 10^{-7}$	$1{,}5808 \cdot 10^{-7}$
e	0,1911	0,2037	0,4930
диаметр, м	330	490	470
масса, кг	$4 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{10}$	$8{,}3 \cdot 10^{10}$
$\lvert T \rvert$ = тяга/масса, м/с^2	$0{,}250 \cdot 10^{-10}$	$0{,}167 \cdot 10^{-10}$	$0{,}121 \cdot 10^{-10}$
$\lvert T \rvert/\omega^2$, м	498,780	606,989	484,208
$\lVert\varrho\rVert$, км	1,987	2,417	1,846

Таблица 2. Значения физических параметров спутников

Спутники	Молния–3К	Экспресс–АМ5	QuetzSat-1
масса, кг	1 780	3 400	5 514
w, Вт	1 470	14 000	20 000
$S = w/(mc)$, м/с^2	$0{,}2753 \cdot 10^{-8}$	$1{,}3725 \cdot 10^{-8}$	$1{,}2090 \cdot 10^{-8}$
$\lVert\varrho\rVert = S/\omega^2$, м	0,518	2,581	2,274

аппарату массой m тем самым дается возмущающее ускорение с компонентами $(S, 0, 0)$, $S = w/(mc)$, где c — скорость света. Перечислим несколько спутников с наибольшей мощностью излучения: Молния-3К, Экспресс-АМ5, Sirius-FM6, IntelSat-17, QuetzSat-1. Найдем значение $\|\varrho\|$ для трех из них. Для геостационарных спутников $\omega = 7{,}292 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, $e = 0$. Значения физических параметров помещены в статье [9], на сайте ГЛОНАСС [10] и приведены в табл. 2, в последней строке которой дается значение $\|\varrho\|$ согласно (2.3).

Как видим, периодические возмущения необходимо учитывать только в редких случаях, где требуется точность порядка метра и выше.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору К. В. Холшевникову за руководство работой и помощь в подготовке рукописи.

Литература

1. *Санникова Т. Н., Холшевников К. В., Чечеткин В. М.* Применение метода осреднения Гаусса к анализу возможности увода небесного тела с помощью малой тяги // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2013. № 2. Т. 4. С. 144–147.
2. *Санникова Т. Н.* Осредненные уравнения движения в центральном поле при постоянном по модулю возмущающем ускорении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2014. Сер. 1. Т. 59. Вып. 1. С. 171–179.
3. *Санникова Т. Н., Холшевников К. В.* Осредненные уравнения движения при постоянном в различных системах отсчета возмущающем ускорении // Астрон. журн. 2014. Т. 91, № 12. С. 1060—1068.
4. *Батмунх Н., Санникова Т. Н., Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* Норма смещения положения небесного тела при вариации его орбиты // Астрон. журн. 2016. Т. 93, № 3. С. 331–338.
5. *Холшевников К. В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 208 с.
6. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
7. *Холшевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел. СПб.: Изд. СПбГУ, 2007. 180 с.
8. Jet Propulsion Laboratory – CNEOS (Center of Near Earth Object Studies): Impact Risk Data. Режим доступа: http://neo.jpl.nasa.gov/risk/ (дата обращения 20 октября 2017 г.)
9. *Лисов И.* Новая «Молния» красноярцев // Новости космонавтики. 2001. № 9. С. 38–40.
10. *Крылов А., Крейденко К.* Производство и эксплуатация спутников связи и вещания. 2014, 1 июня // Вестник ГЛОНАСС. Режим доступа: http://vestnik-glonass.ru/stati/proizvodstvo_i_ekspluatatsiya_sputnikov_svyazi_i_veshchaniya/?sphrase_id=10153 (дата обращения 20 октября 2017 г.)

References

1. Sannikova T. N., Kholshevnikov K. V., Chechetkin V. M. Primenenie metoda osredneniya Gaussa k analizu vozmozhnosti uvoda

nebesnogo tela s pomoshch'yu maloy tyagi [Application of Gauss averaging method to the analysis of the possibility of a celestial body deviation using a microthrust]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 4, iss. 2, pp. 144–147. (In Russian)

2. Sannikova T. N. Osrednennye uravneniya dvizheniya v tsentral'nom pole pri postoyannom po modulyu vozmushchayushchem uskorenii [Averaged equations of motion in a central field in the presence of a constant in absolute value disturbing acceleration]. *Vestnik S.-Peterburgskogo universiteta* [Bulletin of St.-Petersburg University], 2014, ser. 1, vol. 59, iss. 1, pp. 171–179. (In Russian)
3. Sannikova T. N., Kholshevnikov K. V. Averaged equations of motion for a perturbing acceleration which is constant in various reference frames. *Astronomy Reports*, 2014, vol. 58, no. 12, pp. 945–953. (In Russian)
4. Batmunkh N., Sannikova T. N., Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh. The norm of the position shift of a celestial body upon variation of its orbit. *Astronomy Reports*, 2016, vol. 60, iss. 3, pp. 366–373.
5. Kholshevnikov K. V. *Asimptoticheskie metody nebesnoy mekhaniki* [Asymptotic methods of celestial mechanics]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1985, 208 p. (In Russian)
6. Subbotin M. F. *Vvedenie v teoreticheskuyu astronomiyu* [Introduction to theoretical astronomy]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 800 p. (In Russian)
7. Kholshevnikov K. V., Titov V. B. *Two Body Problem.* St. Petersburg, St. Petersburg University Publ., 2007, 180 p. (In Russian)
8. Jet Propulsion Laboratory – CNEOS (Center of Near Earth Object Studies): Impact Risk Data. Available at: http://neo.jpl.nasa.gov/risk/ (accessed date 20.10.2017).
9. Lisov I. Novaya «Molniya» krasnoyartsev [New "Lightning" Krasnoyarsk residents]. *Novosti kosmonavtiki* [News of cosmonautics], 2001, no. 9, pp. 38–40. (In Russian)
10. Krylov A., Kreydenko K. Proizvodstvo i ekspluatatsiya sputnikov svyazi i veshchaniya. *Vestnik GLONASS* [GLONASS Bulletin], 2014, 1 june. Available at: http://vestnik-glonass.ru/stati/proizvodstvo_i_ekspluatatsiya_sputnikov_svyazi_i_veshchaniya/?sphrase_id=10153 (accessed date 20.04.2017). (In Russian)

Статья поступила 20 октября 2017 г.