Механика

УДК 539.3

БЛОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ПРОЕКТИРОВАНИИ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.

BLOCK-LEVEL ELEMENTS IN THE DESIGN OF HETEROGENEOUS MATERIALS AND STRUCTURES

Babeshko V. A.[1], Evdokimova O. V.[1], Babeshko O. M.[2]

[1] Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[2] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

Abstract. Block structure theory allowed us to develop a theory of hidden defects and for the first time to identify a new type of earthquakes that can be predicted. However, the possibilities of block structure and block elements theoryare not exhausted.

Allowing to solve a wide range of boundary problems for systems of partial differential equations with high accuracy, these methods manage to build analytical representations of solutions of boundary problems and identify important properties of solutions, which is not always possible to do by numerical methods. For example, numerical method can help to obtain the solution of the boundary problem on the approximation on the basis of two deformable lithospheric plates and to detect the growth of stress concentration in the zone of convergence. However, it is impossible to obtain information about the singular stress concentration in this zone, as well as the dependence of the coefficient on the singularity of the input parameters of the boundary value problem. This issue can be resolved using the block element method by formation of appropriate block structures.

Keywords: block element, topology, boundary problems methods, exterior forms, block structures, coverings

Введение

Теория блочных структур и блочного элемента [1–6] развивалась авторами проекта в течение нескольких лет и нашла ряд важных применений, позволив разработать теорию скрытых дефектов и впервые выявить новый тип землетрясений, которые можно прогнозировать.

Однако этим возможности теории блочных структур и блочного элемента не исчерпываются.

Позволяя решать широкий класс граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных с высокой точностью, эти методы дают возможность строить аналитические представления решений граничных задач и выявлять важные свойства решений, что не всегда удается сделать численными методами. Например, с помощью пакета программ COMSOL можно получить решение граничной задачи о сближении на деформируемом основании двух литосферных плит и обнаружить рост концентрации напряжений в зоне сближения. Однако получить информацию о сингулярной концентрации напряжений в этой зоне не удается, как и зависимость коэффициента при сингу-

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2018 г., проекты (9.8753.2017/БЧ), ЮНЦ РАН на 2018 г., № госрег. проекта 01201354241, программ президиума РАН П-16, проект (0256-2018-0015), П-52 проект (0256-2018-0020), и при поддержке грантов РФФИ (16-41-230214), (16-41-230218), (16-48-230216), (17-08-00323), (18-08-00465), (18-01-00384).

лярности от входных параметров граничной задачи. По этой причине долгое время не было обнаружено стартовое землетрясений, пока не был применен метод блочного элемента [5].

Метод блочного элемента применим для сред любой реологии. Этот метод достаточно успешно использован для исследования покрытий со скрытыми дефектами, в сейсмологии, для исследования напряженно-деформированного состояния подземных сооружений при наличии множественности штолен, описания некоторых аномальных явлений, для моделирования материалов с изменяющимися свойствами [3, 4]. Построение и исследование блочных элементов, их математическое описание потребовало привлечения математики высокого уровня — топологии, факторизации матриц-функций нескольких комплексных переменных, внешней алгебры и внешнего анализа — математического раздела, введенного авторами и продиктованного проводимыми исследованиями [5].

Блочные элементы являются многообразиями с краем, топология описывается декартовыми произведениями топологических множеств носителей блоков и вектор-функций решений граничных задач на носителях. Именно необходимость использования математики высокого уровня является препятствием для широкого применения этого метода за рубежом, имеются лишь отдельные попытки.

В недавних работах авторов установлено, что блочные элементы имеют два состояния — упакованного и распакованного, что пояснено в работе [6]. Упакованные блочные элементы обладают ценным свойством простого вычисления их преобразования и обращений Фурье в декартовой системе координат, тем самым открылась возможность для разностороннего их использования в граничных задачах для дифференциальных уравнений. Именно это свойство позволило поставить задачу исследования и решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в аналитическом виде, что, за исключением очень частных случаев, ранее не было возможно. Аналитическое представление решения, в виде интеграла, позволяет достаточно просто анализировать такие его свойства, как, например, прохождение, отражение, поглощение сигнала зоной переменности коэффициентов дифференциального уравнений, свидетельствующей о неоднородность материала.

1. Основы подхода

Ниже кратко приводится изложение подхода на простейшем примере для уравнения Гельмгольца. Рассмотрим во всем пространстве следующие уравнения

$$L_0 u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0,$$

$$L = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} + k^2, \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad k > 0,$$

$$L_n w(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0,$$

$$L_n = A_1(x,y,z)\partial_{xx} + A_2(x,y,z)\partial_{yy} + \\ + A_3(x,y,z)\partial_{zz} + r^2.$$

Здесь первое уравнение с постоянными коэффициентами, а второе — с переменными, которое предстоит решить.

Допустим, удалось разбить область R^3 на p, $p = 1, 2, \ldots, P$ фрагментов Ω_p, в которых коэффициенты A_{sp}, $s = 1, 2, 3$; $\mathbf{x} \in \Omega_p$, можно считать постоянными. Обозначим

$$L_{ns} = A_{1s}(x,y,z)\partial_{xx} + A_{2s}(x,y,z)\partial_{yy} + \\ + A_{3s}(x,y,z)\partial_{zz} + r^2.$$

Ради простоты, положим $L_{ns} \neq L$ ни при каких параметрах. Построим в каждой из областей Ω_p упакованные блочные элементы [6] оператора L, обозначим их B_p. Считаем, что они формируются в результате сопряжения с соседними с помощью гомеоморфизмов одного и того же блочного элемента B_0, занимающего непересекающиеся области. Он порожден граничной задачей в некоторой эталонной области, например, в кубе, носитель которого достаточно мал и в совокупности вписывается в область таким образом, что весьма полно ее заполняет. Например, если области — прямоугольный параллелепипед, то носитель B_0 занимает куб такого малого размера, что им можно заполнить каждый из параллелепипедов с номером p. В результате получается совокупность одинаковых блочных элементов B_0, занимающих все области Ω_p. Переномеруем все их в соответствии с номером занимаемых областей. В результате получаем систему блочных элементов B_{0pm}, точно или приближенно покрывающих все

R^3. Их может быть и бесконечное множество. Рассмотрим теперь уравнение вида

$$L_n w_{pm}(\mathbf{x}) = B_{0pm}, \quad w_{pm}(\mathbf{x}) = \sum_{cg} R_{cg} B_{0cg}.$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений приводит к легко определяемым операторам R_{cg}. В результате совокупность функций B_{0pm} порождает кусочно-непрерывную собственную функцию оператора $L_n \sum_{cg} R_{cg}$ с единичным собственным значением.

Ее наличие уже просто позволяет получать решение уравнения с переменными коэффициентами $L_n w(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0$ во всей рассматриваемой области.

Изложенный подход может быть перенесен без особого усложнения на любые граничные задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

2. Пример

В качестве примера построения блочного элемента рассмотрим следующую двумерную краевую задачу в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ для дифференциального уравнения вида [1]

$$[A_{11}(x_1, x_2)\partial^2 x_1 + A_{22}(x_1, x_2)\partial^2 x_2 + \\ + A(x_1, x_2)]\phi(x_1, x_2) = 0 \quad (2.1)$$

с некоторыми граничными условиями, например, Дирихле или Неймана.

Здесь коэффициенты $A_{kk}(x_1, x_2)$, $A(x_1, x_2)$ являются положительными гладкими функциям.

Введем в области Ω прямоугольную сетку, настолько плотную, чтобы в интересующей зоне этой области коэффициенты $A_{kk}(x_1, x_2)$, $A(x_1, x_2)$ можно считать постоянными, будем обозначать их A_{kk}, A, а область выбранного прямоугольника сетки — Ω_0 с границей $\partial\Omega_0$. Пусть в исходной системе координат она описывается соотношениями: $|x_1| \leqslant a$, $|x_2| \leqslant b$.

В области Ω_0 решим дифференциальным методом факторизации краевую задачу (2.1), применяя алгоритм, изложенный в [4]. В процессе его применения осуществляется касательное расслоение ориентированной границы $\partial\Omega_0$ и вводятся правые локальные координаты с внешними нормалями x_2^k и касательными x_1^k. Локальные координаты располагаются на сторонах прямоугольника, следуют против часовой стрелки, с начальным индексом $k = 1$ на верхней стороне.

Введем операторы преобразования Фурье

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k)\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1^k) \exp i\alpha_1^k x_1^k dx_1^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k)\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha_1^k) \exp(-i\alpha_1^k x_1^k) d\alpha_1^k,$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k)\phi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_1^k, x_2^k) \times \\ \times \exp i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k) dx_1^k dx_2^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k)\Phi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k) \times \\ \times \exp\left[-i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k)\right] \mathrm{d}\alpha_1^k \, \mathrm{d}\alpha_2^k, \\ k = 1, 2, 3, 4.$$

Применяя процедуру построения автоморфизма многообразий в методе факторизации, вычисляя формы-вычеты Лере, получим в локальных системах координат псевдодифференциальные уравнения блочного элемента в виде

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^1)\left\{\int_{-a}^{a}\left[-A_{22}\left(\phi'_{12} - i\alpha_{2-}^1\phi_1\right) \times \right.\right. \\ \times \exp i\alpha_1^1\eta_1^1 d\eta_1^1 - A_{22}\left(\phi'_{32} + i\alpha_{2-}^1\phi_3\right) \times \\ \left.\times \exp\left[-i\left(2\alpha_{2-}^1 b + \alpha_1^1 x_1^3\right)\right] \mathrm{d}x_1^3\right] - \\ - \int_{-b}^{b}\left[A_{11}\left(\phi'_{22} + i\alpha_1^1\phi_2\right) \times \right. \\ \times \exp\left[-i\left(\alpha_{2-}^1 b - \alpha_{2-}^1 x_1^2 + \alpha_1^1 a\right)\right] \mathrm{d}x_1^2 - \\ - A_{11}\left(\phi'_{42} - i\alpha_1^1\phi_4\right) \times \\ \left.\left.\times \exp\left[-i\left(\alpha_{2-}^1 b + \alpha_{2-}^1 x_1^4 - \alpha_1^1 a\right)\right] \mathrm{d}x_1^4\right]\right\} = 0;$$

$$x_1^1 \in [-a, a],$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^2)\Bigg\{\int\limits_{-b}^{b}\Big[-A_{11}\left(\phi'_{22}-i\alpha_{2-}^2\phi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\alpha_1^2\eta_1^2 d\eta_1^2-A_{11}\left(+\phi'_{42}+i\alpha_{2-}^2\phi_4\right)\times$$
$$\times\exp i\left(-2\alpha_{2-}^2 a-\alpha_1^2 x_1^4\right)\mathrm{d}x_1^4\Big]+$$
$$+\int\limits_{-a}^{a}\Big[A_{22}\left(-\phi'_{12}+i\alpha_1^2\phi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(\alpha_{2-}^2 a-\alpha_1^2 b+\alpha_{2-}^2 x_1^1\right)\right]\mathrm{d}x_1^1+$$
$$+A_{22}\left(-\phi'_{32}-i\alpha_1^2\phi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(\alpha_{2-}^2 a+\alpha_1^2 b-\alpha_{2-}^2 x_1^3\right)\right]\mathrm{d}x_1^3\Big]\Bigg\}=0;$$

$$x_1^2\in[-b,b],$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^3)\Bigg\{\int\limits_{-a}^{a}\Big[-A_{22}\left(\phi'_{32}-i\alpha_{2-}^3\phi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\alpha_1^3\eta_1^3\,\mathrm{d}\eta_1^3-A_{22}\left(\phi'_{12}+i\alpha_{2-}^3\phi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(2\alpha_{2-}^3 b+\alpha_1^3 x_1^1\right)\right]\mathrm{d}x_1^1\Big]+$$
$$+\int\limits_{-b}^{b}\Big[-A_{11}\left(\phi'_{22}-i\alpha_1^3\phi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(\alpha_{2-}^3 b-\alpha_1^3 a+\alpha_{2-}^3 x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x_1^2-$$
$$-A_{11}\left(\phi'_{42}+i\alpha_1^3\phi_4\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(\alpha_{2-}^3 b+\alpha_1^3 a-\alpha_{2-}^3 x_1^4\right)\right]\mathrm{d}x_1^4\Big]\Bigg\}=0;$$

$$x_1^3\in[-a,a],$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^4)\Bigg\{\int\limits_{-b}^{b}\Big[-A_{11}\left(\phi'_{42}-i\alpha_{2-}^4\phi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\alpha_1^4\eta_1^4\,\mathrm{d}\eta_1^4-A_{11}\left(\phi'_{22}+i\alpha_{2-}^4\phi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(2\alpha_{2-}^4 a+\alpha_1^4 x_1^2\right)\right]\mathrm{d}x_1^2\Big]+$$
$$+\int\limits_{-a}^{a}\Big[-A_{22}\left(\phi'_{12}+i\alpha_1^4\phi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(\alpha_{2-}^4 a+\alpha_1^4 b-\alpha_{2-}^4 x_1^1\right)\right]\mathrm{d}x_1^1+$$
$$+A_{22}\left(\phi'_{32}-i\alpha_3^4\phi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\left(\alpha_{2-}^4 a-\alpha_1^4 b+\alpha_{2-}^4 x_1^3\right)\right]\mathrm{d}x_1^3\Big]\Bigg\}=0,$$

$$x_1^4\in[-b,b].$$

Решив указанные уравнения, получим упакованные блочные элементы в прямоугольных клиновидных областях, расположенных симметрично относительно вертикальной оси. Они описываются соотношениями

$$u_\lambda\left(x_2,x_3\right)=\mathbf{F}_2^{-1}(x_2,x_3)\frac{\omega_\lambda\left(\alpha_2,\alpha_3\right)}{\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2-p_\lambda^2\right)},$$

$$\omega_\lambda=(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}})e^{i(\alpha_2 b_1)}\times$$
$$\times\left\langle F_{1\lambda}(\alpha_3)-F_{1\lambda}(\alpha_{3\lambda+})\frac{\alpha_3}{\alpha_{\ 3\lambda+}}\right\rangle+$$
$$+\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_{3\lambda+}}-1\right)\Big\langle F_{2\lambda}(\alpha_2)-F_{2\lambda}(\alpha_{2\lambda-})\times$$
$$\times e^{-i(\alpha_{2\lambda-}b_1)}e^{i(\alpha_2 b_1)}\frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}}\Big\rangle,$$

$$u_r\left(x_2,x_3\right)=\mathbf{F}_2^{-1}(x_2,x_3)\frac{\omega_r\left(\alpha_2,\alpha_3\right)}{\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2-p_r^2\right)},$$

$$\omega_r=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{2r+}}-1\right]e^{i(\alpha_2 b_2)}\times$$
$$\times\left\langle F_{1r}(\alpha_3)-F_{1r}(\alpha_{3r+})\right\rangle+$$
$$+\left[\frac{\alpha_3}{\alpha_{3r+}}-1\right]\Big\langle F_{2r}(\alpha_2)-F_{2r}(\alpha_{2r+})\times$$
$$\times e^{i(\alpha_2 b_2)}e^{i(\alpha_{2r+}b_2)}\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}}\Big\rangle.$$

Для сопряжения блочных элементов применим к ним, как к топологическим объектам, гомеоморфизмы [7] и получим новую блочную структуру.

Вывод

Метод блочного элемента позволяет, путем применения гомеоморфизмов формировать новые типы блочных структур.

Литература

1. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К теории блочного элемента // ДАН. Т. 427. №2. 2009. С. 183–186.
2. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О блочных элементы в теории плит сложной формы // МТТ. 2012. №5. С. 92–97.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О трещинах в покрытиях в статических задачах сейсмологии и наноматериалов // ДАН. 2013. Т. 453. №2. С. 162–166.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О топологических структурах граничных задач в блочных элементах // ДАН. 2016. Т. 470. №6. С. 650–654.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Внешний анализ в проблеме скрытых дефектов и прогнозе землетрясений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. №2. С. 19–28.
6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стадиях преобразования блочных элементов // ДАН. 2016. Т. 468. №2. С. 154–158.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Сложение упакованных блочных элементов и их гомеоморфизмы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. №2. С. 32–35.

References

1. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. To the theory of the block element. *Rep. of the Academy of Sciences*, 2009, vol. 427, no. 2, pp. 183–186. (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. About block elements in theory plates of complex shape. *Mechanics of solids*, 2012, no. 5, pp. 92–97. (In Russian)
3. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. About cracks in the coatings in static problems of seismology and nanomaterials. *Rep. of the Academy of Sciences*, 2013, vol. 453, no. 2, pp. 162–166. (In Russian)
4. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. Topological structures boundary value problems in block elements. *Rep. of the Academy of Sciences*, 2016, vol. 470, no. 6, pp. 650–654. (In Russian)
5. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. External analysis of the problem hidden defects and earthquake prediction. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, 2, pp. 19–28. (In Russian)
6. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. About the stages of transformation block elements. *Rep. of the Academy of Sciences*, 2016, vol. 468, no. 2, pp. 154–158. (In Russian)
7. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. Packaged block elements and their homeomorphisms. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 2, pp. 32–35. (In Russian)

Статья поступила 11 марта 2018 г.