

Ф И З И К А

УДК 536.24

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ватульян А. О., Нестеров С. А.

ON AN APPROACH TO THE SOLUTION OF THE COEFFICIENT INVERSE HEAT
CONDUCTION PROBLEMVatulyan A. O.^{1,2}, Nesterov S. A.²¹ South Federal University, Rostov-on-Don, Russia² South Mathematical Institute – branch of Vladikavkazskiy Scientific Centre of RAS, Vladikavkaz,
Russia

e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Abstract. In the case of inhomogeneous materials, the thermophysical characteristics cannot be determined experimentally. To determine such characteristics, mathematical methods of identification based on the apparatus of coefficient inverse heat conduction problems are used. The inverse problems of heat conduction are most often solved in an extreme formulation. In this case, as a rule, gradient methods are used to minimize the residual functional. However, such methods have a number of disadvantages.

An alternative method for solving the coefficient inverse heat conduction problem for an inhomogeneous rod is proposed. Based on the weak formulation and the linearization method, operator equations are obtained for solving the inverse heat conduction problem. Thermophysical characteristics are restored on the basis of the iteration process, at each stage of which the Fredholm integral equations of the first kind are solved. The direct problem of thermal conductivity for a rod is solved by the method of reduction to the integral Fredholm equation of the second kind. The initial approximation in the iterative process was determined in two ways in the class of positive bounded linear functions. The first method is based on the use of a priori information on the boundaries of the change in thermophysical characteristics. The second method is based on the use of the Galerkin projection method. A comparative analysis of the methods for finding the initial approximation is carried out. Computational experiments on restoring various laws of change in thermophysical characteristics were carried out. It was found out that the reconstruction procedure is resistant to noisy input information.

Keywords: non-uniform rod, iterative process, initial approximation, projection method, integral equations.

Введение

При проведении тепловых расчетов необходимо иметь данные о теплофизических характеристиках применяемых материалов. Под теплофизическими характеристиками понимаются коэффициент теплопроводности материалов и их объемная теплоемкость. Однако в случае неоднородных материалов теплофизические характеристики невозможно определить экспериментальным путем, т.к. они представляют собой некоторые функции координат. В таких случаях применяют мате-

матические методы идентификации, используя дополнительную информации о температуре, измеренную на доступной для наблюдения части границе тела на некотором временном интервале. Такие задачи относятся к коэффициентным обратным задачам теплопроводности (КОЗТ).

Особенностью КОЗТ является их некорректность, которая проявляется в частности в сильной зависимости решения от входных данных. Для решения некорректных задач

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

Нестеров Сергей Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела дифференциальных уравнений Южного математического института – филиал Владикавказского научного центра РАН; e-mail: 1079@list.ru.

Работа выполнена при поддержке Южного математического института – филиала ВНИИ РАН, г. Владикавказ.

разработаны методы регуляризации, позволяющие построить единственное решение [1–4].

Для различных постановок КОЗТ российскими и зарубежными исследователями предложены разнообразные методы решения [1–11]. Наиболее часто такие задачи решают в экстремальной постановке. При этом для минимизации функционала невязки используют, как правило, итерационные методы градиентного типа [5–8] или генетические алгоритмы [9]. К недостаткам таких методов относится то обстоятельство, что при увеличении числа неизвестных, доставляющих минимум целевой функции, значительно возрастает объем вычислений. Чтобы избежать этого, в ряде работ предложены альтернативные подходы: метод квазиобращения [10], метод обращения разностной схемы [11] и др.

КОЗТ являются нелинейными задачами. В работах [12–16] решения нелинейных обратных задач теплопроводности и термоупругости строятся на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого решаются линейризованные операторные уравнения. Так, в [12] для нахождения поправок коэффициента теплопроводности неоднородного слоя на каждой итерации решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, полученное на основе метода линеаризации. Неоднородный слой разбивается на горизонтальные однородные слои и прямая задача решается с помощью конечно-разностного метода. В [13, 14] представлен результат реконструкции термомеханических характеристик неоднородного стержня. Операторные уравнения для решения обратной задачи получены на основе обобщенного соотношения взаимности и метода линеаризации. В [15] операторные уравнения для решения КОЗТ для полого цилиндра выводятся на основе слабой постановки задачи в трансформантах по Лапласу. Прямая задача решается путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода в трансформантах и обращении трансформант на основе теории вычетов.

Итерационный процесс при идентификации неоднородных характеристик обычно стартует с некоторого начального приближения. В работах [13–16] начальное приближение определялось в классе положительных ограниченных линейных функций. Коэффициенты линейной функции находились из условия минимума функционала невязки на

построенном, исходя из априорной информации, компактном множестве.

В данной работе для решения КОЗТ теплопроводности для стержня на основе итерационного процесса при помощи слабой постановки в пространстве трансформант Лапласа и метода линеаризации получены операторные уравнения 1-го рода. Прямая задача для стержня решается методом сведения к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода и теории вычетов. В настоящей работе, кроме рассмотренного ранее в [13–16] способа определения начального приближения, предложен новый способ, основанный на проекционном методе Галеркина. Проведен сравнительный анализ двух способов нахождения начального приближения. Прделан ряд вычислительных экспериментов по идентификации теплофизических характеристик стержня.

1. Операторные уравнения для решения обратной задачи теплопроводности

Рассмотрим задачу о распространении тепла в прямолинейном неоднородном стержне длиной l , на одном торце которого ($x = 0$) поддерживается нулевая температура, а на другом ($x = l$) действует постоянный тепловой поток q_0 . Начально-краевая задача теплопроводности при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = c(x) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t > 0,$$

$$T(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = q_0, \quad (1.2)$$

$$T(x, 0) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $k(x)$ — коэффициента теплопроводности, $c(x)$ — удельная объемная теплоемкость, $T(x, t)$ — температура тела, q_0 — плотность теплового потока.

Прямая задача теплопроводности заключается в определении функции $T(x, t)$ из (1.1)–(1.3) при известных теплофизических характеристиках $k(x)$, $c(x)$.

В обратной задаче требуется одновременно определить теплофизические характеристики $k(x)$, $c(x)$ из (1.1)–(1.3) по дополнительной информации о температуре, измеренной на торце стержня $x = l$:

$$T(l, t) = f(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (1.4)$$

Поставленная обратная задача (1.1)–(1.4) является нелинейной задачей, для решения которой применим подход, базирующийся на построении итерационного процесса на основе слабой постановки задачи.

Сначала получим задачу теплопроводности в трансформантах, применив к уравнениям (1.1), (1.2) преобразование Лапласа по времени. С учетом начального условия (1.3) будем иметь

$$\frac{d}{dx}(k(x) \frac{d\tilde{T}}{dx}) = pc(x)\tilde{T}(x, p), \quad (1.5)$$

$$\tilde{T}(0, p) = 0, \quad -\bar{k}(l) \frac{d\tilde{T}}{dx}(l, p) = \frac{q_0}{p}. \quad (1.6)$$

Трансформанта дополнительной информации примет вид

$$\tilde{W}(1, p) = \tilde{f}(p). \quad (1.7)$$

Здесь введены обозначения: p — параметр преобразования Лапласа, $\tilde{T}(x, p)$ — трансформанта температуры.

Далее для получения слабой постановки в трансформантах введем в рассмотрение гладкую пробную функцию $\tilde{\theta}(x, p)$, удовлетворяющую граничному условию $\tilde{\theta}(0, p) = 0$. Умножив уравнение (1.5) на $\tilde{\theta}(x, p)$ и проинтегрировав от 0 до l , приходим к соотношению

$$\int_0^l k(x) \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{d\tilde{\theta}}{dx} dx + p \int_0^l c(x) \tilde{T} \tilde{\theta} dx = \frac{q_0}{p} \tilde{\theta}(1, p). \quad (1.8)$$

Будем различать два состояния: первое состояние с компонентами $c^{(1)}$, $k^{(1)}$, $\tilde{T}^{(1)}$, $\tilde{\theta}^{(1)}$, второе — соответственно $c^{(2)}$, $k^{(2)}$, $\tilde{T}^{(2)}$, $\tilde{\theta}^{(2)}$. На отрезке $[0, l]$ для каждого состояния выполнены соотношения (1.8)

$$\int_0^l k^{(1)} \frac{d\tilde{T}^{(1)}}{dx} \frac{d\tilde{\theta}^{(1)}}{dx} dx + p \int_0^l c^{(1)} \tilde{T}^{(1)} \tilde{\theta}^{(1)} dx = \frac{q_0}{p} \tilde{\theta}^{(1)}(1, p), \quad (1.9)$$

$$\int_0^l k^{(2)} \frac{d\tilde{T}^{(2)}}{dx} \frac{d\tilde{\theta}^{(2)}}{dx} dx + p \int_0^l c^{(2)} \tilde{T}^{(2)} \tilde{\theta}^{(2)} dx = \frac{q_0}{p} \tilde{\theta}^{(2)}(1, p). \quad (1.10)$$

Найдя разность соотношений (1.9) и (1.10) и полагая в этой разности $\tilde{\theta}^{(1)} = \tilde{T}^{(2)}$, $\tilde{\theta}^{(2)} = \tilde{T}^{(1)}$, получим

$$\int_0^l (k^{(2)} - k^{(1)}) \frac{d\tilde{T}^{(1)}}{dx} \frac{d\tilde{T}^{(2)}}{dx} dx + p \int_0^l (c^{(2)} - c^{(1)}) \tilde{T}^{(1)} \tilde{T}^{(2)} dx = \frac{q_0}{p} (\tilde{T}^{(2)}(1, p) - \tilde{T}^{(1)}(1, p)). \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) можно трактовать как нелинейное операторное уравнение для решения КОЗТ в пространстве трансформант. Проведем линеаризацию уравнений (1.11), положив $\tilde{T}^{(1)} = \tilde{T}^{(n-1)}$, $\tilde{T}^{(2)} = \tilde{T}^{(n-1)} + \delta\tilde{T}^{(n-1)}$, $k^{(1)} = k^{(n-1)}$, $k^{(2)} = k^{(n-1)} + \delta k^{(n-1)}$, $c^{(1)} = c^{(n-1)}$, $c^{(2)} = c^{(n-1)} + \delta c^{(n-1)}$, и, сохраняя линейные слагаемые, с учетом дополнительной информации (1.7), получим

$$\int_0^l \delta k^{(n-1)} \left(\frac{d\tilde{T}^{(n-1)}}{dx} \right)^2 dx + p \int_0^l \delta c^{(n-1)} (\tilde{T}^{(n-1)})^2 dx = \frac{q_0}{p} (\tilde{f}(p) - \tilde{T}^{(n-1)}(1, p)). \quad (1.12)$$

Соотношение (1.12) является интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода относительно поправок $\delta k^{(n-1)}$, $\delta c^{(n-1)}$ и позволяет находить приближения коэффициентов, если предварительно решена прямая задача в трансформантах (1.5), (1.6) с характеристиками $c^{(n-1)}$, $k^{(n-1)}$. Итерационный процесс стартует при выбранном некотором начальном распределении коэффициентов $c^{(0)}$, $k^{(0)}$.

Перейдем к безразмерному виду обратной задачи в оригиналах (1.1)–(1.4), введя следующие параметры и функции:

$$z = \frac{x}{l}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k(x)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(x)}{c_0},$$

$$\tau = \frac{k_0 t}{c_0 l^2}, \quad W(z, \tau) = \frac{k_0 T}{q_0 l},$$

$$k_0 = \max_{x \in [0, l]} k(x), \quad c_0 = \max_{x \in [0, l]} c(x).$$

После обезразмеривания задача (1.1)–(1.4) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad (1.13)$$

$$0 \leq z \leq 1, \quad \tau > 0,$$

$$W(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=1} = 1, \quad (1.14)$$

$$W(z, 0) = 0, \quad (1.15)$$

$$W(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [a, b]. \quad (1.16)$$

Для решения обезразмеренной обратной задачи (1.13)–(1.16) применим к операторному уравнению в трансформантах (1.12) теоремы операционного исчисления о свертке и о дифференцировании оригинала и, выполнив обезразмеривание, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z} (z, \tau) \times \\ & \quad \times \frac{\partial^2 W^{(n-1)}}{\partial z \partial \tau_1} (z, \tau - \tau_1) dz + \\ & \quad + \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau} (z, \tau) \times \\ & \quad \times \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau} (z, \tau - \tau_1) dz = \\ & = f(\tau) - W(1, \tau), \quad \tau \in [a, b]. \quad (1.17) \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда неизвестной является только одна из характеристик стержня при известных остальных. В этом случае вид уравнения (1.17) значительно упрощается.

Так, интегральное уравнение, необходимое для нахождения поправок $\delta \bar{k}^{(n-1)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial z} (z, \tau) \times \\ & \quad \times \frac{\partial^2 W^{(n-1)}}{\partial z \partial \tau_1} (z, \tau - \tau_1) dz = \\ & = f(\tau) - W(1, \tau). \quad (1.18) \end{aligned}$$

Интегральное уравнение для поправок $\delta \bar{c}^{(n-1)}$ запишется

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta \bar{c}^{(n-1)} \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau} (z, \tau) \times \\ & \quad \times \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial \tau} (z, \tau - \tau_1) dz = \\ & = f(\tau) - W(1, \tau), \quad \tau \in [a, b]. \quad (1.19) \end{aligned}$$

Для регуляризации решения системы интегральных уравнений (1.18), (1.19) в работе применялся метод Тихонова А.Н. [17].

Выход из итерационного процесса осуществлялся при достижении функционалом невязки

$$J = \int_a^b (f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau \quad (1.20)$$

порогового значения, равного 10^{-6} .

2. Решение прямой задачи теплопроводности

Прямая задача теплопроводности в безразмерном виде заключается в определении функций $W(z, \tau)$ из (1.13)–(1.15) при известных теплофизических характеристиках $\bar{c}(z)$ и $\bar{k}(z)$. При произвольных законах изменения теплофизических характеристик задача (1.13)–(1.15) может быть решена лишь численно. После применения преобразования Лапласа к уравнениям (1.13), (1.14) и некоторых преобразований, выполненных аналогично действиям при решении задачи теплопроводности для цилиндра [15], получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в трансформантах Лапласа

$$\begin{aligned} \tilde{W}(z, p) & = \\ & = \int_0^1 K(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + f_0(z, p). \quad (2.1) \end{aligned}$$

Здесь ядро интегрального уравнения (2.1) и его правая часть имеют вид

$$K(z, \xi, p) = -p \bar{c}(\xi) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$f_0(z, p) = -\frac{1}{p} \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{k}(\xi)}.$$

Для решения интегрального уравнения (2.1) применяется метод коллокаций, заменяя интегралы их приближенными значениями по квадратурной формуле трапеций. Для нахождения оригиналов температуры используется теория вычетов: оригиналы находятся в виде конечной суммы показательных функций, причем их показатели являются вещественными отрицательными числами. Расчеты показали, что в случае заданной тепловой нагрузки, имеющей вид (1.14), температура, вычисленная в какой-либо точке стержня, монотонно растет от нуля и со временем выходит на некоторое предельное значение.

Предложенный метод решения прямой задачи тестировался на примере однородного стержня, для которого известно аналитическое решение. Вычисления показали, что на больших временах $\tau > 0,1$ для того, чтобы относительная погрешность численного решения составляла не более 1 % достаточно взять 12 разбиений в квадратурной формуле трапеций, а на малых — $\tau \in [10^{-7}, 10^{-1}]$ необходимо брать 30 разбиений.

3. Общая схема идентификации неоднородных теплофизических характеристик стержня

Коэффициенты $\bar{a}(z)$ ($\bar{k}(z)$, $\bar{c}(z)$) дифференциальных операторов уравнения теплопроводности (1.13) восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = a_1 + a_2z$.

На втором этапе определялись поправки реконструируемых функций $\delta\bar{a}^{(n-1)}(z)$ путем решения соответствующего операторного уравнения (1.18) или (1.19). После нахождения поправок строилось новое приближение и осуществлялся итерационный процесс по схеме $\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{a}^{(n-1)}(z)$. На каждом шаге итерационного процесса решалась прямая задача с уточненными характеристиками.

Как описано выше, первый этап итерационного процесса в обратных задачах требует знания начального приближения. В настоящем параграфе опишем два способа нахождения

начального приближения искомой функции.

Первый способ основан на использовании априорной информации о границах изменения теплофизических характеристик $0 < a_- \leq \bar{a}^{(0)}(z) \leq a_+$, где a_- и a_+ — наименьшее и наибольшее значения функции $\bar{a}(z)$ соответственно. Исходя из априорной информации, можно построить ограничения на искомые константы a_1, a_2 в виде системы неравенств $a_- \leq a_1 \leq a_+$, $a_- \leq a_1 + a_2 \leq a_+$, которые формируют область изменения коэффициентов a_1, a_2 . Разбив эту область на сетку, из условия минимизации функционала невязки на построенной сетке осуществляется подбор подходящей пары (a_1, a_2) .

Второй способ нахождения начального приближения основан на использовании проекционного метода Галеркина в трансформантах Лапласа. Покажем применение этого метода на примере нахождения начального приближения удельной теплоемкости $\bar{c}(z) = C_1 + C_2z$ при известном коэффициенте теплопроводности $\bar{k}(z) = 1$. Ограничимся двумя членами разложения в методе Галеркина

$$\tilde{W}_2(z, p) = \varphi_0(z, p) + \tilde{b}_1(p)\varphi_1(z) + \tilde{b}_2(p)\varphi_2(z).$$

Здесь $\varphi_0(z, p)$ — функция, удовлетворяющие неоднородным граничным условиям

$$\tilde{W}(0, p) = 0, \quad \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = -\frac{1}{p},$$

а $\varphi_i(z)$, $i = 1, 2$ — ортогональные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям

$$\tilde{W}(0, p) = 0, \quad \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = 0.$$

В нашем случае базисные функции имеют вид

$$\varphi_0(z, p) = -\frac{z}{p}, \quad \varphi_i(z) = \sin \frac{(2i-1)\pi z}{2},$$

$$i = 1, 2.$$

Сравнительный анализ температуры, вычисленной по методу Галеркина, и аналитического решения показал, что на больших временах $\tau > 0,1$ погрешность метода Галеркина не превосходит 3%.

Составим невязку уравнения теплопроводности в трансформантах

$$\varepsilon = \frac{d}{dz} \left(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}_2}{dz} \right) - p\bar{c}(z)\tilde{W}_2(z, p),$$

и спроектируем ее на все базисные функции $\varphi_i(z)$:

$$\int_0^1 (\varphi_0(z, p) + \tilde{b}_1(p)\varphi_1(z) + \tilde{b}_2(p)\varphi_2(z))'' \varphi_1(z) dz - p \int_0^1 (C_1 + C_2 z)(\varphi_0(z, p) + \tilde{b}_1(p)\varphi_1(z) + \tilde{b}_2(p)\varphi_2(z)) \varphi_1(z) dz = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_0^1 (\varphi_0(z, p) + \tilde{b}_1(p)\varphi_1(z) + \tilde{b}_2(p)\varphi_2(z))'' \varphi_2(z) dz - p \int_0^1 (C_1 + C_2 z)(\varphi_0(z, p) + \tilde{b}_1(p)\varphi_1(z) + \tilde{b}_2(p)\varphi_2(z)) \varphi_2(z) dz = 0. \quad (3.2)$$

После некоторых преобразований уравнений (3.1) и (3.2) получаем систему алгебраических уравнений относительно $\tilde{b}_1(p)$ и $\tilde{b}_2(p)$. Решение этой системы содержит неизвестные C_1, C_2 . Для их нахождения получим выражение для трансформанты температуры на торце стержня. После подстановки в формулу $\tilde{W}_2(1, p) = \varphi_0(1, p) + \tilde{b}_1(p)\varphi_1(1) + \tilde{b}_2(p)\varphi_2(1)$ выражений для $\tilde{b}_1(p), \tilde{b}_2(p), \varphi_0(1, p), \varphi_1(1), \varphi_2(1)$ имеем

$$\tilde{W}_2(1, p) = \frac{1}{p} - \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (3.3)$$

где

$$A(p) = 0,85C_2 + 1,14C_1 + 0,018pC_2^2 + 0,069pC_1C_2 + 0,056pC_1^2,$$

$$B(p) = 1,37 + 1,54pC_1 + 1,06pC_2 + 0,062p^2C_1^2 + 0,076p^2C_1C_2 + 0,02p^2C_2^2.$$

Для нахождения пары значений (C_1, C_2) приравняем к нулю выражение для $B(p)$,

а в качестве значений для параметра преобразования Лапласа p используем значения двух первых полюсов p_1 и p_2 трансформанты дополнительной информации $\tilde{f}(p)$. В результате подстановки значений этих полюсов в выражение $B(p) = 0$ получаем систему двух алгебраических уравнений второго порядка, численное решение которой дает четыре набора решений. Критериями отбора для подходящей пары чисел (C_1, C_2) являются: а) неотрицательность чисел $C_1, C_1 + C_2$; б) наименьшее значение функционала (1.20).

Рассмотрим способ нахождения полюсов трансформанты дополнительной информации $\tilde{f}(p)$. Дополнительная информация на торце стержня $f(\tau)$ измеряется в некотором наборе точек. В случае заданной в работе тепловой нагрузки торцевая температура монотонно растет от нуля и со временем выходит на некоторое предельное значение. Аппроксимируем функцию $f(\tau)$ на некотором временном отрезке $[a, b]$ в виде следующей монотонно возрастающей функции:

$$f(\tau) \approx 1 + b_1 e^{p_1 \tau} + b_2 e^{p_2 \tau}, \quad (3.4)$$

где p_1, p_2, b_1, b_2 – отрицательные вещественные числа.

Проведем измерение дополнительной информации в моменты времени $\tau_i = \tau_1 + (i - 1)\Delta\tau, i = 1..5$. Введем величины $v_i = f(\tau_i) - f(\tau_{i+1})$. Тогда показатели p_1, p_2 можно найти по формуле [3]

$$p_j = \frac{1}{\Delta\tau} \ln z_j, \quad (3.5)$$

где z_j – корни квадратного уравнения

$$z^2 - uz + v = 0,$$

$$u = \frac{v_1 v_4 - v_2 v_3}{d}, \quad v = \frac{v_2 v_4 - v_3^2}{d}, \\ d = v_1 v_3 - v_2^2.$$

Рассмотрим применение двух способов нахождения начального приближения на примере различных функций – возрастающей, убывающей, немонотонной.

Пример. Найдем начальное приближение $c^0(z)$ для восстановления функции $\bar{c}(z) = e^z$.

В работе натурный эксперимент заменен вычислительным. Был определен информативный отрезок $[0, 1; 0, 5]$, на котором погрешность аппроксимации функции $f(\tau)$ не превышала 1%. Торцевая температура $f(\tau)$ определялась в пяти точках $\tau_i = 0, 1i, i = 1, \dots, 5$.

Таблица 1. Сравнение двух подходов нахождения начального приближения для различных функций

Функция	Начальное приближение	
	Первый подход	Второй подход
$\bar{c}(z) = 1,5z^2 + 2$	$1,95 + 1,45z$	$2,01 + 1,47z$
$\bar{k}(z) = \cos(z)$	$1 - 0,35z$	$1,03 - 0,36z$
$\bar{c}(z) = 2,1z^3 - 2,5z^2 + 1$	$1 - 0,55z$	$0,99 - 0,54z$
$k(z) = 2,5 + \sin(\pi z)$	$2,95 + 0,05z$	$3,03 + 0,05z$

При использовании первого подхода из априорной информации выяснено, что $1 \leq \bar{c}(z) \leq 2,72$. Следовательно, областью изменения коэффициентов C_1, C_2 является система неравенств $1 \leq C_1 \leq 2,72$, $1 - C_1 \leq C_2 \leq 2,72 - C_1$. Разбив эту область на сетку с шагом 0,05, перебирая пары чисел (C_1, C_2) , находим те из них, которые доставляют минимальное значение функционалу (1.20). В результате поиска получаем $C_1 = 1,05$, $C_2 = 1,50$.

При использовании второго подхода находим сначала показатели экспонент $p_1 = -1,2$, $p_1 = -12,6$ функции (3.4), которые приближенно равны полюсам функции (3.3). После подстановки в качестве значений параметра преобразования Лапласа p найденных значений p_1 и p_2 в выражение $B(p) = 0$ получаем систему квадратных уравнений относительно C_1, C_2 :

$$0,01C_2^2 + 0,042C_1C_2 - 0,5C_2 + 0,035C_1^2 - 0,73C_1 + 1,37 = 0, \quad (3.6)$$

$$1,29C_2^2 + 4,86C_1C_2 - 5,32C_2 + 3,97C_1^2 - 7,77C_1 + 1,37 = 0. \quad (3.7)$$

Решением системы уравнений (3.6), (3.7) являются пары чисел: $(1,02; 1,47)$, $(7,71; -8,26)$, $(-0,34 \cdot 10^{11}; 0,41 \cdot 10^{11})$, $(0,18 \cdot 10^{11}; -0,47 \cdot 10^{11})$. Всем критериям отбора удовлетворяет только одна пара $(1,02; 1,47)$.

Для нахождения начального приближения коэффициента теплопроводности были выполнены действия, аналогичные действиям по определению начального приближения удельной теплоемкости.

В табл. 1 представлены результаты нахождения начального приближения для различных законов изменения удельной теплоемкости и коэффициента теплопроводности.

Как видно из приведенных примеров, значения пар чисел (C_1, C_2) , найденных двумя

способами отличаются друг от друга в равномерной метрике не более, чем на 3%. В то же время применение второго способа дает значительный выигрыш по затратам машинного времени и не требует знания априорной информации о наибольшем и наименьшем значениях восстанавливаемых коэффициентов. Кроме того, проекционный метод можно в дальнейшем использовать для нахождения начального приближения функций нескольких переменных.

4. Результаты решения обратной задачи теплопроводности для стержня

В ходе вычислительных экспериментов восстанавливались законы изменения теплофизических характеристик в различных классах функций, как монотонных, так и немонотонных.

Обсуждено влияние на точность реконструкции зашумления входной информации, которое моделировалось с помощью соотношений

$$f_\beta(\tau) = f(\tau)(1 + \beta\gamma), \quad (4.1)$$

где β — амплитуда зашумления, γ — случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке $[-1, 1]$.

При отсутствии зашумления входной информации относительная погрешность реконструкции монотонных функций не превосходила 3 %, а немонотонных — 7 %. При наличии зашумления погрешность реконструкции увеличивалась с ростом β , но даже при 2%-м шуме, моделирующем измерительную погрешность, не превышала 10 %.

На рис. 1, 2 представлены результаты реконструкции теплофизических характеристик немонотонных функций при отсутствии зашумления входной информации, при этом сплошной линией изображен точный закон неоднородности, точками — восстановленный.

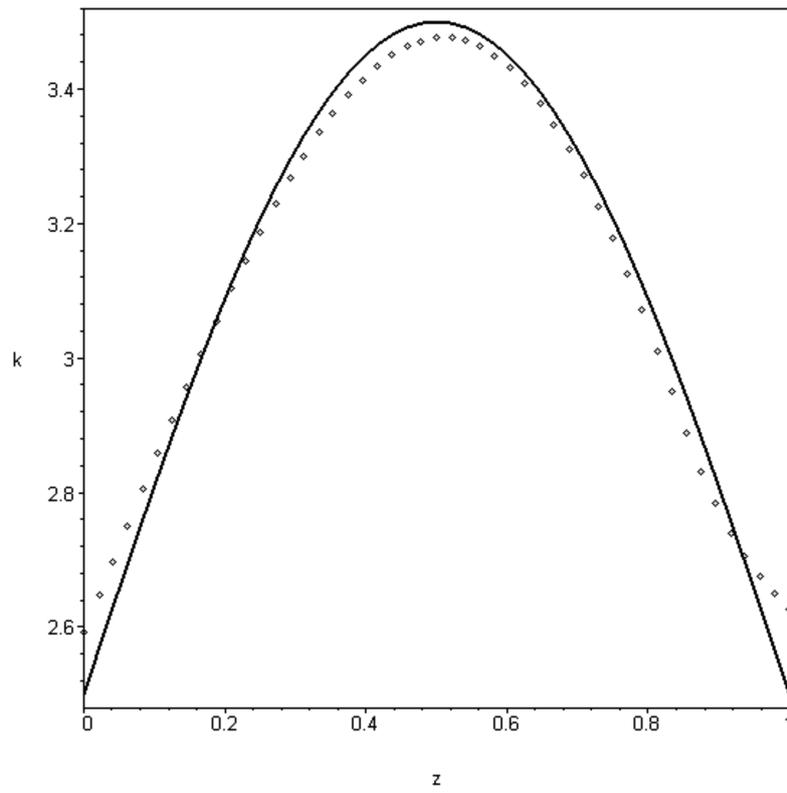


Рис. 1. Результат реконструкции коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z) = 2,5 + \sin(\pi z)$

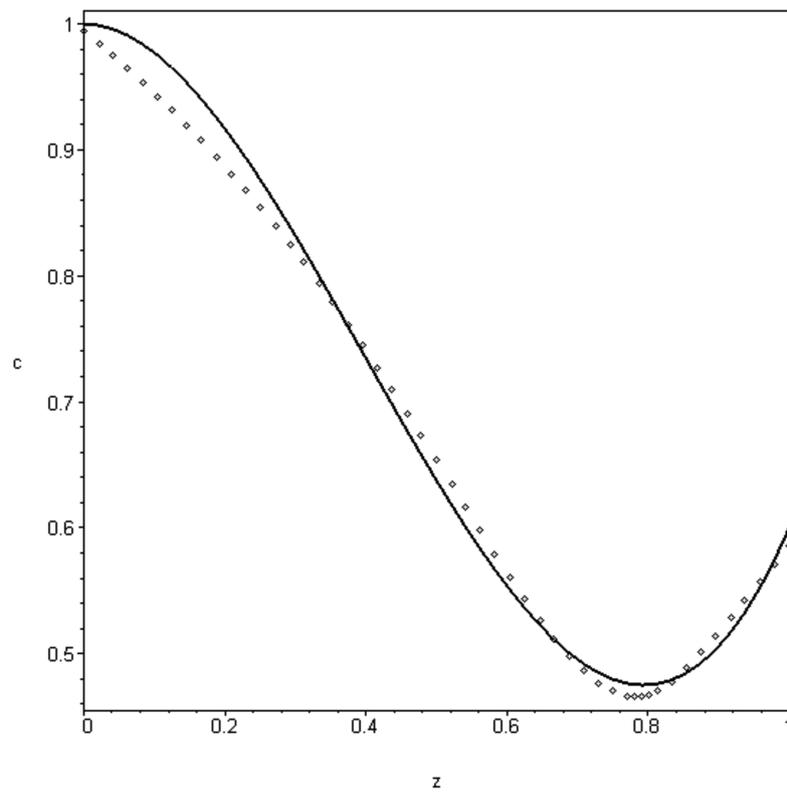


Рис. 2. Результат реконструкции удельной теплоемкости $\bar{c}(z) = 2,1z^3 - 2,5z^2 + 1$

Таблица 2. Результаты реконструкции функции $\bar{c}(z) = 1,5z^2 + 2$

Координата z	Точное значение	Вычисленное значение		Относительная погрешность реконструкции, %	
		Без шума	2%-й шум	Без шума	2%-й шум
0	2,00	2,02	2,04	1,0	2,0
0,1	2,01	2,03	2,05	1,0	2,0
0,2	2,06	2,09	2,12	1,45	2,9
0,3	2,13	2,16	2,18	1,41	2,35
0,4	2,24	2,27	2,31	1,34	3,13
0,5	2,37	2,40	2,45	1,27	3,37
0,6	2,54	2,58	2,62	1,57	3,15
0,7	2,73	2,76	2,79	1,1	2,2
0,8	2,96	3,01	3,07	1,7	3,71
0,9	3,21	3,26	3,36	1,56	4,67
1,0	3,50	3,58	3,71	2,28	6,0

На рис. 1 показан результат реконструкции функции $\bar{k}(z) = 2,5 + \sin(\pi z)$. Потребовалось 12 итераций. Погрешность реконструкции не превысила 7%. На рис. 2 показан результат реконструкции функции $\bar{c}(z) = 2,1z^3 - 2,5z^2 + 1$. Потребовалось 10 итераций. Погрешность реконструкции не превысила 4%.

В табл. 2 приведен сравнительный анализ значений функции $\bar{c}(z) = 1,5z^2 + 2$ и результатов ее реконструкции при отсутствии зашумления входной информации и при наличии 2%-го шума.

Из анализа табл. 2 следует, что максимальная погрешность реконструкции функции $\bar{c}(z) = 1,5z^2 + 2$ при 2%-м шуме не превышает 6%, т.е. процедура реконструкции оказалась устойчива к зашумлению входной информации.

Заключение

Приведена постановка обратной задачи об идентификации неоднородных теплофизических характеристик стержня по данным измерений температуры на торце стержня. На основе слабой постановки и метода линеаризации получены интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода, позволяющие построить итерационный процесс для решения поставленной обратной задачи. Рассмотрено два способа определения начального приближения в простых классах функций. Первый способ основан на использовании априорной информации о границах изменения теплофизических характеристик и на нахождении ми-

нимального значения функционала невязки. Второй способ основан на использовании проекционного метода Галеркина. Выяснено, что значения начального приближения, найденного двумя способами, отличаются друг от друга не более, чем на 3%. В то же время применение второго способа дает значительный выигрыш по затратам машинного времени и не требует знания априорной информации о наибольшем и наименьшем значении восстанавливаемых коэффициентов. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению законов изменения теплофизических характеристик в классах тригонометрических, степенных, показательных и логарифмических функций, как монотонных, так и немонотонных. Выяснено, что процедура реконструкции устойчива к зашумлению входной информации: максимальная погрешность реконструкции при 2%-м шуме не превышает 10%.

Литература

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
3. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
4. Kravaris C., Seinfeld J.H. Identification of spatially varying parameters in distributed parameters systems by discrete regularization // Journal of Math. Analysis and Applications. 1986. Vol. 119. P. 128–152.

DOI: 10.1137/0323017

5. Chen W.L., Chou H.M., Yang Y.C. An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder // *Composites: Part B*. 2013. Vol. 50. P. 112–119.
 6. Kabanikhin S.I., Hasanov A., Penenko A.V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // *Numerical Anal. Appl.* 2008. No. 1. P. 34–45. DOI: 10.1134/S1995423908010047
 7. Hao D.N. *Methods for inverse heat conduction problems*. Frankfurt/Main: Peter Lang Pub. Inc. 1998. 249 p.
 8. Isakov V., Bindermann S. Identification of the diffusion coefficient in a one dimensional parabolic equation // *Inverse Problems*. 2000. No. 6. P. 665–680.
 9. Raudensky M., Woodbary K.A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // *Num Heat transfer B*. 1995. Vol. 28. P. 293–306.
 10. Danilaev P.G. *Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their applications*. Utrecht, Boston, Koln, Tokyo: VSP. 2001. 115 p.
 11. Lam T.T., Yeeng W.K. Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems // *J. Themophys. Heat Transf.* 1995. Vol. 9. No 2. P. 335–342.
 12. Xu M.H., Cheng J.C., Chang S.Y. Reconstruction theory of the thermal conductivity depth profiles by the modulated photo reflectance technique // *J. Appl. Phys.* 2004. Vol. 84. No. 2. P. 675–682.
 13. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. №1. С. 217–224.
 14. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *Int. J. of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. No 3. P. 767–773. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003
 15. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder // *Appl. Mathematical Modelling*. 2016. Vol. 40. Iss. 4. P. 2711–2719. DOI: 10.1016/j.apm.2015.09.078.
 16. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials // *Int. Journal of Heat and Mass transfer*. 2016. Vol. 102. P. 213–218. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027
 17. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1990. 230 с.
- ### References
1. Alifanov, O.M., Artukhin, O.M., Rummyantsev, S.V. *Extreme methods for solving ill-posed problems*. Nauka, Moscow, 1988. (In Russian)
 2. Denisov, A.M. *Introduction to the theory of inverse problems*. MSU, Moscow, 1994. (In Russian)
 3. Vatulyan, A.O. *Inverse problems in mechanics of deformable solids*. Fizmatlit, Moscow, 2007. (In Russian)
 4. Kravaris, C., Seinfeld, J.H. Identification of spatially varying parameters in distributed parameters systems by discrete regularization. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 1986, vol. 119, pp. 128–152. DOI: 10.1137/0323017
 5. Chen, W.L., Chou, H.M., Yang, Y.C. An inverse problem in estimating the space – dependent thermal conductivity of a functionally graded hollow cylinder. *Composites. Part B*, 2013, vol. 50, pp. 112–119.
 6. Kabanikhin, S.I., Hasanov, A., Penenko, A.V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numerical Anal. Appl.*, 2008, no. 1, pp. 34–45. DOI: 10.1134/S1995423908010047
 7. Hao, D.N. *Methods for inverse heat conduction problems*. Peter Lang, Frankfurt/Main, 1998.
 8. Isakov, V., Bindermann, S. Identification of the diffusion coefficient in a one dimensional parabolic equation. *Inverse Problems*, 2000, no. 6, pp. 665–680.
 9. Raudensky, M., Woodbary, K.A., Kral, J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems. *Num Heat transfer B*, 1995, vol. 28, pp. 293–306.
 10. Danilaev, P.G. *Coefficient inverse problems for parabolic type equations and their applications*. VSP, Utrecht, Boston, Koln, Tokyo, 2001.
 11. Lam, T.T., Yeeng, W.K. Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems. *J. of Themophys. Heat Transf.*, 1995, vol. 9, no. 2, pp. 335–342.
 12. Xu, M.H., Cheng, J.C., Chang, S.Y. Reconstruction theory of the thermal conductivity depth profiles by the modulated photo reflectance technique. *J. of Appl. Physics*, 2004, vol. 84, no. 2, pp. 675–682.
 13. Vatul'yan, A.O., Nesterov, S.A. A Method of Identifying Thermoelastic Characteristics for Inhomogeneous Bodies. *J. of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 87, no. 1, pp. 225–232 (2014). DOI: 10.1007/s10891-014-1004-6
 14. Nedin, R., Nesterov, S., Vatulyan, A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 3, pp. 767–773. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003
 15. Nedin, R., Nesterov, S., Vatulyan, A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of

- functionally graded hollow cylinder. *Appl. Mathematical Modelling*, 2016, vol. 40, no. 4, pp. 2711–2719. DOI: 10.1016/j.apm.2015.09.078
16. Nedin, R., Nesterov, S., Vatulyan, A. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded materials. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 102, pp. 213–218. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027
17. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V., Yagola, A.G. *Numerical methods for solving ill-posed problems*. Nauka, Moscow, 1990. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2018

© Ватульян А. О., Нестеров С. А., 2018

Статья поступила 29 января 2018 г.