Ф и з и к а

УДК 51.37

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

A MODIFIED VARIATIONAL ALGORITHM FOR DATA ASSIMILATION OF MEASUREMENTS IN MODELS OF TRANSPORT OF PASSIVE ADMIXTURE

Kochergin V. S. , Kochergin S. V.

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia
e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. In one-dimension transport model of passive admixture with the input parameters used in the model for the Azov sea is considered a modified variational algorithm for identifying the initial concentration fields of pollutants. The algorithm of data measurements assimilation based on the minimization of a quadratic coast functional of the prediction, characterizing deviation of the model solution from measurement data. Transport model of a passive admixture acts as limiters on variation of input parameters. The paper also compare the modified approach with the classical variational algorithm of identification of initial fields concentration. The field was found in good agreement with the known initial field as by location and total concentration of admixtures in the initial field. Modified assimilation algorithm of data measurement based on the evaluation method and the decision a series of adjoint tasks that can significantly reduce the processor time due to solving the problem of identification. This approach allows for the implementation of the algorithm in parallel. As a result of numerical experiments shown that the modified algorithm allows for more operational identify initial fields of concentration of pollutants. In General, numerical experiments have shown a reliable performance of the considered algorithms. The results can be used to solve various tasks of environmental directionally due to studying the effect of pollution sources of anthropogenic nature in the waters of the Azov and Black seas.

Keywords: modified variational method, identification of input parameters the model of transport of passive admixture, the spread of pollution, assimilation of measurement data.

Введение

Современное развитие вычислительной техники предоставляет исследователям широкие возможности для решения сложных численных моделей, требующих больших объемов вычислений. Дополнительное преимущество дают многопроцессорные вычислительные системы при интегрировании численных моделей и реализации алгоритма ассимиляции. Выбор методов и построение алгоритмов реализации параллельных вычислений является сложной задачей, требующей индивидуального подхода. В данной работе для этих целей используется способ оценки [1], основанный на методе сопряженных уравнений [2].

1. Метод сопряженных уравнений, формула оценки

Рассмотрим модель переноса пассивной примеси [3–5] в σ-координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + LC = 0 \qquad (1.1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma: \ \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \qquad (1.2)$$

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник, отдела морских информационных систем и технологий, Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 :\ \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \\ \sigma = -1 :\ \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

и начальными данными

$$C\left(x, y, \sigma, 0\right) = C_0\left(x, y, \sigma\right), \tag{1.4}$$

где

$$L = \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D}{\partial x} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma},$$

$t \in [0, T]$ — время; D — динамическая глубина; C — концентрация примеси; U, V, W — компоненты поля скорости; A_H и K — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно; $\mathbf{n}$ — нормаль к боковой границе, Γ — граница области M; $M_t = M \times [0, T]$.

Для (1.1)–(1.4) поставим сопряженную задачу

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} + L^* C^* = 0, \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \Gamma :\ \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 :\ \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ \sigma = -1 :\ \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$t = T :\ C^* = h, \tag{1.7}$$

где L^* — оператор, формально сопряженный оператору L.

Умножая (1.1)–(1.4) на C^* и, интегрируя по частям с учетом аналога уравнения неразрывности и (1.5)–(1.7), получим

$$\int\limits_M hC \, \mathrm{d}M = \int\limits_M C_0 C^* \, \mathrm{d}M. \tag{1.8}$$

Выберем h в виде

$$h = \begin{cases} 1/m\left(\Omega\right), & \text{в области } \Omega, \\ 0, & \text{вне области } \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

где m — мера некоторой области $\Omega \in M$. При этом в левой части выражения (1.8) получаем среднюю концентрацию $\bar{C}_T$ в Ω на момент времени T.

Выбрав в качестве Ω ячейку расчетной сетки имеем

$$\bar{C}_T = \int\limits_M C_0 C^* \, \mathrm{d}M. \tag{1.10}$$

Таким образом, используя решение сопряженной задачи (1.5)–(1.7), по формуле (1.10) можно оценить концентрацию примеси в заданной ячейке. Численные эксперименты, проведенные в работах [1, 5], показали хорошую точность воспроизведения поля концентрации по начальным данным и решению серии сопряженных задач без интегрирования основной модели переноса.

2. Вариационный алгоритм ассимиляции

Задача ассимиляции данных измерений может производится за счет идентификации различных входных параметров на основе минимизации квадратичного функционала качества прогноза

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(P\left(C - C_{\text{изм}}\right), P\left(C - C_{\text{изм}}\right)\right)_M, \tag{2.1}$$

где P — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений. Следуя [6], получим

$$I = I_0 + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + LC, \lambda^*\right)_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, \lambda^*\right)_{\Gamma_t} + \\ + \left(C - C_0, \lambda^*\right)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, \lambda^*\right)_{\sigma_t^0} + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, \lambda^*\right)_{\sigma_t^{-1}}, \tag{2.2}$$

где скалярное произведение определяется стандартным образом. Следует отметить, что квадратичный функционал (2.1) — выпуклый, а ограничения (1.1)–(1.4) линейные, следовательно функционал (2.2) также выпуклый, имеющий единственный минимум. Записывая вариацию функционала (2.2) и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности, выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей задачи:

$$-\frac{\partial D\lambda^*}{\partial t} + L^* \lambda^* = 0, \tag{2.3}$$

$$\Gamma: \ \frac{\partial \lambda^*}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \sigma = 0: \ \frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = 0, \qquad \sigma = -1: \ \frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = 0, \tag{2.4}$$

$$t = T: \ \lambda^* = P\left(C_{\text{изм}} - \mathrm{C}\right). \tag{2.5}$$

Тогда при идентификации начального поля имеем

$$\nabla_{\mathrm{C}_0} I = \left.\lambda^*\right|_{t=0}. \tag{2.6}$$

Итерационный спуск осуществляется по формуле

$$\mathrm{C}_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{\mathrm{C}_0} I, \tag{2.7}$$

где τ — итерационный параметр, отыскиваемый с учетом решения задачи в вариациях по формуле

$$\tau = \frac{\left(P\left(C - C_{\text{изм}}\right), P\delta C\right)_M}{\left(P\delta C, P\delta C\right)_M}. \tag{2.8}$$

Здесь $\delta\mathrm{C}$ — решение следующей задачи в вариациях

$$\frac{\partial D \delta \mathrm{C}}{\partial t} + L\delta\mathrm{C} = 0, \tag{2.9}$$

$$\Gamma: \ \frac{\partial \delta \mathrm{C}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \tag{2.10}$$

$$\sigma = 0: \ \frac{\partial \delta \mathrm{C}}{\partial \sigma} = 0, \qquad \sigma = -1: \ \frac{\partial \delta \mathrm{C}}{\partial \sigma} = 0. \tag{2.11}$$

Начальные данные имеют вид

$$\delta\mathrm{C}\left(x, y, \sigma, 0\right) = \lambda^*\left(x, y, \sigma, 0\right). \tag{2.12}$$

3. Модифицированный вариационный алгоритм

Чаще всего данные измерений имеются не во всех узлах области интегрирования, поэтому количество требуемых сопряженных задач для формулы оценки (1.10) существенно сокращается, так как оценка значений поля концентрации осуществляется только в точках измерений. Можно показать, что модифицированный алгоритм имеет преимущество перед стандартным подходом при выполнении следующего условия:

$$R > \frac{k}{2J}, \tag{3.1}$$

где J — общее число итераций, необходимое для достижения минимума функционала, k — количество данных измерений, а R — количество используемых процессоров.

Таким образом, модифицированный алгоритм состоит в следующем:

– решается k сопряженных задач (1.5)–(1.7), где k — количество точек измерений;

– по формуле (1.10) осуществляется оценка концентрации в точках измерений (вместо интегрирования модели (1.1)–(1.4);

– в точках измерений вычисляются невязки прогноза и строится функционал (2.1);

– решается сопряженная задача (2.3)–(2.5);

– строится градиент функционала по формуле (2.6);

– вместо интегрирования задачи в вариациях осуществляется оценка по формуле

$$\delta\bar{\mathrm{C}} = \int\limits_M \lambda_0^* C_0^* dM, \tag{3.2}$$

где C_0^* — решение задачи (1.5)–(1.7), а λ_0^* — решение задачи (2.3)–(2.5);

– итерационный параметр определяется по формуле

$$\tau = \frac{\left(P\left(\bar{C} - C_{\text{изм}}\right), P\delta\bar{C}\right)_M}{\left(P\delta\bar{C}, P\delta\bar{C}\right)_M}. \tag{3.3}$$

4. Результаты численных экспериментов

Для наглядности и лучшего понимания сути алгоритма численные эксперименты проводились с одномерной моделью переноса пассивной примеси при следующих значениях входных параметров: $k = 2{,}5 \cdot 10^5$ см^2/с, $\Delta x = 10^5$ см, $\Delta t = 1{,}2 \cdot 10^2$ с, количество шагов по времени 3600, — которые соизмеримы с входной информацией при интегрировании трехмерной модели [5] для акватории Азовского моря.

В качестве начального поля концентрации задавалось постоянное значение равное единице в десяти точках расчетной сетки, которое изображено на рис. 1 штриховой линией. Площадь, ограниченная данной фигурой $S = 10$. Результат работы модели (1.2) приведен на рис. 1 сплошной жирной линией. В качестве данных измерений выбирались значения поля концентрации как в области максимальных, так и минимальных значений (белые квадраты на рис. 1). Проинициализированное начальное поле на основе стандартного вариационного метода изображено на рис. 1 пунктирной линией, а тонкой сплошной линией представлен результат, полученный

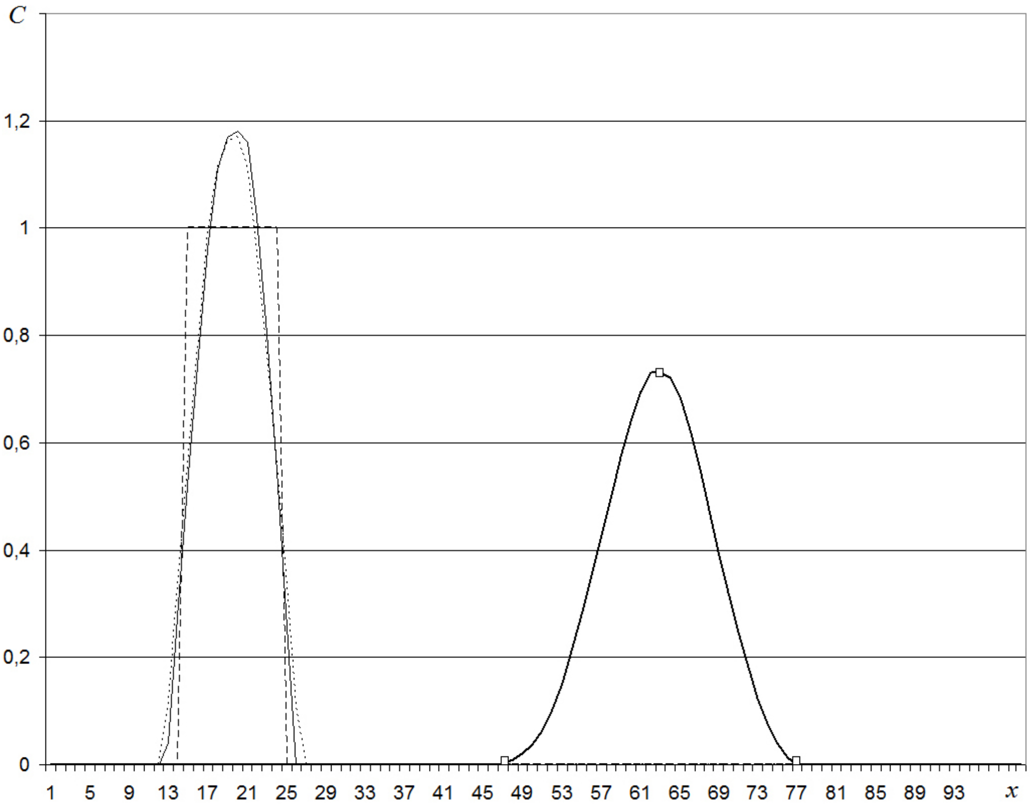

Рис. 1. Данные измерений, истинное и инициализированные начальные поля

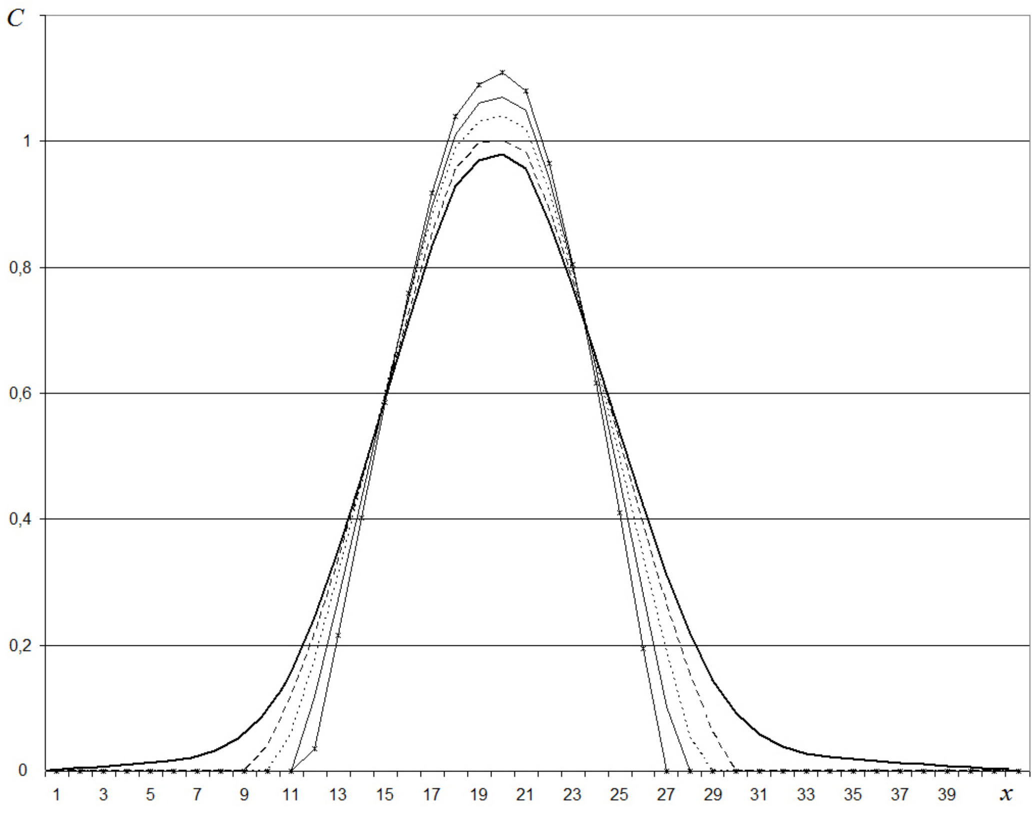

Рис. 2. Проинициализированное начальное поле в зависимости от номера итерации

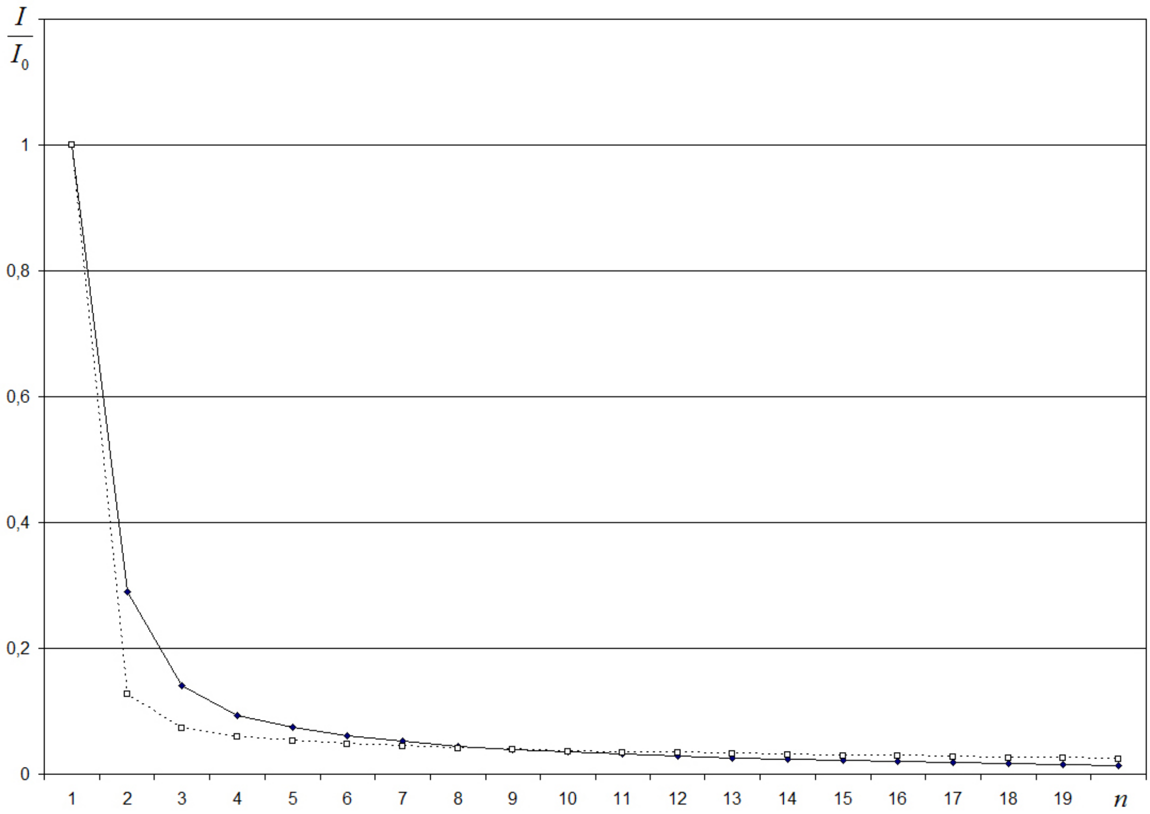

Рис. 3. Падение нормированного функционала качества прогноза в зависимости от номера итерации

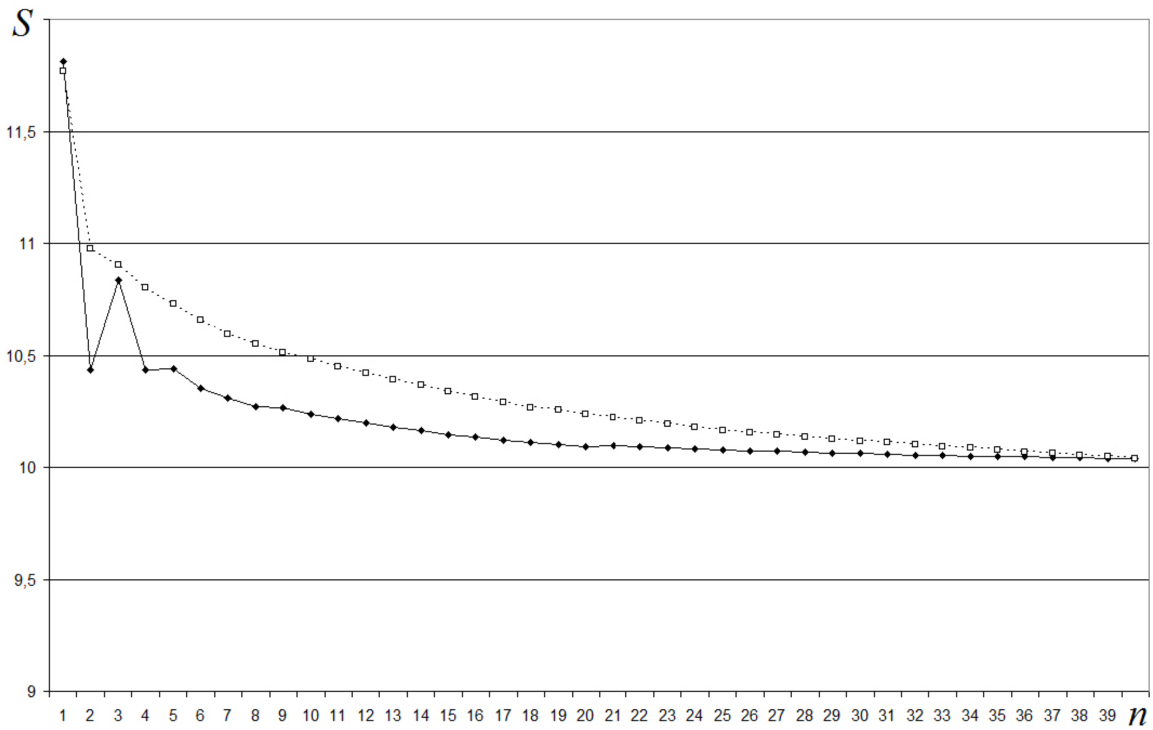

Рис. 4. Значения суммарной концентрации в зависимости от номера итерации

при помощи модифицированного алгоритма идентификации. Рис. 2 характеризует проинициализированное начальное поле при первой (жирная сплошная линия), второй (штриховая), пятой (пунктирная), десятой (тонкая сплошная) и двадцатой (линия с крестами) итерации.

Рис. 3 характеризует падение нормированного на его начальное значение квадратичного функционала качества прогноза в случае реализации стандартного вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений (сплошная линия) и в случае применения модифицированной процедуры идентификации начального поля концентрации. Из рисунка видно, что на первых итерациях модифицированный алгоритм обладает даже большей скоростью сходимости итерационного процесса. В дальнейшем скорости сходимости у обоих методов идентичны. При численной реализации обоих алгоритмов производилось слежение за интегральной характеристикой S, характеризующей суммарную концентрацию примеси в начальном поле.

На рис. 4 изображено поведение этой характеристики в результате итераций. Сплошная линия изображает S при реализации стандартного подхода, а пунктирная линия показывает поведение этой важной интегральной характеристики при инициализации начального поля с помощью модифицированного подхода. В процессе итераций оба алгоритма дают сравнимые результаты и по этой характеристике. При необходимости после проведения основных расчетов на основе модифицированного алгоритма может быть осуществлена корректировка при помощи стандартного подхода. При этом преимущества при реализации модифицированного алгоритма полностью сохраняются — это прежде всего процессорное время, необходимое для решения поставленной задачи.

Таким образом, в результате численных экспериментов показано, что модифицированный алгоритм позволяет более оперативно осуществлять идентификацию начальных полей концентрации загрязняющих веществ в море. При этом сохраняется точность воспроизведения начального поля концентрации как по значениям, так и по его местоположению. Аналогичным образом может быть решена задача идентификации мощности источника загрязнения.

Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Литература

1. *Кочергин В.С.* Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач. В сб. «Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа». Севастополь: МГИ НАНУ, 2011. Вып. 25, Т. 2. С. 270–376.
2. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М. Наука, 1982. 320 с.
3. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.
4. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма // Морской гидрофизический журнал, 2015, №2. С. 79–88.
5. *Кочергин С.В., Кочергин В.С., Фомин В.В.* Определение концентрации пассивной примеси в Азовском море на основе решения серии сопряженных задач. В сб. «Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа». Севастополь: МГИ НАНУ, 2012. Вып. 26. Т. 2. С. 112–118.
6. *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 350 с.

References

1. Kochergin, V.S. Determination of the passive admixture concentration field from the initial data on the basis of the solution of the conjugate problems. In: *Ecological safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources.* MGI NANU, Sevastopol, 2011, vol. 2, iss. 25, pp. 270–376. (In Russian)
2. Marchuk, G.I. *Mathematical modeling in the environmental problem.* Nauka, Moscow, 1982. (In Russian)
3. Ivanov, V.A., Fomin, V.V. *Mathematical modeling of dynamic processes in the sea – land zone.* EHKOSI-gidrofizika, Sevastopol, 2008. (In Russian)
4. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Identification of the source of pollution in the Kazantip Bay based on the application of the variational algorithm. *Morskoj gidrofizicheskij zhurnal* [Marine

Hydrophysical Journal], 2015, no. 2, pp. 79–88. (In Russian)

5. Kochergin, S.V., Kochergin, V.S., Fomin, V.V. Determination of the concentration of a passive admixture in the Azov Sea on the basis of solving a series of conjugate problems. In: *Ecological safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources.* MGI NANU, Sevastopol, 2012. vol. 2, iss. 26, pp. 112–118. (In Russian)
6. Penenko, V.V. *Methods of numerical modeling of atmospheric processes.* Gidrometeoizdat, Lenigrad, 1981. (In Russian)

Статья поступила 24 января 2018 г.