УДК 539.375:534.1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО СИСТЕМУ ТРЕЩИН[1]

О. Д. Пряхина[2], ***А. В. Смирнова***[3]

INTEGRAL EQUATIONS OF DYNAMIC PROBLEMS FOR LAYERED HALF-SPACE CONTAINING A SYSTEM OF CRACKS

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The new method of determining dynamic characteristics of multi-layered half-limited media with inclusion- or crack-type defects on boundary layers is used to solve antiplane problems for a layered half-plane. Sets of integral equations of the relating boundary-value problems have been developed, and their kernels properties have been investigated. Dispersion curves of matrices determinants and elements of the given sets have been analyzed depending on the number of layers, their elastic and geometric properties.

Новый метод определения динамических характеристик многослойных полуограниченных сред с дефектами типа включений или трещин на линиях раздела слоев [1] применяется при решении антиплоских задач для слоистого полупространства. Построены системы интегральных уравнений соответствующих краевых задач, исследованы свойства их ядер. Проведен анализ дисперсионных кривых определителей и элементов матриц указанных систем в зависимости от количества слоев, их упругих и геометрических характеристик.

1. Общие функционально-матричные соотношения

Для задачи о гармонических колебаниях пакета из N плоскопараллельных слоев, имеющего на границах раздела физико-механических свойств дефекты типа трещин-полостей, получены соотношения, связывающие в преобразованиях Фурье векторы перемещений точек среды $\mathbf{W}_k$ и напряжений на границах раздела слоев $\mathbf{T}_k$ с векторами поверхностной нагрузки $\mathbf{T}_0$ и скачков перемещений $\mathbf{f}_m\,(\alpha,\beta)$ на берегах трещин [1, 2]

$$\mathbf{W}_k(\alpha,\beta,z_k) = \mathbf{K}_{N-k+1}(\alpha,\beta,z_k)\mathbf{T}_0(\alpha,\beta) + \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{R}_{km}(\alpha,\beta)\mathbf{f}_m(\alpha,\beta), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{T}_k\,(\alpha,\beta) = \mathbf{L}_k\,(\alpha,\beta)\,\mathbf{T}_0\,(\alpha,\beta) + \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{L}_{km}\,(\alpha,\beta)\,\mathbf{f}_m\,(\alpha,\beta), \quad (1.2)$$

$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

Индекс k соответствует линии раздела k-го и $(k+1)$-го слоев, а индекс m отвечает дефектам, расположенным на границе m-го и $(m+1)$-го слоев; z_k — локальная координата, изменяющаяся в пределах толщины k-го слоя ($|z_k| \leqslant h_k$); $\mathbf{T}_0 = F\mathbf{t}_0$, $\mathbf{T}_k = F\mathbf{t}_k$,

[1]Работа выполнена при поддержке администрации Краснодарского края и РФФИ (03-01-00662, 03-01-96658, 03-01-96645, 05-01-00811), гранта Президента РФ (НШ-2107-2003.1).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, заведующая кафедрой высоких технологий, прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

[3]Смирнова Алла Васильевна, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета, доцент.

$\mathbf{W}_k = F\mathbf{w}_k$, F — оператор двумерного преобразования Фурье по переменным x, y с параметрами α, β; $\mathbf{t}_k = \{t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}\}$ — векторы напряжений, характеризующие взаимодействие между слоями, $\mathbf{w}_k = \{w_{1k}, w_{2k}, w_{3k}\}$ — векторы перемещений точек k-го слоя.

Матрицы $\mathbf{K}_n$, $\mathbf{L}_n$, $\mathbf{R}_{km}$, $\mathbf{L}_{km}$ имеют единую структуру, характерную для матриц-символов Грина соответствующих краевых задач для сред без дефектов [3]. Их элементы зависят от частоты колебаний ω, а также от геометрических и механических параметров слоев: толщины $2h_k$, плотности ρ_k, модуля сдвига μ_k и коэффициента Пуассона ν_k.

Если на поверхности среды и на границах раздела слоев заданы смешанные условия

$$z = 0: \quad \begin{array}{ll} \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0(x,y), & (x,y) \in \Omega_0; \\ \mathbf{t}_0 = 0, & (x,y) \notin \Omega_0, \end{array}$$

$$z_k = -h_k: \quad \begin{array}{ll} \mathbf{t}_k = \mathbf{t}_k(x,y), & (x,y) \in \Omega_k; \\ \Delta\mathbf{w}_k = 0, & (x,y) \notin \Omega_k, \end{array}$$

то функционально-матричные соотношения (1.1) при $k = 1$ и $z_1 = h_1$ совместно с соотношениями (1.2) для $k = 1, 2, \ldots, N-1$ приводят к системам интегральных уравнений относительно контактных напряжений $\mathbf{t}_0(x,y)$ и скачков векторов перемещений $\Delta\mathbf{w}_k(x,y)$ на берегах трещин. Здесь Ω_0 — область контакта штампа с поверхностью среды $z = 0$, $\mathbf{w}_0$ — перемещения, заданные в области Ω_0, Ω_k — области, занимаемые трещинами в плоскостях $z_k = -h_k$, $\mathbf{t}_k$ — заданные напряжения на берегах трещин.

Получим указанные системы для случая антиплоских колебаний слоистого полупространства.

2. Функциональные соотношения, описывающие антиплоские колебания слоистого полупространства

Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях пакета из $(N-1)$ плоскопараллельных упругих слоев толщины $H = 2(h_1 + h_2 + \ldots + h_{N-1})$, занимающего объем $-H \leqslant z \leqslant 0$, $-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty$ (h_k — полутолщина k-го слоя) и жестко сцепленного с упругим однородным полупространством $-\infty < z \leqslant -H$, $-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty$. На границах раздела физико-механических параметров имеются дефекты типа трещин, расположенные в областях

$$\Omega_k: \{z_k = -h_k,\ a_k \leqslant x \leqslant b_k,\ -\infty < y < +\infty\}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Поверхность среды подвергается некоторому динамическому воздействию, характеризуемому вектором распределенных усилий $\mathbf{t}_0(x,y)\, e^{-i\omega t}$, которое может либо быть заданным, либо определяться из решения контактной задачи.

Будем полагать, что заданные и искомые векторные величины имеют отличной от нуля только одну составляющую, не зависящую от координаты y, а в преобразованиях Фурье — от параметра β:

$$\mathbf{T}_0 = \{0, T_0(\alpha), 0\}, \quad \mathbf{W}_k = \{0, W_k(\alpha, z_k), 0\},$$
$$\mathbf{T}_k = \{0, T_k(\alpha), 0\}, \quad \mathbf{f}_k = \{0, f_k(\alpha), 0\}.$$

В этом случае матричные соотношения (1.1), (1.2) становятся функциональными, и построение решения существенно упрощается.

Представим (в преобразованиях Фурье) функции Грина m-слойного полупространства ($m = 1, 2, \ldots, N$) в виде отношения целых функций

$$G_m(z) = \frac{k_m(z)}{\Delta_m}, \quad -\infty < z \leqslant 0.$$

Заметим, что $k_m(z)$ и Δ_m зависят от параметра преобразования Фурье α, частоты гармонических колебаний ω, геометрических и механических параметров полупространства и слоев с номерами $N-1$, $N-2$ и т.д. до $N-m+1$ включительно.

В случае антиплоских колебаний матрицы, входящие в соотношения (1.1), (1.2), заменяются на соответствующие функции

$$K_{N-k+1}(h_k) = (-1)^{k+1}\frac{k_{N-k+1}(h_k)}{\mu_k\Delta_N},$$

$$L_k = (-1)^{k+1}\frac{\Delta_{N-k}}{\Delta_N}; \quad \Delta_0 \equiv 1, \tag{2.1}$$

$$L_{km} = (-1)^{k+m-1}\frac{1}{\Delta_N}\begin{cases} \mu_m\Delta_{N-k}R_m(h_m), \\ \quad k > m, \\ \mu_k\Delta_{N-m}R_k(h_k), \\ \quad dk \leqslant m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$R_{km} = \begin{cases} L_m, \quad k = 1, \\ (-1)^{k+m}(\mu_m/\mu_k)R_m(h_m)\times \\ \times k_{N-k+1}(h_k)/\Delta_N, \quad k \neq 1, \quad k > m, \\ (-1)^{k+m-1}D_{k-1}(h_{k-1})\times \\ \times \Delta_{N-m}/\Delta_N, \quad k \neq 1, \quad k \leqslant m. \end{cases}$$

$R_k(h_k)$ и $D_k(h_k)$ определяются рекуррентными формулами

$$R_1(h_k) = \sigma_{2k}\,\mathrm{sh}\,(2\sigma_{2k}h_k),$$

$$D_1(h_k) = \mathrm{ch}\,(2\sigma_{2k}h_k), \quad \sigma_{2k} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho_k}{\mu_k}\omega^2},$$

$$R_k(h_k) = R_1(h_k)\,D_{k-1}(h_{k-1}) + g_{k-1}D_1(h_k)\,R_{k-1}(h_{k-1}),$$

$$g_{k-1} = \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k},$$

$$D_k(h_k) = D_1(h_k)\,D_{k-1}(h_{k-1}) + g_{k-1}\sigma_{2k}^{-2}R_1(h_k)\,R_{k-1}(h_{k-1}),$$
$$k = 2,3,\ldots,N-1.$$

Если на поверхности среды и на каждой границе раздела слоев заданы смешанные условия, то искомая система интегральных уравнений (ИУ) формируется из соотношений

$$W_1(h_1) = K_N(h_1)\,T_0 + \sum_{m=1}^{N-1} L_m f_m,$$

$$f_m(\alpha) = \sum_{p=1}^{M_m} F(\Delta w_{mp}),$$

$$T_k = L_k T_0 + \sum_{m=1}^{N-1} L_{km} f_m, \quad k = 1,2,\ldots,N-1.$$

Введем матрицу $\mathbf{K}^\infty(\alpha) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^N$ с элементами

$$K_{11} = K_N(h_1), \quad K_{1j} = K_{j1} = L_{j-1},$$
$$K_{ij} = L_{(i-1)(j-1)}, \quad i,j = 2,3,\ldots,N$$

и интегральные операторы

$$\mathcal{K}(\Omega)\,q = \int_\Omega k(x-\xi)\,q(\xi)\,d\xi,$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\delta K(\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

$$\mathcal{L}_q(t_0,\Delta w_k) = \mathcal{K}_{q1}(\Omega_0)t_0 + \sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{K}_{q(k+1)}(\Omega_k)\Delta w_k,$$
$$q = 1,2,\ldots,N.$$

Выбор контура δ диктуется принципом излучения [4].

В принятых обозначениях система ИУ, имеющая размерность $M+1$ (M — общее количество трещин в среде), запишется в виде

$$\mathcal{L}_1(t_0,\Delta w_k) = w_0(x)\ , \quad x \in \Omega_0\ ;$$

$$\mathcal{L}_{p+1}(t_0,\Delta w_k) = t_p(x)\ , \quad x \in \Omega_p,$$
$$p = 1,2,\ldots,N-1.$$

Матрицу $\mathbf{K}^\infty(\alpha)$ будем называть матрицей-символом построенной системы ИУ.

Полученные уравнения позволяют исследовать разные аспекты динамики слоистого полупространства.

Полагая $f_m(\alpha) = 0$ для всех $m = 1,2,\ldots,N-1$, приходим к контактной задаче для многослойного полупространства без дефектов и известному одномерному ИУ

$$\mathcal{K}_{11}(\Omega_0)\,t_0 = w_0(x), \quad x \in \Omega_0.$$

Если принять $T_0(\alpha) = 0$, то получим динамическую задачу о колебаниях многослойного полупространства, вызванных вибрацией только берегов трещин и соответствующую ей систему ИУ свертки

$$\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{K}_{(p+1)(k+1)}(\Omega_k)\,\Delta w_k = t_p(x), \qquad (2.3)$$

$$x \in \Omega_p, \quad p = 1,2,\ldots,N-1.$$

Поскольку эта задача представляет самостоятельный интерес, переобозначим матрицу-символ последней системы через $\mathbf{L}^\infty(\alpha) = \|L_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$. Очевидно, что $\mathbf{L}^\infty(\alpha)$ получается из $\mathbf{K}^\infty(\alpha)$ путем исключения первой строки и первого столбца.

Заметим, что ИУ (2.3) при равных механических параметрах слоев и полупространства дают решение динамической задачи для однородного полупространства с трещинами, расположенными в плоскостях $z_p = -h_p$.

Если в каких либо плоскостях изменения механических параметров трещины отсутствуют, то из области изменения параметра p системы (2.3) исключаются значения, равные порядковым номерам этих плоскостей.

Имея функциональные соотношения и интегральные уравнения рассматриваемых задач для слоистого полупространства, легко перейти к слоистому пространству. При

этом общий вид их записи сохраняется, но при определении элементов матриц-символов $\mathbf{K}_\infty^\infty(\alpha)$ и $\mathbf{L}_\infty^\infty(\alpha)$ в формулах (2.1), (2.2) следует полагать $D_1(h_1)=1$, $R_1(h_1)=\sigma_{21}$.

3. Свойства матриц-символов систем ИУ

При определении классов корректной разрешимости и построении решения систем ИУ необходимо изучение свойств элементов их матриц-символов. Наиболее важны описание асимптотического поведения указанных элементов при $|\alpha|\to\infty$ и исследование поведения вещественных нулей и полюсов (дисперсионных кривых) элементов и определителей этих матриц в плоскости $(\operatorname{Re}\alpha,\omega)$.

Установлено, что матрицы $\mathbf{K}^\infty(\alpha)$, $\mathbf{L}^\infty(\alpha)$ симметричны и представимы в виде

$$\mathbf{K}^\infty(\alpha)=\frac{1}{\Delta_N}\left\|k_{ij}(\alpha)\right\|_{i,j=1}^{N},$$

$$\mathbf{L}^\infty(\alpha)=\frac{1}{\Delta_N}\left\|l_{ij}(\alpha)\right\|_{i,j=1}^{N-1}.$$

Элементы $k_{ij}(\alpha)$, $l_{ij}(\alpha)$ — целые, четные по параметру α функции; Δ_N — знаменатель функции Грина G_N в случае многослойного полупространства без дефектов.

Для элементов матрицы $\mathbf{K}^\infty(\alpha)$ на контуре δ при $|\alpha|\to\infty$ имеют место асимптотические оценки

$$K_{11}(\alpha)=\frac{|\alpha|^{-1}}{\mu_1}\left[1+O\left(|\alpha|^{-2}\right)\right],$$

$$K_{ii}(\alpha)=-\frac{\mu_{i-1}}{1+g_{i-1}}|\alpha|\left[1+O\left(|\alpha|^{-2}\right)\right],\quad i=2,3,\ldots,N,$$

$$K_{1j}(\alpha)=(-1)^{j+1}P_{1j}(\alpha)\left[1+O\left(|\alpha|^{-2}\right)\right],\quad j=2,3,\ldots,N,$$

$$K_{ij}(\alpha)=\frac{(-1)^{i+j+1}\mu_i}{(1+g_{i-1})}P_{ij}(\alpha)|\alpha|\times\left[1+O\left(|\alpha|^{-2}\right)\right],\quad i\neq j\neq 1,$$

где

$$P_{ij}(\alpha)=\frac{2^{j-i}}{\prod\limits_{k=i}^{j-1}(1+g_k)}\exp\left(-|\alpha|\sum_{k=i}^{j-1}2h_k\right).$$

Асимптотическое поведение элемента K_{11} для многослойной среды совпадает с асимптотическим поведением $G_1(\alpha,\mu_1)$, а асимптотика остальных диагональных элементов K_{ii} определяется асимптотикой функции $-G_1^{-1}(\alpha,\mu_{i-1}\mu_i/(\mu_{i-1}+\mu_i))$.

Используемый метод позволяет получить соотношения, удобные для проведения численного анализа не только элементов, но и определителей матриц при произвольном количестве N разномодульных материалов и дефектов M:

$$\det\mathbf{K}^\infty(\alpha)=(-1)^M S_{n1}(h_{n1})\times\times\varphi(h_{n2},h_{n3},\ldots,h_{nM}),\quad(3.1)$$

$$\det\mathbf{L}^\infty(\alpha)=(-1)^M\mu_{n1}R_{n1}(h_{n1})\times\times\varphi(h_{n2},h_{n3},\ldots,h_{nM}),\quad(3.2)$$

$$\varphi(h_{n2},h_{n3},\ldots,h_{nM})=\frac{\Delta_{N-nM}}{\Delta_N}\times\times\prod_{k=2}^{M}\mu_{nk}R_{nk-n(k-1)}(h_{nk}).$$

Здесь $n1$, $n2,\ldots,nM$ номера границ раздела слоев (в порядке возрастания), содержащих дефекты, следовательно $\mathbf{f}_{ni}\neq 0$, $i=1,2,\ldots,M$. Функции $S_k(h_1,h_2,\ldots,h_k)$ — числители, а $R_k(h_1,h_2,\ldots,h_k)$ — знаменатели функций Грина пакета k слоев со свободной нижней гранью.

Между функциями $S_k(h_1,h_2,\ldots,h_k)$ и $\tilde\Delta_k(h_1,h_2,\ldots,h_k)$, являющимися знаменателями функций Грина пакета слоев с жестко защемленной нижней гранью, выявлена простая взаимосвязь:

$$S_k(h_1,h_2,\ldots,h_k)=\frac{\mu_1}{\mu_k}\tilde\Delta_k(h_k,h_{k-1},\ldots,h_1).$$

Если трещины расположены в однородном полупространстве, то

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=\ldots=\sigma_{2N}=\sigma_2,$$

$$\Delta_{N-nM}=\sigma_2\exp(-2\sigma_2\sum_{m=1}^{M}h_{nm}),$$

$$S_{n1}(h_{n1})=\tilde\Delta_1=\operatorname{ch}(2\sigma_2h_{n1}),$$

$$R_{n1}(h_{n1})=\sigma_2\operatorname{sh}(2\sigma_2h_{n1}).$$

Выражения (3.1), (3.2) примут вид

$$\det \mathbf{K}^{\infty}(\alpha) = (-1)^M \operatorname{ch}(2\sigma_2 h_{n1}) \times \times \varphi(h_{n2}, h_{n3}, \ldots, h_{nM}), \quad (3.3)$$

$$\det \mathbf{L}^{\infty}(\alpha) = (-1)^M \mu\sigma_2 \operatorname{sh}(2\sigma_2 h_{n1}) \times \times \varphi(h_{n2}, h_{n3}, \ldots, h_{nM}),$$

$$\varphi(h_{n2}, h_{n3}, \ldots, h_{nM}) = \exp(-2\sigma_2 \sum_{m=1}^{M} h_{nm}) \times \times \prod_{k=2}^{M} \mu R_{nk-n(k-1)}(h_{nk}).$$

Таким образом, определители матриц-символов $\mathbf{K}^{\infty}(\alpha)$, $\mathbf{L}^{\infty}(\alpha)$ систем ИУ, соответствующих динамическим задачам ($\mathbf{T}_0 \neq 0$, $\mathbf{T}_0 = 0$) для трещин, этажно расположенных в однородном полупространстве, являются целыми функциями.

4. Примеры

Приведем примеры записи полученных соотношений для пятислойного полупространства ($N = 5$).

4.1. Сформируем систему функциональных уравнений, если трещины имеются на каждой границе раздела слоев. В этом случае $M = 4$, $n1 = 1$, $n2 = 2$, $n3 = 3$, $n4 = 4$.

Перемещения точек поверхности среды

$$W_1(h_1) = \Big[k_5(h_1) T_0/\mu_1 + + \sum_{m=1}^{4} (-1)^m \Delta_{5-m} f_m \Big] / \Delta_5, \quad (4.1)$$

напряжения на границах раздела слоев

$$T_k = \Big[(-1)^k \Delta_{N-k} T_0 - - \Delta_{N-k} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^{k+m} \mu_m R_m(h_m) f_m - - \Delta_{N-k} \mu_k R_k(h_k) f_k - - \mu_k R_k(h_k) \sum_{m=k+1}^{4} (-1)^{k+m} \Delta_{N-m} f_m \Big] / \Delta_5, \quad (4.2)$$

$$k = 1, 2, 3, 4.$$

Для построения системы ИУ перепишем соотношения (4.1), (4.2) в виде

$$\mathbf{W}(\alpha) = \mathbf{K}^{\infty}(\alpha)\, \mathbf{Q}(\alpha), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{Q} = \{T_0, f_1, f_2, f_3, f_4\},$$
$$\mathbf{W} = \{W_1(h_1), T_1, T_2, T_3, T_4\},$$
$$\mathbf{K}^{\infty}(\alpha) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^{5}.$$

При этом

$$\det \mathbf{K}^{\infty} = \operatorname{ch}(2\sigma_{21} h_1)\, \varphi(h_2, h_3, h_4), \quad (4.4)$$

$$\det \mathbf{L}^{\infty} = \mu_1 \sigma_{21} \operatorname{sh}(2\sigma_{21} h_1)\, \varphi(h_2, h_3, h_4), \quad (4.5)$$

$$\varphi(h_2, h_3, h_4) = \frac{\sigma_{25}}{\Delta_5} \prod_{k=2}^{4} \mu_k \sigma_{2k} \operatorname{sh}(2\sigma_{2k} h_k).$$

В частности, если рассматривается задача о колебаниях однородного полупространства с четырьмя трещинами, то

$$\det \mathbf{K}^{\infty} = \operatorname{ch}(2\sigma_2 h_1)\, \varphi(h_2, h_3, h_4), \quad (4.6)$$

$$\det \mathbf{L}^{\infty} = \mu\sigma_2 \operatorname{sh}(2\sigma_2 h_1)\, \varphi(h_2, h_3, h_4), \quad (4.7)$$

$$\varphi(h_2, h_3, h_4) = (\mu)^3 e^{-\sigma_2 H} \prod_{k=2}^{4} \sigma_2 \operatorname{sh}(2\sigma_2 h_k).$$

Здесь $2h_1$ — расстояние от поверхности полупространства до плоскости дислокации первой трещины, $2h_2, 2h_3, 2h_4$ — расстояния (по вертикали) между плоскостями расположения первой и второй, второй и третьей, третьей и четвертой трещин соответственно, $H = 2\sum_{i=1}^{4} h_i$.

4.2. Для трех трещин, расположенных так, что $n1 = 1$, $n2 = 3$, $n3 = 4$, функциональное соотношение (4.2) при $k = 2$ в формировании системы ИУ не участвует. В этом случае $\mathbf{Q} = \{T_0, f_1, f_3, f_4\}$, $\mathbf{W} = \{W_1(h_1), T_1, T_3, T_4\}$ и при вычислении определителей матриц $\mathbf{K}^{\infty}(\alpha)$, $\mathbf{L}^{\infty}(\alpha)$ в (4.4), (4.5) следует положить

$$\varphi(h_2, h_3, h_4) = -\frac{\sigma_{25}}{\Delta_5} \mu_3 R_2(h_2, h_3) \mu_4 R_1(h_4).$$

4.3. Если в среде имеются две трещины между первым и вторым слоем и между четвертым слоем и полупространством, то $M = 2$, $n1 = 1$, $n2 = 4$. Тогда из (4.2) исключаются второе и третье соотношения, для которых $k \neq n1$, $k \neq n2$, а в (4.3) $\mathbf{Q} = \{T_0, f_1, f_4\}$,

$\mathbf{W} = \{W_1(h_1), T_1, T_4\}$. Матрицы-символы $\mathbf{K}^\infty(\alpha)$, $\mathbf{L}^\infty(\alpha)$ размерности 3×3 будут иметь определители вида (4.4), (4.5) с функцией $\varphi(h_2,h_3,h_4) = \dfrac{\sigma_{25}}{\Delta_5}\mu_4 R_3(h_2,h_3,h_4)$.

Если трещины расположены в плоскостях между первым и вторым, между третьим и четвертым слоями, то $n1 = 1$, $n2 = 3$ и

$$\det\mathbf{K}^\infty = \operatorname{ch}(2\sigma_{21}h_1)\,\varphi(h_2,h_3),$$

$$\varphi(h_2,h_3) = \frac{\Delta_2}{\Delta_5}\mu_3 R_2(h_2,h_3),$$

$$\det\mathbf{L}^\infty = \mu_1\sigma_{21}\operatorname{sh}(2\sigma_{21}h_1)\,\varphi(h_2,h_3).$$

При $n1 = 2$, $n2 = 4$

$$\det\mathbf{K}^\infty = \tilde\Delta_2(h_2,h_1)\varphi(h_3,h_4),$$

$$\varphi(h_3,h_4) = \frac{\sigma_{25}}{\Delta_5}\mu_4 R_2(h_3,h_4),$$

$$\det\mathbf{L}^\infty = \mu_2 R_2(h_1,h_2)\varphi(h_3,h_4).$$

4.4. Если в пятислойном полупространстве имеется одна трещина, например, на стыке третьего и четвертого слоев, то $M = 1$, $n1 = 3$, $\mathbf{Q} = \{T_0, f_3\}$, $\mathbf{W} = \{W_1(h_1), T_3\}$.

$$\det\mathbf{K}^\infty(\alpha) = -\frac{S_3(h_1,h_2,h_3)\,\Delta_2}{\Delta_5} = -\frac{\mu_1}{\mu_3}\frac{\tilde\Delta_3(h_3,h_2,h_1)\Delta_2}{\Delta_5},$$

$$\det\mathbf{L}^\infty(\alpha) = -\frac{\mu_3 R_3(h_1,h_2,h_3)\,\Delta_2}{\Delta_5}.$$

Здесь $\tilde\Delta_3(h_3,h_2,h_1)$ — знаменатель функции Грина трехслойного пакета без дефектов, жестко сцепленного с недеформируемым основанием (слой толщины $2h_1$ — нижний), Δ_2 — знаменатель функции Грина двухслойного полупространства, зависящий от параметров четвертого слоя и однородного полупространства.

Для одной трещины, расположенной на глубине H в однородном полупространстве, имеем

$$\det\mathbf{K}^\infty = -\operatorname{ch}(\sigma_2 H)\exp(-\sigma_2 H),$$

$$\det\mathbf{L}^\infty = -\mu\sigma_2\operatorname{sh}(\sigma_2 H)\exp(-\sigma_2 H).$$

Из полученных соотношений можно сделать ряд важных заключений, даже не прибегая к численному анализу, что также является их достоинством. Например, в [3] изучены условия существования изолированных резонансов системы «массивный штамп – пакет слоев, жестко сцепленный с недеформируемым основанием». Показано, что точек дискретного спектра всегда конечное число, и они лежат в диапазоне частот $0 < \omega < \omega_{\text{кр}} \neq 0$. Если $\omega_{\text{кр}} = 0$, то рассматриваемая система не имеет низкочастотных резонансов. Из (3.3) следует, что при $\mathbf{T}_0 \neq 0$ и наличии только одной трещины в однородном полупространстве определитель матрицы $\mathbf{K}^\infty(\alpha)$ имеет вещественные нули, начиная с некоторого значения $\omega = \omega^* > 0$. Если трещин две и более, то появляются кривые нулей, выходящие из начала координат, что соответствует $\omega_{\text{кр}} = 0$. В случае $\mathbf{T}_0 = 0$ при любом количестве трещин $\omega_{\text{кр}} = 0$. Эти свойства определителей матриц-символов сохраняются и в случае пространственной постановки задачи.

Авторы благодарят В. А. Бабешко, инициировавшего выполнение данной работы, за советы и обсуждение результатов.

Литература

1. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
2. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Решение динамических задач для многослойных сред с разрывными граничными условиями // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Юбилейный выпуск. 2002. С. 80–82.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
4. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.

Статья поступила 18 февраля 2005 г.
Кубанский государственный университет
© Пряхина О. Д., Смирнова А. В., 2005