УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ «ВИРУСОВ» ВИБРОПРОЧНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР[1]

***Р. Вильямс*[2], *А. В. Павлова*[3], *С. В. Ратнер*[4]**

RESEARCH OF VIBRATION-STRENGTH "VIRUSES"
DURING MODELING OF GEOLOGICAL STRUCTURES

Williams R., Pavlova A.V., Ratner S.V.

Multiple breaks of lithospheric plates are simulated by extended cavities-cracks in isotropic unlimited or semi-limited medium. To study these objects, named vibration-strength "viruses a mathematical method has been developed, which makes it possible to reduce boundary-value problems for media with flat-parallel cracks to systems of integral equations. The increase of the number of cracks does not cause significant difficulties. The offered approach can be applied to the similar problems for elastic media with inclusions and inhomogeneities of both types.

Новейшие экспериментальные данные, полученные при изучении структуры литосферных плит по всей толщине вплоть до границы Мохоровичича, свидетельствуют о наличии внутри коры протяженных плоско-параллельных множественных разломов. Их края могут быть либо свободными, либо обрамленными огибающим разломом. Масштабность выявленных механических объектов позволяет моделировать их протяженными полостями-трещинами в изотропной плите больших размеров или неограниченной. Последние условия определяют возможность моделирования системы разломов двумя типами объектов, расположенных этажно:

– все области, занятые полостями-трещинами, являются неограниченными плоскостями;
– все области, занятые трещинами, представляют собой полуплоскости.

Первая модель отвечает случаю системы разломов в зоне, удаленной от краев, вторая — вблизи края разлома. Для описания таких объектов, названных «вирусами» вибропрочности [1, 2], и построения определяющих уравнений с целью их дальнейшего исследования был развит математический аппарат быстрого сведения краевых задач к системам интегральных уравнений [5, 6]. Разработанная схема решения краевых задач динамической теории упругости для сред с неоднородностями позволяет рассматривать случаи плоско-параллельных трещин с любым их количеством, как по этажности плоскостей их расположения, так и по количеству в каждой плоскости. При этом наращивание числа полостей-трещин при необходимости исследования их в условиях возникновения новых разломов не вызывает значительных затруднений.

Изучается задача об установившихся с частотой ω колебаниях упругой среды, содержащей систему внутренних плоских, параллельно-ориентированных неоднородностей. В качестве неоднородностей рассматриваются трещины, берега которых нагружены трехкомпонентными напряжениями. В этом случае, отделяя временной множитель $e^{-i\omega t}$, для амплитуды смещений имеем следующее уравнение Ламе:

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0, \qquad (1)$$

где λ, μ — константы Ламе; ρ — плотность среды.

1. Рассматривается упругое пространство, содержащее L плоских горизонтальных неоднородностей в прямоугольной декартовой системе координат (x,y,z), расположенных на высоте $h_1,\dots,h_L$ соответственно и ориентированных параллельно между собой. При этом l-я трещина занимает область Ω_l с границами S_l, $l=\overline{1,L}$. Для простоты полагаем, что все h_l различны. Таким образом, рассматривается L-уровневый «вирус» вибропрочности класса 2, вида S, обозначаемый $V\,(2/h_1;S_1/\dots/h_L;S_L)$.

2. Полагаем, что в прямоугольной декартовой системе координат (x,y,z), где

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ Р2003ЮГ (03-01-00694; 03-01-96537, 03-01-96551).

[2]Вильямс Ричард (Williams Richard), профессор университета Теннесси, США.

[3]Павлова Алла Владимировна, канд. физ-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования КубГУ.

[4]Ратнер Светлана Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник НИИ проблем механики и геоэкологии КубГУ.

плоскость $x\,o\,y$ параллельна поверхности полупространства, а ось $o\,z$ направлена вверх, трещины расположены в плоскостях, параллельных $x\,o\,y$ на высотах $h_1, \ldots, h_L$ $(h_1 < h_2 < \ldots < h_L)$ соответственно и занимают односвязные области Ω_l с границами S_l, $l = \overline{1, L}$. Эта система неоднородностей представляет собой $L+1$-уровневый «вирус» вибропрочности класса 2, вида S, обозначаемый $V\,(2/h_1; S_1/\ldots/h_L; S_L/h_{L+1}; \infty/)$.

3. Декартова система координат введена таким образом, что плоскость $x\,o\,y$ параллельна недеформированным границам упругого слоя, ось $o\,z$ направлена вверх. Сечения, в которых располагаются трещины, лежат в параллельных плоскостях, перпендикулярных оси $o\,z$. Трещины расположены на высотах $h_1, \ldots, h_L$ $(h_1 < h_2 < \ldots < h_L)$ соответственно и занимают односвязные области Ω_l с границами S_l, $l = \overline{1, L}$. При этом плоскость $z = h_0$ является нижней граничной плоскостью рассматриваемого упругого слоя, $z = h_L + 1$ — верхней. Эти неоднородности представляют собой $L+2$-уровневый «вирус» вибропрочности класса 2, вида S, обозначаемый $V\,(2/h_0; \infty/h_1; S_1/\ldots/h_L; S_L/h_{L+1}; \infty/)$.

В условиях установившегося процесса на границы $x_3 = h_l$ полостей действуют напряжения с амплитудами $\tau_l = (\tau_{l1}, \tau_{l2}, \tau_{l3})$. При этом через $\mathbf{u}_l^{\pm} = \left(u_{l1}^{\pm}, u_{l2}^{\pm}, u_{l3}^{\pm}\right)$ обозначим перемещения в сечениях $z \to \pm h_l$. Метод сведения краевых задач динамической теории упругости для неограниченных областей, основанный на факторизации [3], приводит к системе интегральных уравнений (СИУ) в матричной форме следующего вида [1]:

$$\mathbf{L}_l^{\pm}\mathbf{U}_l^{\pm} - \mathbf{L}_{l+1}^{\pm}\mathbf{U}_{l+1}^{\pm} = \mathbf{D}_l^{\pm}\mathbf{T}_l - \mathbf{D}_{l+1}^{\pm}\mathbf{T}_{l+1}. \quad (2)$$

Здесь введены обозначения: $\mathbf{U}_l^{\pm} = \left\{U_{lm}^{\pm}\right\}$, $\mathbf{T}_l = \{T_{lm}\}$, $m = \overline{1, 3}$. Учитывая, что $\mathbf{T}_l = \mathbf{T}_l^{+} = \mathbf{T}_l^{-}$, получаем

$$U_{l,m}^{\pm}\,(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}u_m^{\pm}\,(x, y, h_l)\,,$$

$$T_{l,m}\,(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}\tau_m\,(x, y, h_l)\,,$$

где $\mathbf{V}$ — оператор двумерного преобразования Фурье.

В случае учета внешних воздействий система (2) может быть представлена в виде

$$\mathbf{L}_l^{\pm}\mathbf{U}_l^{\pm} - \mathbf{L}_{l+1}^{\pm}\mathbf{U}_{l+1}^{\pm} = \mathbf{D}_l^{\pm}\mathbf{T}_l - \mathbf{D}_{l+1}^{\pm}\mathbf{T}_{l+1} + \mathbf{G}_l^{\pm} - \mathbf{G}_{l+1}^{\pm}.$$

Здесь векторы $\mathbf{G}_l^{\pm}$ описывают причины, которые вызывают деформацию среды.

В блочно-матричном виде система относительно неизвестных скачков перемещений на берегах трещин $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$, $\mathbf{U}_m = \{U_{lm}\}$, $U_{lm} = U_{lm}^{+} - U_{lm}^{-}$ для пространства принимает вид

$$\mathbf{A}_L\mathbf{U} = \mathbf{M}_L\mathbf{T} + \mathbf{C}_L, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\}\,, \quad \mathbf{T}_m = \{T_{lm}\}\,,$$

$$\mathbf{C}_L = \left[(\mathbf{L}_L^{+})^{-1}\mathbf{G}_L^{+} - (\mathbf{L}_L^{-})^{-1}\mathbf{G}_L^{-}\right].$$

Для случая полупространства (3) можно записать

$$\mathbf{A}_{L+1}\mathbf{U} = \mathbf{G}_{L+1}\mathbf{T} + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{L+1}\}\,,$$

$$\mathbf{B}_k = \left[\mathbf{C}_k - (\mathbf{L}_k^{+})^{-1}\mathbf{G}_{L+1}^{+}\right],$$

$$\mathbf{B}_{L+1} = -(\mathbf{L}_{L+1}^{-})^{-1}\mathbf{G}_{L+1}^{-}.$$

Для слоя (3) будет иметь вид

$$\mathbf{A}_{L+2}\mathbf{U} = \mathbf{G}_{L+2}\mathbf{T} + \mathbf{S},$$

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_{L+1}\}\,,$$

$$\mathbf{S}_k = \left[(\mathbf{L}_k^{-})^{-1}\mathbf{G}_0^{-} + \mathbf{C}_k - (\mathbf{L}_1^{+})^{-1}\mathbf{G}_{L+1}^{+}\right],$$

$$\mathbf{S}_0 = (\mathbf{L}_0^{+})^{-1}\mathbf{G}_0^{+} - (\mathbf{L}_0^{+})^{-1}\mathbf{G}_{L+1}^{+},$$

$$\mathbf{S}_{L+1} = (\mathbf{L}_{L+1}^{-})^{-1}\mathbf{G}_0^{-} - (\mathbf{L}_{L+1}^{-})^{-1}\mathbf{G}_{L+1}^{-}.$$

Вид матриц $\mathbf{A}_L, \mathbf{M}_L, \mathbf{G}_L$ приведен в [5].

Решение полученных СИУ — чрезвычайно сложная задача даже для простейших «вирусов» вибропрочности, так как она связана с проблемой обращения матричных операторов высокого порядка, имеющих ядра с осциллирующими символами. Особенностью полученных СИУ является различное асимптотическое поведение символов их ядер. Так, часть операторов имеет растущий степенным образом на бесконечности символ. Это обусловливает необходимость применения к данным СИУ методов регуляризации, позволяющих свести интегральные уравнения с растущим символам ядра к интегральным уравнениям с логарифмической особенностью, для решения которых могут быть использованы известные методы [3, 4].

Например, в случае полуограниченных полостей приближенное решение полученной системы уравнений Винера-Хопфа строится путем приближенной факторизации матриц-функций. В случае трещин, занимающих односвязные области конечных размеров, для решения регуляризованных СИУ может быть применен метод фиктивного поглощения [4], позволяющий строить решения для областей произвольной конфигурации.

Несмотря на математические сложности решения полученных СИУ, данный подход является эффективным средством исследования динамики сред, содержащих совокупности трещин, в частности, предоставляя возможность сформулировать условия локализации волнового процесса для интерфейсных волн, бегущих по границам трещин. При этом задача сводится к построению соотношений, налагаемых на геометрические характеристики системы и приложенные силы. С этой целью предлагается выделять из решений составляющие, отвечающие за локализацию волнового процесса.

В случае простейшего «вируса», при котором все области, занятые полостями-трещинами, являются неограниченными плоскостями, система (3) может быть переписана в виде, разрешенном относительно интегральных характеристик скачков:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_{3L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1,3L} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{2,3L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{3L,1} & p_{3L,2} & \dots & p_{3L,3L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_{3L} \end{pmatrix}.$$

Здесь U_{lm}, T_{lm} для удобства обозначены через U_k, T_k, $k = \overline{1, 3L}$, $\mathbf{G}_l^{\pm} \equiv 0$. Тогда

$$U_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ki} T_i + \sum_{i=1}^{3L-n} \frac{p_{ik} T_i}{u^2 - \xi^2}, \quad k = \overline{1, 3L},$$

где слагаемые, имеющие в качестве особенности полюс в нуле функции Релея, представлены как $\dfrac{p_{ik} T_i}{u^2 - \xi^2}$, а $p_{ij} T_i$ — слагаемые, не имеющие данной особенности. Тогда соотношения, при которых «вирус» локализует волновой процесс, имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) T_i = 0 \text{ при } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \xi^2,$$

где ξ — волновое число для поверхностных волн.

Аналогичным образом осуществляется построение условий локализации волнового процесса «вирусом» в виде полуограниченных полостей-трещин, расположенных этажно.

Приведенный подход к исследованию задач для среды, содержащей систему трещин, непосредственно распространяется на аналогичные задачи для сред с включениями, а также с неоднородностями обоих типов.

Литература

1. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Изв. РАН. МТТ. 2000. №3. С. 5–9.
2. *Бабешко В. А.* Тела с неоднородностями // ДАН. 2000. Т. 373. №2. С. 191–193.
3. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
4. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
5. *Бабешко В. А., Бужан В. В., Павлова А. В., Ратнер С. В.* Упругое пространство с совокупностью неоднородностей // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. Мат. моделирование. 2001. Спец. вып. С. 26–29.
6. *Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. Вып. 5.

Статья поступила 20 февраля 2003 г.
Кубанский государственный университет, University of Tennessee (Knoxville, USA)