ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2018. Том 15. № 1. С. 24–28

Механика

УДК 539.3

ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ РИМАНА В ПРОБЛЕМЕ ПРОЧНОСТИ СОВОКУПНОСТИ ШТОЛЕН

Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.

RIEMANN VECTOR EQUATION IN THE PROBLEM OF STRENGTH OF THE SET OF TUNNELS

Evdokimova O. V.[1], Babeshko O. M.[2], Babeshko V. A.[1]

[1] Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[2] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

Abstract. The study of factors affecting the strength properties of changing underground structures is performed, but for various reasons this study is small. The set of parallel underground structures considered as a block structure consisting of the upper linearly elastic layer and the formation modeled by Kirchhoff plate is being examined. The stratum containing the extracted minerals lies on the layers, which environment mechanical characteristics are soil-like and allow you to model it asWinkler's bed. It is assumed that the thickness of the reservoir is much smaller than the thickness of the upper layer, which takes place in the real conditions of extraction of many minerals. In contrast to the approaches made in the works of various authors, in this paper, despite the presence of multiplicity of galleries, a method is created to describe the behavior of parameters of each tunnel. This is achieved by reducing the problem to the vector Riemann boundary value problem, for which a factorization method is being developed.

Keywords: stress-strain state, drifts, factorization, deformable layers, interface layer, Kirchhoff plates, block elements, integral and functional equations.

Введение

1. Разработка направлена на исследование тех факторов, влияющих на прочностные свойства изменяющихся подземных сооружений, которые по разным причинам мало изучены. Рассматривается совокупность параллельных подземных сооружений [1–3] как блочная структура, состоящая из верхнего линейно упругого слоя толщиной H_1 и пласта толщины h, моделируемого пластиной Кирхгофа. Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики среды которого грунтоподобные и позволяют моделировать его постелью Винклера. Предполагается, что толщина h пласта много меньше H_1 что имеет место в реальных условиях добычи многих полезных ископаемых. Расположим систему координат $ox_1x_2x_3$ таким образом, что плоскость ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось ox_3 направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси ox_1, перпендикулярно оси ox_2, расположено N протяженных, параллельных между собой штолен, которые считаются бесконечными. Штольни находятся в рудном пласте и ширина каждой из них равна $b_{2n+1} - b_{2n}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, где (b_{2n}, b_{2n+1}) — координаты на оси ox_2 штольни с номером $2n$. Пласт сверху накрыт верхним деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями $t(x_1, x_2)$ и перемещениями $u_{32}(x_1, x_2)$ верхней границы основания задается соотношением $u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \upsilon t(x_1, x_2)$,

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2018 г., проекты (9.8753.2017/БЧ), ЮНЦ РАН на 2018 г., № госрег. проекта 01201354241, программ президиума РАН П-16, проект (0256-2018-0015), П-52 проект (0256-2018-0020), и при поддержке грантов РФФИ (16-41-230214), (16-41-230218), (16-48-230216), (17-08-00323), (18-08-00465), (18-01-00384).

$\varepsilon_6^{-1}\upsilon > 0$. Здесь υ — коэффициент постели Винклера. Области между штольнями с координатами $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$ шириной, $b_{2n} - b_{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, $b_1 = -\infty$, $b_{2N} = \infty$ являются опорами, имеющими номера $2n - 1$. Допускается, что упругий слой со свободной от напряжений верхней границей, плотностью материала ρ вертикально воздействует сверху на пласт напряжением $q_0 = \rho g H_1$, где g — ускорение свободного падения, вызывая пренебрежимо малые касательные напряжения в сравнении с нормальными.

1. Основные уравнения

2. Уравнение пластин Кирхгофа, описывающих поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяженными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \\ \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)u_{3b} + \\ + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \\ \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \\ b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{\mathrm{H}_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{\mathrm{H}_1^3},$$

$$Q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = \\ = f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{\mathrm{H}_1 \partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2)12\mathrm{H}_1^4}{E_b h_b^3},$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu)\mathrm{H}_1}{\mu}.$$

Здесь для опор, сформированных из фрагментов пласта между штольнями, введено условное обозначение индексом b, которому в будущем будут приданы текущие номера. Опоры занимают области Ω_b с границами $\partial\Omega_b$ при вертикальных статических воздействиях напряжением g_{3b} сверху и t_{3b} снизу. Используются общепринятые обозначения механических параметров в выбранной системе координат: M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат x_1ox_2; h_b — толщины пластин, H_1 — размерная толщина верхнего слоя. Обозначения заимствованы из [1–3]. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счет веса верхнего слоя и описывается соотношением [4]

$$u_{31}(x_1, x_2) = \mathbf{K}_{31}g = \\ = \varepsilon_6^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2)\times \\ \times [g(\xi_1, \xi_2) - g_0]\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

$$k_{31}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2)\times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2)e^{i(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2.$$

Здесь $g(\xi, \eta)$ — воздействия на нижнюю границу верхнего слоя со стороны пласта, то есть контактные напряжения, действующие на верхний пласт со стороны опор. Функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$, называемая символом ядра интегрального уравнения, представляет собой для линейно-упругого слоя мероморфную функцию двух комплексных переменных. Полюса функции по одной из комплексных переменных $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ при фиксированной вещественной второй являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах. Воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается через $t(\xi_1, \xi_2)$, вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях — $u_{32}(x_1, x_2)$.

2. Построение одномерной системы интегральных уравнений

.

Приняв во внимание наличие $N+1$ опоры, функциональное уравнение можно записать в виде интегрального уравнения [1–3]

$$\mathbf{K}g = \int\limits_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\times$$
$$\times \sum_{n=1}^{N} g_{2n-1}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} t_{2n-1}(x_1,x_2) + \sum_{n=2}^{N-1} \tau_{2n}(x_1,x_2),$$
$$n = 1,2,\ldots,N \quad (2.1)$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1,\alpha_2)\times$$
$$\times\, e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1,\xi_2)\times$$
$$\times\, e^{ii(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2)}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$

$$t_{2n-1}(x_1,x_2) \in \Omega_{2n-1}(b_{2n-1} \leqslant x_2 \leqslant b_{2n},$$
$$|x_1| \leqslant \infty, n = 0,1,\ldots,N),$$

$$\tau_{2n}(x_1,x_2) \in \Omega_{2n}(b_{2n} \leqslant x_2 \leqslant b_{2n+1},$$
$$|x_1| \leqslant \infty),$$

$$t_1(x_1,x_2) \in \Omega_0(-\infty = b_1 \leqslant x_2 \leqslant b_2,$$
$$|x_1| \leqslant \infty),$$

$$t_{2N-1}(x_1,x_2) \in \Omega_{2N}(b_{2N-1} \leqslant x_2 \leqslant \infty,$$
$$|x_1| \leqslant \infty),$$

$$\tau_0(x_1,x_2) = \tau_{2N}(x_1,x_2) = 0,$$

Здесь $\phi_{2n}(x,y)$ — новые неизвестные.

Для его исследования и решения применим метод факторизации, разработанный в [4]. При этом приняты обозначения факторизации функций по параметру α_2 в виде суммы и в виде произведения в форме

$$\Psi(\alpha_1,\alpha_2) = \{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^+ + \{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^-,$$

$$\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^{\pm} = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\alpha_1,\eta)}{(\eta-\alpha_2)}\,\mathrm{d}\eta;$$

$$\alpha_2 \in C^{\pm},$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2) = K_+(\alpha_1,\alpha_2)K_-(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$K_{\pm}(\alpha_1,\alpha_2) = \exp\left[\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\Psi(\alpha_1,\eta)}{(\eta-\alpha_2)}\,\mathrm{d}\eta\right],$$

$$\alpha_2 \in C^{\pm}.$$

Применяя к системе уравнений преобразование Фурье по параметру x_1, приходим, после ряда обозначений, упрощающих вид преобразованных по Фурье функций, к системе одномерных интегральных уравнений вида

$$\sum_{0}^{N}\int\limits_{b_{2n}}^{b_{2n+1}} k(x-\xi)\phi_{2n}(\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \begin{cases} f_{2m}(x),\ b_{2m} < x < b_{2m+1}, \\ \qquad m = 0,1,2,\ldots,N, \\ \qquad \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\xi}k(\xi)\,\mathrm{d}\xi = K(\alpha); \\ q_{2n-1},\ b_{2m-1} < x < b_{2m}, \\ \qquad b_0 = -\infty, \quad b_{2N+1} = \infty, \\ \qquad F(\alpha) = \displaystyle\sum_{0}^{N} F_{2n}(\alpha). \end{cases}$$

Уравнения составлены для N штолен, от отвисанием крыши q_{2n-1} и $N+1$ опоры, имеющей контактные напряжения ϕ_{2n}. Для упрощения принято обозначать к функциональному уравнению вида

$$R(\alpha)\sum_{1}^{N} Q_{2n-1}(\alpha) - \sum_{0}^{N}\Phi_{2n}(\alpha) = \Psi(\alpha).$$

Здесь приняты обозначения

$$R(\alpha) = \frac{1}{K(\alpha)}, \quad \Psi(\alpha) = -\frac{1}{K(\alpha)}F(\alpha),$$

$$b_0 = -\infty, \quad b_{2N} = \infty,$$

$$\int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} e^{i\alpha\xi} q(\xi) d\xi = Q_{2n-1}(\alpha),$$

$$\int_{b_{2n}}^{b_{2n+1}} e^{i\alpha\xi} \phi_{2n}(\xi) d\xi = \Phi_{2n}(\alpha).$$

3. Сведение системы интегральных уравнений к векторной краевой задаче Римана

Введем следующую систему обозначений

$$\Phi_0(\alpha) e^{-i\alpha b_2} = e^{-i\alpha b_2} \Phi_0^-(\alpha),$$

$$\Phi_0(\alpha) = e^{i\alpha b_2} \Phi_0^-(\alpha),$$

$$\Phi_{2N}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2N}} = e^{-i\alpha b_{2N}} \Phi_{2N}^+(\alpha),$$

$$Q_{2n-1}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n-1}} = Q_{2n-1}^+(\alpha),$$

$$Q_{2n-1}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n}} = Q_{2n-1}^-(\alpha),$$

$$Q_{2n-1}^+(\alpha) = Q_{2n-1}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n}-b_{2n-1})},$$

$$\Phi_{2n}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n}} = \Phi_{2n}^+(\alpha),$$

$$\Phi_{2n}(\alpha) e^{-i\alpha b_{2n+1}} = \Phi_{2n}^-(\alpha),$$

$$\Phi_{2n}^+(\alpha) = \Phi_{2n}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n+1}-b_{2n})},$$

$$\Phi_0^-(\alpha) = X_{2N}^-(\alpha), \quad Q_{2n-1}^{\pm}(\alpha) = X_{2n-1}^{\pm}(\alpha),$$

$$\Phi_{2n}^{\pm}(\alpha) = X_{2n}^{\pm}(\alpha), \quad n = 2, \dots, N-1,$$

$$\Phi_{2N}^+(\alpha) = X_{2N}^+(\alpha),$$

$$X_{2n-1}^+(\alpha) = X_{2n-1}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n}-b_{2n-1})},$$

$$n = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$X_{2n}^+(\alpha) = X_{2n}^-(\alpha) e^{i\alpha(b_{2n+1}-b_{2n})},$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Тогда приходим к следующей векторной системе краевой задачи Римана для N аналитических функций

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{G}\mathbf{X}^- + \Psi, \quad m = 2, \dots, 2N-1,$$

$$G_{mm} = e^{i\alpha(b_m - b_{m-1})}, \quad G_{2N2N} = -e^{i\alpha(b_{2N}-b_1)},$$

$$G_{2N,s}(\alpha) = \begin{cases} R(\alpha) e^{-i\alpha(b_{2N}-b_{s+1})}, & s = 2m-1; \\ -e^{-i\alpha(b_{2N}-b_{s+1})}, & s = 2m, \end{cases}$$

$$s = 1, 2, \dots, 2N, \quad \Psi(\alpha) = \{0, 0, \dots, -\Psi(\alpha)\}.$$

Пример. Случай одной штольни. Векторная задача Римана принимает вид

$$\left\| \begin{matrix} X_1^+(\alpha) \\ X_2^+(\alpha) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} e^{i\alpha(b_2-b_1)} & 0 \\ R(\alpha) & -e^{-i\alpha(b_2-b_1)} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\left\| \begin{matrix} X_1^-(\alpha) \\ X_2^-(\alpha) \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} 0 \\ \Psi(\alpha) e^{-i\alpha b_2} \end{matrix} \right\|$$

Случай двух штолен, имеем

$$\left\| \begin{matrix} X_1^+(\alpha) \\ X_2^+(\alpha) \\ X_3^+(\alpha) \\ X_4^+(\alpha) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \psi_{11} & & & \\ & \psi_{22} & & \\ & & \psi_{33} & \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} X_1^-(\alpha) \\ X_2^-(\alpha) \\ X_3^-(\alpha) \\ X_4^-(\alpha) \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi(\alpha) e^{-i\alpha b_4} \end{matrix} \right\|,$$

$$\psi_{11} = e^{i\alpha(b_2-b_1)}, \quad \psi_{22} = e^{i\alpha(b_3-b_2)},$$

$$\psi_{33} = e^{i\alpha(b_4-b_3)}, \quad \psi_{44} = -e^{-i\alpha(b_4-b_1)},$$

$$\psi_{41} = R(\alpha) e^{-i\alpha(b_4-b_2)}, \quad \psi_{42} = -e^{-i\alpha(b_4-b_3)},$$

$$\psi_{43} = R(\alpha).$$

Для исследования функционального уравнения Римана будет развит факторизационный метод, позволяющий оптимально изучать поведение характеристик решения. Это достигается разработкой специального факторизационного подхода к анализу матрицы-функции высокого порядка, являющейся коэффициентом функционального уравнения Римана. Этот подход позволяет некоторым алгоритмом последовательных приближений строить параметры решения граничной задачи, описывающие как поведение контактных напряжений в зонах соединений перегородок с многослойными средами, так и поведение перемещений в зонах полостей. Результаты этой разработки будут представлены в следующих публикациях авторов.

Выводы

Таким образом, в работе доказано, что граничная задача для слоистой среды с параллельными множественными полостями может быть сведена к векторной задаче Римана, что позволяет использовать эффективный математический аппарат теории уравнений Римана для решения поставленной граничной задачи. Это позволяет осуществлять анализ состояния шахтного строения, которое изменяется как от действия новых штолен, так и от медленного движения коры Земли.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К теории влияния глобального фактора на прочность совокупности параллельных соединений // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. №4. С. 412–419.
2. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В, Федоренко А.Г., Шестопалов В.Л.* К проблеме покрытий с трещинами в наноматериалах и сейсмологии // МТТ. 2013. №5. С. 39–45.
3. *Евдокимова О.М., Бабешко О.М., Бабешко В.А.* Метод интегрального уравнения в теории слоев с множественными полостями и штольнями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. №4. С. 29–38.
4. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. To the theory of global influence factor on the strength of a set of parallel connections. *Computational Mechanics of Continuous Media*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 412–419. (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., Fedorenko, A.G., Shestopalov, V.L. To the problem of coatings with cracks in nanomaterials and seismology. *Mechanics of solids*, 2013, no. 5, pp. 39–45. (In Russian)
3. Evdokimova, O.M., Babeshko, O.M., Babeshko, V.A. The method of the integral equation in the theory of layers with multiple cavities and galleries. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 4, pp. 29–38. (In Russian)
4. Babeshko, V.A. *The generalized method of factorization in spatial dynamic mixed problems of the theory of elasticity*. Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)

Статья поступила 11 марта 2018 г.