УДК 521.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ ПО ДВУМ КОРОТКИМ СЕРИЯМ НАБЛЮДЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ С НАИЛУЧШЕЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ

Кузнецов В. Б.

THE DETERMINATION OF PRELIMINARY ORBIT FROM TWO SERIES OF OBSERVATIONS BY THE CONTINUATION METHOD WITH OPTIMAL PARAMETRIZATION

Kuznetsov V. B.

Institute of Applied Astronomy RAS, St. Petersburg, 191187, Russia
e-mail: vb.kuznetsov@iaaras.ru

Abstract. The method of determination of preliminary orbit by the angle topocentric coordinates and their velocities of observed body in two instants of time is considered. The main equation of the method is based on the integral of areas and integral of the energy of the two-body problem. For its solving the continuation method with optimal parametrization is proposed. This method does not require the polynomial form of solved equation. The problem is reduced to solving the Cauchy problem for two ordinary differential equations (ODE) with initial conditions what does not depends on data of original equation. The arc calculated along the solution curve is the optimal continuation parameter for this solution. The such parametrization is the best for the continuation method. In this way, all possible solutions are obtained. As example, the determination of the orbit of asteroid (1685) Toro is presented.

Keywords: preliminary orbit, the two-body integrals, the continuation method with optimal parametrization.

Введение

История методов определения орбиты на базе интегралов задачи двух тел сравнительно коротка по отношению к классическим подходам Лапласа и Гаусса. Начало исследованиям в этой области положила работа Таффа и Холла [1]. В ней задача определения орбиты ограничивается использованием угловых координат и их производных в два момента времени. Для этой цели подходят три интеграла вектора углового момента и интеграл энергии. Их равенство для двух моментов времени позволяет построить систему уравнений относительно четырёх неизвестных. Полученная система сводится к алгебраическому уравнению 24-ой степени относительно одной неизвестной — топоцентрического расстояния для любого из моментов времени, для решения которого предлагалось использовать метод Ньютона–Рафсона. Данный подход иллюстрируется примерами определения орбит ИСЗ. По прошествии трёх десятилетий к данной проблеме обратилась группа итальянских исследователей из университета г. Пиза: Гронки и др. За последние семь лет они посвятили этой задаче три статьи [2–4]. Критика работы Таффа и Холла сводилась ими к недостаткам метода Ньютона–Рафсона, который для поиска решения требует начального приближения и позволяет находить его только локально, что затрудняет исследование остальных корней полинома. Авторы акцентировали внимание на этой проблеме и предложили два метода её решения [2]. Первый метод основан на решении полиномиального уравнения 48-ой степени, с использованием прямого и обратного преобразования Фурье для вычисления коэффициентов. Такой подход требует использования четверной точности вычислений (32 знака). Другой метод использует преобразование координат с переходом к новым переменным, но является более трудоёмким и требует более чем четверную точность наблюдений. В следующей работе [3] исследователям, благодаря использованию вектора Лапласа–Ленца, удалось понизить порядок исследуемой системы до 20-го и получить воз-

Кузнецов Владимир Борисович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории малых тел солнечной системы Института прикладной астрономии РАН; e-mail: vb.kuznetsov@iaaras.ru.

можность отказаться от четверной точности вычислений. И наконец, в последней на сегодняшний день публикации [4], обращение к переопределённой системе уравнений позволило понизить порядок исследуемого полинома до 9-ой степени. Во всех статьях методики иллюстрировались примерами определения орбит астероидов. Начиная с 2000 г. Виноградовой Т.А. в Институте прикладной астрономии РАН метод использовался для определения предварительных орбит и идентификации астероидов [5,6]. Поиск корней полинома производился перебором, на заданном интервале, с уточнением найденного значения до заданной точности. Разработка альтернативного подхода, сочетающего как простоту, так и надёжность представленных выше методов поиска решений задачи, является целью данной работы.

1. Определение орбиты по первым интегралам задачи двух тел. Базовые уравнения задачи

Рассмотрим два ряда оптических наблюдений на моменты времени t_1 и t_2. Основные уравнения, связывающие их с орбитой наблюдаемого тела, выглядят так:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_i\rho_i - \mathbf{R}_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{e}_i\rho_i + \mathbf{e}_i\dot{\rho}_i - \dot{\mathbf{R}}_i, \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2,$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор гелиоцентрического положения объекта, $\mathbf{e}_i$ — топоцентрический вектор направления на объект, ρ_i — топоцентрическое расстояние до объекта, $\mathbf{R}_i$ — топоцентрический вектор положения притягивающего центра. Точка означает производную по времени.

Рассмотрим интегралы задачи двух тел, по первой работе Гронки [2].

1) Интеграл площадей:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{D}_i\dot{\rho}_i + \mathbf{E}_i\rho_i^2 + \mathbf{F}_i\rho_i + \mathbf{G}_i,$$

$$i = 1, 2,$$

где

$$\mathbf{D}_i = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{R}_i),$$

$$\mathbf{E}_i = (\mathbf{e}_i \times \dot{\mathbf{e}}_i), \mathbf{F}_i = \\ = (\dot{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{R}_i) - (\mathbf{e}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i), \mathbf{G}_i = (\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i).$$

2) Интеграл энергии:

$$h = \dot{r}_i^2 - \frac{2k^2}{r_i} = \dot{\rho}_i^2 + c_{1i}\dot{\rho}_i + c_{2i}\rho_i^2 + \\ + c_{3i}\rho_i + c_{4i} - \frac{2k^2}{\sqrt{\rho_i^2 - 2(\mathbf{e}_i\mathbf{R}_i)\rho_i + R_i^2}},$$

где k — постоянная Гаусса (или её аналог)

$$c_{1i} = -2(\mathbf{e}_i\dot{\mathbf{R}}_i), \quad c_{2i} = \dot{e}_i^2,$$

$$c_{3i} = -2(\dot{\mathbf{e}}_i\dot{\mathbf{R}}_i), \quad c_{4i} = \dot{R}_i^2.$$

Приравняем их между эпохами:

1) Интеграл площадей для двух эпох:

$$\mathbf{D}_1\dot{\rho}_1 - \mathbf{D}_2\dot{\rho}_2 = \mathbf{J}(\rho_1, \rho_2) = \\ = \mathbf{E}_2\rho_2^2 - \mathbf{E}_1\rho_1^2 + \mathbf{F}_2\rho_2 - \\ - \mathbf{F}_1\rho_1 + \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1. \tag{1.2}$$

Выразим $\dot{\rho}_1$ и $\dot{\rho}_2$ через $\{\rho_1, \rho_2\}$:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1(\rho_1, \rho_2) &= \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2}, \\ \dot{\rho}_2(\rho_1, \rho_2) &= \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

2) Интеграл энергии для двух эпох:

$$\dot{r}_1^2 - \dot{r}_2^2 - \frac{2k^2}{r_1} + \frac{2k^2}{r_2} = 0. \tag{1.4}$$

Из уравнений (1.2)–(1.4) можно получить уравнение с одним неизвестным ρ_1

$$f(\rho_1) = f_1 f_2 + 2k^2(f_3 - f_4), \tag{1.5}$$

где

$$f_1 = a_8\rho_1^4 + a_9\rho_1^3 + a_{10}\rho_1^2 + \\ + a_{11}\rho_1 + a_{12} + \left(a_{13}\rho_1^2 + a_{14}\rho_1 + a_{15}\right) \times \\ \times \sqrt{a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_5},$$

$$f_2 = \sqrt{\rho_1^2 + a_1\rho_1 + a_2} \times \\ \times \sqrt{a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_5 + \sqrt{a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_5}},$$

$$f_3 = \sqrt{\rho_1^2 + a_1\rho_1 + a_2},$$

$$f_4 = \sqrt{a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_6 + a_7\sqrt{a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_5}}.$$

Введём следующие обозначения:

$$J_1 = -\frac{\mathbf{F}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{2\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}, \quad J_2 = \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)},$$

$$J_3 = \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)},$$

$$J_4 = \frac{(\mathbf{F}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2))^2}{4(\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2))^2} - \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{(\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2))^2},$$

$$K_1 = \frac{(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_2 = -\frac{(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_3 = \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_4 = -\frac{(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_5 = \frac{((\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_6 = \frac{(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_7 = -\frac{(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_8 = \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_9 = -\frac{(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2},$$

$$K_{10} = \frac{((\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) \times \mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2|^2}.$$

Тогда коэффициенты $a_1, \ldots, a_{15}$ можно представить следующим образом:

$$a_1 = -2(\mathbf{e}_1\mathbf{R}_1), \quad a_2 = R_1^2, \quad a_3 = J_2,$$

$$a_4 = J_3, \quad a_5 = J_4,$$

$$a_6 = \frac{(\mathbf{F}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2))^2}{2(\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2))^2} + a_2 - \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1)(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{(\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2))^2},$$

$$a_7 = \frac{\mathbf{F}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)} - \frac{2(\mathbf{e}_2\mathbf{R}_2)\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{\mathbf{E}_2(\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)},$$

$$a_8 = ((K_1 - K_6)J_2 + K_2 - K_7) \times ((K_1 + K_6)J_2 + K_2 + K_7),$$

$$a_9 = 2J_2\left(J_3\left(K_1^2 - K_6^2\right) + K_1K_4 - K_6K_9\right) + 2J_3(K_1K_2 - K_6K_7) + 2(K_2K_4 - K_7K_9),$$

$$\begin{aligned} a_{10} = {} & 2J_2\left(K_1^2 - K_6^2\right)\left(3J_1^2 + J_4\right) + J_2K_1(6K_3J_1 + 2K_5 + c_{11}) - J_2K_6(6K_8J_1 + 2K_{10} + c_{12}) + \\ & + J_2K_3^2 - J_2K_8^2 - J_2c_{22} + K_1^2J_3^2 + 2K_1\left(J_1^2K_2 + J_3K_4 + J_4K_2\right) - J_3^2K_6^2 - \\ & - 2K_6\left(J_1^2K_7 + J_3K_9 + J_4K_7\right) + 2J_1(K_2K_3 - K_7K_8) + K_2(2K_5 + c_{11}) - \\ & - K_7(2K_{10} + c_{12}) + K_4^2 - K_9^2 + c_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} = {} & 6J_1^2J_3\left(K_1^2 - K_6^2\right) - 2J_3J_4K_6^2 + 6J_1J_3(K_1K_3 - K_6K_8) + 2J_3J_4K_1^2 + J_3K_1(c_{11} + 2K_5) - \\ & - J_3K_6(2K_{10} + c_{12}) + J_3K_3^2 - J_3K_8^2 - J_3c_{22} + 2J_1^2(K_1K_4 - K_6K_9) + c_{31} + \\ & + 2J_1(K_3K_4 - K_8K_9) - K_9(2K_{10} + c_{12}) + 2J_4(K_1K_4 - K_6K_9) + K_4(c_{11} + 2K_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} = {} & \left(J_1^4 + J_4^2\right)\left(K_1^2 - K_6^2\right) + K_5^2 - K_{10}^2 + 2J_1^3(K_1K_3 - K_6K_8) - K_{10}c_{12} + K_5c_{11} + \\ & + c_{41} - c_{42} + 6J_1^2J_4\left(K_1^2 - K_6^2\right) + J_4K_3^2 + J_1^2K_1(c_{11} + 2K_5) - J_1^2K_6(2K_{10} + c_{12}) + \\ & + J_1^2K_3^2 - J_1^2K_8^2 - J_1^2c_{22} - J_4K_8^2 - J_4c_{22} + 6J_1J_4(K_1K_3 - K_6K_8) - J_1c_{32} - \\ & - J_1K_8(2K_{10} + c_{12}) + J_4K_1(c_{11} + 2K_5) - J_4K_6(2K_{10} + c_{12}) + J_1K_3(c_{11} + 2K_5), \end{aligned}$$

$$a_{13} = 4J_1J_2\left(K_1^2 - K_6^2\right) + 4J_1K_1K_2 - 4J_1K_6K_7 + 2J_2(K_1K_3 - K_6K_8) + 2(K_2K_3 - K_7K_8),$$

$$a_{14} = 4J_1\left(J_3\left(K_1^2 - K_6^2\right) + K_1K_4 - K_6K_9\right) + 2J_3(K_1K_3 - K_6K_8) + 2(K_3K_4 - K_8K_9),$$

$$
\begin{aligned}
a_{15} = 4J_1^3 \left(K_1^2 - K_6^2\right) - c_{32} + \\
+ 2\left(3J_1^2 + J_4\right)\left(K_1K_3 - K_6K_8\right) + \\
+ \left(2J_1K_1 + K_3\right)\left(c_{11} + 2K_5\right) + \\
+ 2J_1\left(2J_4K_1^2 - 2J_4K_6^2 + K_3^2 - K_8^2 + c_{22}\right) - \\
- \left(2J_1K_6 + K_8\right)\left(2K_{10} + c_{12}\right).
\end{aligned}
$$

2. Метод продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией

В качестве метода решения уравнения (1.5) рассмотрим продолжение решения по параметру [7].

Идея метода заключается в следующем: пусть $H\left(x(\mu)\right) = 0$ — уравнение, которое мы хотим решить, а μ — некий параметр. Пусть для некоторого значения $\mu = \mu_0$ известно решение $x_{(0)}$, т.е. $H(x_{(0)}(\mu_0)) = 0$ и в этой точке выполняется теорема о неявной функции. Тогда рассмотрим глобальную гомотопию

$$
G\left(x, \mu\right) = H\left(x\right) - \mu H\left(x_0\right) = 0, \qquad (2.1)
$$

где $\mu \in [0{,}1]$ и x_0 — начальное приближение ($x_0 = 0$).

Если $\mu = 0$, тогда $G\left(x{,}0\right) = H\left(x\right) = 0$ — исходное уравнение.

Если $\mu = 1$, тогда $G\left(x{,}1\right) = H\left(x\right) - H\left(x_0\right) = 0$ и $x = x_0$, т.е. получаем известное решение.

Введём новый параметр $s \in [0, L]$, $L = \text{const}$:

$$
(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}\mu)^2,
$$

где s — длина дуги кривой множества решений (2.1). Параметр s — наилучший для поиска решения [8].

Тогда уравнение (2.1) можно записать как

$$
\begin{aligned}
G\left(x(s), \mu(s)\right) = \\
= H\left(x(s)\right) - \mu(s) H\left(x_0\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим задачу Коши в начальной точке x_0:

$$
\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} - H(x_0)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} = 0.
$$

Её можно привести к нормальной системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = H(x_0)\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^{-1}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}, \\
\frac{\mathrm{d}\mu}{ds} = \sqrt{1 - \frac{(\mathrm{d}x)^2}{(\mathrm{d}s)^2}}.
\end{aligned} \qquad (2.2)
$$

Следует интегрировать систему (2.2) в направлении роста параметра s, пока не будет достигнуто $\mu = 0$. Это будет первое решение. Интегрируя дальше, до заданного L, мы найдём остальные решения (если они существуют).

3. Метод продолжения решения для метода интегралов

Применим эту методику для уравнения (1.5) и примем $x = \rho_1$. Тогда мы получим систему ОДУ (2.2) в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_1}{ds} = \left(a_{12} + a_{15}\sqrt{a_5}\right)\sqrt{a_2\left(a_7\sqrt{a_5} + a_6\right)} - \\
- 2k^2\left(\sqrt{a_7\sqrt{a_5} + a_6} - \sqrt{a_2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{4Y_1Y_2Y_3}\big[Y_3\big\{\left(b_1\rho_1 + b_2\right)Y_2 + \\
+ \left(b_3\rho_1 + b_4\right)Y_1 + b_5\rho_1^7 + b_6\rho_1^6 + \\
+ b_7\rho_1^5 + b_8\rho_1^4 + b_9\rho_1^3 + b_{10}\rho_1^2 + b_{11}\rho_1 + b_{12}\big\} + \\
+ \left(b_{13}\rho_1 + b_{14}\right)Y_1 + b_{15}\rho_1^7 + b_{16}\rho_1^6 + b_{17}\rho_1^5 + \\
+ b_{18}\rho_1^4 + b_{19}\rho_1^3 + b_{20}\rho_1^2 + b_{21}\rho_1 + b_{22}\big],
\end{aligned}
$$

где

$$
Y_1 = f_3 = \sqrt{\rho_1^2 + a_1\rho_1 + a_2},
$$

$$
\begin{aligned}
Y_2 = f_4 = \Bigg(a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_6 + \\
+ a_7\sqrt{a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_5}\Bigg)^{1/2},
\end{aligned} \qquad (3.1)
$$

$$
Y_3 = \sqrt{a_3\rho_1^2 + a_4\rho_1 + a_5}.
$$

Выражения для коэффициентов $b_1, \ldots, b_{22}$ приведены в Приложении.

4. Пример. Определение орбиты астероида (1685) Торо

В качестве иллюстрации методики рассмотрим пример определения орбиты астероида, сближающегося с Землёй, (АСЗ) (1685) Торо, предложенный Виноградовой [6]. Здесь рассмотрены две пары наблюдений, разделённые интервалом в 30 лет, что соответствует 18 периодам обращения астероида.

Таблица 1. Наблюдения (1685) Торо

t (UT)	α (2000)	δ(2000)
1967 05 13.34171	16 37 18.12	−32 54 29.4
1967 05 13.36324	16 37 15.72	−32 54 23.9
1997 03 15.35098	12 32 38.05	−26 32 19.8
1997 03 15.35727	12 32 37.25	−26 32 16.4

Таблица 2. Орбиты для первого решения на 16 февраля 2017 г.

	M_0 (°)	ω (°)	Ω (°)	i (°)	e	p	a (а.е.)
по $\{\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1\}$	92,009	121,763	273,698	9,478	0,4498	1,1032	1,3831
по $\{\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2\}$	190,816	128,532	273,698	9,478	0,4498	1,1032	1,3830
по $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$	275,626	126,275	273,698	9,478	0,4247	1,1204	1,3670
орбита ИПА	270,689	127,160	274,272	9,381	0,4361	1,1073	1,3674

Таблица 3. Орбиты для второго решения на 16 февраля 2017 г.

	M_0 (°)	ω (°)	Ω (°)	i (°)	e	p	a (а.е.)
по $\{\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1\}$	102,268	153,907	279,095	10,346	0,5492	1,0281	1,4721
по $\{\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2\}$	145,721	122,994	279,095	10,346	0,5492	1,0281	1,4720
по $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$	235,437	118,475	279,095	10,346	0,9817	0,0072	1,9235

Наблюдения 1967 г. произведены в обсерватории Catalina Station, Tucson, а наблюдения 1997 г. в McDonald Observatory, Fort Davis. Первые наблюдения в парах определяют начальные данные в моменты t_i $(i = 1, 2)$. Вторые наблюдения используются только для вычисления производных. Значение ρ_1 для первого наблюдения 0,90171 а.е. Решение системы (3.1) методом Булирша–Штёра [9] даёт два корня:

1) $\rho_1 = 0{,}88031$ а.е.;

2) $\rho_1 = 1{,}27267$ а.е.

Рассмотрим для этих двух решений вопрос выбора наиболее достоверного.

По данному значению ρ_1 можно вычислить орбиту тремя способами:

1) по $\{\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1\}$;

2) по $\{\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2\}$;

3) по $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$.

Первые два способа заключаются в вычислении элементов по векторам $\mathbf{r}$ и $\dot{\mathbf{r}}$ для каждой эпохи, получаемым с помощью (1.1) из значений ρ и $\dot{\rho}$ [10]. Третий способ основан на определении элементов орбиты по двум радиус-векторам $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ и интервалу времени Δt_{21} между ними [11,12]. В качестве эталона сравнения приведены элементы возмущённой орбиты астероида, полученной в ИПА РАН по всем имеющимся наблюдениям.

Элементы орбиты для первого решения, полученные тремя способами, хорошо согласуются между собой и орбитой ИПА (табл. 2). В первую очередь это касается параметров, определяющих форму орбиты: большой полуоси a, эксцентриситета е и как следствие параметра орбиты p. Элементы, определяющие плоскость орбиты: долгота узла Ω и наклон орбиты i, определяются всегда с минимальным разбросом, исходя из природы метода. Гораздо хуже согласуются значения для аргумента перигелия ω и уже совсем ненадёжны значения для средней аномалии M_0 на эпоху t_0. Необходимо отметить, что первые два способа хорошо представляют наблюдения только для своей дуги и плохо для другой. Третий способ лишён этого недостатка, но он требует указания числа полных оборотов астероида вокруг Солнца между сериями наблюдения, что могут дать только первые два. Для первого решения астероид Торо совершает 18 полных оборотов между моментами t_1 и t_2.

Элементы орбиты, полученные для второго решения, представлены в табл. 3. Здесь необходимо указать на сильное отличие элементов, полученных третьим способом, от первых двух. Это связано с тем, что решения, полученные по векторам положения и скорости, приводят к 16 полным оборотам астероида между моментами t_1 и t_2. Однако, для этого значения решение по третьему способу отсутствует. Наибольшее число оборотов, для которого решение по $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ существует, составляет 14.

Таким образом, первое решение выглядит более предпочтительным по сравнению со вторым.

Заключение

Использование метода продолжения решения по параметру (МПРП) не требует вычисления начального приближения, т.к. оно является стандартным для всех наборов начальных данных. МПРП позволяет находить все возможные решения. Применение МПРП к задаче определения предварительной орбиты не требует избавления от радикалов в уравнениях, что даёт возможность, при поиске решения, избежать роста числа фиктивных корней и сделать требования к точности вычислений менее строгими. При этом можно последовательно находить все возможные решения.

Приложение

$$b_1 = 8k^2, \quad b_2 = 4k^2 a_1, \quad b_3 = -8k^2 a_3,$$
$$b_4 = -4k^2 a_4, \quad b_5 = 24 a_3 a_8,$$
$$b_6 = 2a_3\left(11a_1a_8 + 10a_9\right) + 22a_4a_8,$$

$$\begin{aligned} b_7 = 18a_3\left(a_1a_9 + a_7a_{13}\right) &+ \\ + 20a_2a_3a_8 + 16a_3a_{10} &+ \\ + 2a_4\left(10a_1a_8 + 9a_9\right) &+ 20a_6a_8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_8 = 2a_3a_7\left(8a_1a_{13} + 7a_{14}\right) + 16a_2a_3a_9 &+ \\ + 14a_1a_3a_{10} + 12a_3a_{11} + 16a_1a_4a_9 &+ \\ + 15a_4a_7a_{13} + 18a_2a_4a_8 + 14a_4a_{10} &+ \\ + 2a_6\left(9a_1a_8 + 8a_9\right)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_9 = 2a_3a_7\left(6a_1a_{14} + 7a_2a_{13} + 5a_{15}\right) &+ \\ + 12a_2a_3a_{10} + 10a_1a_3a_{11} + 8a_3a_{12} &+ \\ + a_4a_7\left(13a_1a_{13} + 11a_{14}\right) + 14a_2a_4a_9 &+ \\ + 12a_1a_4a_{10} + 10a_4a_{11} + 12a_5a_7a_{13} &+ \\ + 2a_6\left(8a_2a_8 + 7a_1a_9 + 6a_{10}\right)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{10} = 2a_3a_7\left(4a_1a_{15} + 5a_2a_{14}\right) &+ \\ + 8a_2a_3a_{11} + 6a_1a_3a_{12} &+ \\ + a_4a_7\left(9a_1a_{14} + 11a_2a_{13} + 7a_{15}\right) &+ \\ + 10a_2a_4a_{10} + 8a_1a_4a_{11} + 6a_4a_{12} &+ \\ + 2a_6\left(6a_2a_9 + 5a_1a_{10} + 4a_{11}\right)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{11} = 2a_2a_3\left(3a_7a_{15} + 2a_{12}\right) &+ \\ + a_4a_7\left(5a_1a_{15} + 7a_2a_{14}\right) + 6a_2a_4a_{11} &+ \\ + 2a_5a_7\left(4a_2a_{13} + 2a_{15} + 3a_1a_{14}\right) &+ \\ + 2a_6\left(4a_2a_{10} + 2a_{12} + 3a_1a_{11}\right) + 4a_1a_4a_{12}&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = a_2a_4\left(3a_7a_{15} + 2a_{12}\right) &+ \\ + 2a_5a_7\left(a_1a_{15} + 2a_2a_{14}\right) &+ \\ + 2a_6\left(2a_2a_{11} + a_1a_{12}\right)&, \end{aligned}$$
$$b_{13} = -4k^2a_3a_7, \quad b_{14} = -2k^2a_4a_7,$$
$$b_{15} = 2a_3\left(10a_3a_{13} + 11a_7a_8\right),$$

$$\begin{aligned} b_{16} = 2a_3^2\left(9a_1a_{13} + 8a_{14}\right) + 36a_3a_4a_{13} &+ \\ + 2a_3a_7\left(10a_1a_8 + 9a_9\right) + 21a_4a_7a_8&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{17} = 2a_3\left(a_3\left(7a_1a_{14} + 8a_2a_{13} + 6a_{15}\right)\right. &+ \\ + 2a_4\left(8a_1a_{13} + 7a_{14}\right) + 8a_{13}\left(a_5 + a_6\right) &+ \\ \left. + a_7\left(8a_1a_9 + 9a_2a_8 + 7a_{10}\right)\right) + 16a_4^2a_{13} &+ \\ + a_4a_7\left(19a_1a_8 + 17a_9\right) + 20a_5a_7a_8&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{18} = 2a_3\left(a_3\left(5a_1a_{15} + 6a_2a_{14}\right)\right. &+ \\ + 2a_4\left(6a_1a_{14} + 7a_2a_{13} + 5a_{15}\right) &+ \\ + a_7\left(6a_1a_{10} + 7a_2a_9 + 5a_{11}\right) &+ \\ \left. + \left(a_5 + a_6\right)\left(7a_1a_{13} + 6a_{14}\right)\right) &+ \\ + 2a_4^2\left(7a_1a_{13} + 6a_{14}\right) + 14a_4a_{13}\left(a_5 + a_6\right) &+ \\ + a_4a_7\left(15a_1a_9 + 17a_2a_8 + 13a_{10}\right) &+ \\ + 2a_5a_7\left(9a_1a_8 + 8a_9\right)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{19} = 8a_2a_3^2a_{15} + 2a_3a_4\left(8a_1a_{15} + 10a_2a_{14}\right) &+ \\ + 2a_3a_7\left(4a_1a_{11} + 5a_2a_{10} + 3a_{12}\right) &+ \\ + 2a_3\left(a_5 + a_6\right)\left(6a_2a_{13} + 5a_1a_{14} + 4a_{15}\right) &+ \\ + 2a_4^2\left(5a_1a_{14} + 6a_2a_{13} + 4a_{15}\right) &+ \\ + a_4a_7\left(11a_1a_{10} + 13a_2a_9 + 9a_{11}\right) &+ \\ + 2a_4\left(a_5 + a_6\right)\left(6a_1a_{13} + 5a_{14}\right) &+ \\ + 2a_5\left(a_7\left(8a_2a_8 + 7a_1a_9 + 6a_{10}\right) + 6a_6a_{13}\right)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{20} = 12a_2a_3a_4a_{15} + 2a_3a_7\left(2a_1a_{12} + 3a_2a_{11}\right) &+ \\ + 2a_3\left(a_5 + a_6\right)\left(4a_2a_{14} + 3a_1a_{15}\right) &+ \\ + a_4a_7\left(7a_1a_{11} + 9a_2a_{10} + 5a_{12}\right) &+ \\ + 2a_4\left(a_5 + a_6\right)\left(5a_2a_{13} + 4a_1a_{14} + 3a_{15}\right) &+ \\ + 2a_4^2\left(3a_1a_{15} + 4a_2a_{14}\right) &+ \\ + 2a_5a_6\left(5a_1a_{13} + 4a_{14}\right) &+ \\ + 2a_5a_7\left(6a_2a_9 + 5a_1a_{10} + 4a_{11}\right)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{21} = 2a_2a_3\left(a_7a_{12} + 2a_{15}\left(a_5 + a_6\right)\right) &+ \\ + 4a_2a_4^2a_{15} + a_4a_7\left(3a_1a_{12} + 5a_2a_{11}\right) &+ \\ + a_4\left(a_5 + a_6\right)\left(4a_1a_{15} + 6a_2a_{14}\right) &+ \\ + 2a_5a_7\left(3a_1a_{11} + 4a_2a_{10} + 2a_{12}\right) &+ \\ + 2a_5a_6\left(3a_1a_{14} + 4a_2a_{13} + 2a_{15}\right)&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22} = 2a_2a_5\left(2\left(a_7a_{11} + a_6a_{14}\right) + a_4a_{15}\right) &+ \\ + a_2a_4\left(2a_6a_{15} + a_7a_{12}\right) &+ \\ + 2a_1a_5\left(a_6a_{15} + a_7a_{12}\right)&. \end{aligned}$$

Литература

1. *Taff L.G., Hall D.L.* The use of angles and angular rates. I — Initial orbit determination // Celest. Mech. 1977. Vol. 16. P. 481–488. DOI: 10.1007/BF01229289
2. *Gronchi G.F., Dimare L., Milani A.* Orbit determination with two-body integrals // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2010. Vol. 107. P. 299–318. DOI: 10.1007/s10569-010-9271-9
3. *Gronchi G.F., Farnocchia D., Dimare L.* Orbit determination with two-body integrals II // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2011. Vol. 110. P. 257–270. DOI: 10.1007/s10569-011-9357-z
4. *Gronchi G.F., Bau G., Maro S.* Orbit determination with two-body integrals III // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2015. Vol. 123. P. 105–122. DOI: 10.1007/s10569-015-9623-6
5. *Виноградова Т.А.* Вычисление эллиптической орбиты по двум наблюдениям, если определены скорости изменения сферических координат // Тез. докл. конф. «Астрометрия, геодинамика и небесная механика на пороге XXI века». Санкт-Петербург, 2000. С. 263.
6. *Виноградова Т.А.* Метод определения предварительной эллиптической орбиты по двум коротким сериям ПЗС–наблюдений // Тр. ИПА РАН. 2016. Вып. 39. С. 8–16.
7. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1953. Т. 88. №4. 601–602.
8. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). М.: Эдиториал, 1999. 224 с.
9. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
10. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
11. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
12. *Кузнецов В.Б.* Определение орбиты по двум векторам положения методом продолжения по параметру с наилучшей параметризацией // Изв. Главной астроном. обсерватории в Пулкове. № 223. Тр. астрометрической конф. «Пулково–2015». СПб, 2016. С. 207–212.

References

1. Taff L.G., Hall D.L. The use of angles and angular rates. I — Initial orbit determination. *Celest. Mech.*, 1977, vol. 16, pp. 481–488. DOI: 10.1007/BF01229289
2. Gronchi G.F., Dimare L., Milani A. Orbit determination with twobody integrals. *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 2010, vol. 107, pp. 299–318. DOI: 10.1007/s10569-010-9271-9
3. Gronchi G.F., Farnocchia D., Dimare L. Orbit determination with two-body integrals II. *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 2011, vol. 110, pp. 257–270. DOI: 10.1007/s10569-011-9357-z
4. Gronchi G.F., Bau G., Maro S. Orbit determination with two-body integrals III. *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 2015, vol. 123, pp. 105–122. DOI: 10.1007/s10569-015-9623-6
5. Vinogradova T.A. Vychislenie ellipticheskoy orbity po dvum nabludeniyam, esli opredeleny scorosti izmeneniya sphericheskih koordinat [The determination of elliptical orbit from two observations with velocities of spherical coordinates] In: *Tezisy dokladov konferencii "Astrometriya, geodinamika I nebesnaya mehanika na poroge XXI veka"* [Proc. of conf. "Astrometry, geodynamics and celestial mechanics at the beginning of XXI century"], St.-Petersburg, 2000, pp. 263. (In Russian)
6. Vinogradova T.A. The method of elliptic orbit determination from two short CCD series of observations. *Bull. of Institute of Applied Astronomy RAS,* 2016, vol. 39, pp. 8–16. (In Russian)
7. Davidenko D.F. On a new method of numerical solution of systems of nonlinear equations. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1953. vol. 88, no. 4, pp. 601–602.
8. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. *Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics.* Kluwer, 2003. 228 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2537-8
9. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems.* Springer-Verlag, 1993. 528 p. DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1
10. Subbotin M.F. *Vvedenie V Teoreticheskuyu Astronomiyu* [Introduction to Theoretical Astronomy]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 800 p.
11. Duboshin G.N. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike* [Ref. Guide to Celestial Mech. and Astrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 864 p.
12. Kuznetsov V.B. Determination of orbit from two position vectors by the continuation method with optimal optimization. *Izvestya glavnoy astronomicheskoy observatorii v Pulcove* [News of the Main Astronomical Observatory in Pulkovo], 2016, no. 223, pp. 207–212.

Статья поступила 27 октября 2017 г.