

МАТЕМАТИКА

УДК 510.67:554

doi: 10.31429/vestnik-15-2-5-11

К КЛЕТОЧНО-АВТОМАТНЫМ МОДЕЛЯМ
НА ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТКАХ

Рубцов С. Е., Павлова А. В., Родионов П. Р.

TO CELLULAR AUTOMATA MODELS ON TRIANGULATION GRIDS

S. E. Rubtsov, A. V. Pavlova, P. R. Rodionov

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

Abstract. The paper deals with cellular automata on triangulation grids, which allow modeling of three-dimensional processes on curvilinear surfaces in terms of cellular automata. This approach can serve as a basis for modeling various phenomena, not limited to diffusion processes. The results of computational modeling show that the realized cellular automata are not inferior qualitatively to CA on rectangular grids and at the same time allow modeling processes on surfaces of complex geometry.

The authors created an application that implements on the various surfaces the CA a model of naive diffusion that interprets the process as a chaotic movement of particles, resulting in an equalization of the impurity concentration in the introduced cellular space. There is a transition from Boolean values to continuous functions describing the impurity concentration field, produced by averaging over neighboring cells.

The described approach can be generalized for constructing cellular automata on different curvilinear surfaces with a pronounced nonlinearity using an arbitrary triangulation grid. The obtained results can be applied to construct more complex composite CA, including the interpretation of several phenomena, among which diffusion is present.

Keywords: cellular automata, triangulation, diffusion, curvilinear surface.

Введение

В конце XX в. благодаря разработке новых моделей вычисления возрос интерес к клеточным автоматам [1–5], общие принципы построения которых сформулированы в [1]. КА модели и в настоящее время привлекают внимание многих исследователей и активно развиваются в плане применения их к моделированию различных биологических и физико-химических процессов, среди которых традиционно можно выделить диффузионно-реакционные [6–11].

Клеточный автомат имитирует динамику (движение, самоорганизацию, трансформации) частиц в дискретных времени и пространстве и представляется множеством клеток, каждая из которых функционирует как конечный автомат, названный элементарным [1–4 и др.].

Изменение состояния элементарного автомата определяется состоянием заданных близлежащих клеток (клеток-соседей) по единому алгоритму. В результате изменяется глобальная конфигурация клеточного автомата — распределение состояний конечных автоматов. Итерационный процесс смены конфигураций называют эволюцией КА, моделирующей пространственную динамику в результате совместной работы элементарных автоматов.

Одним из факторов развития и распространения КА моделей стало появления многопроцессорных высокопроизводительных компьютеров и сетевых вычислительных технологий, которые позволили реализовать автоматы больших размеров.

Разработка и широкое внедрение алгоритмов параллельного программирования стимулируют интерес к клеточно-автоматным

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: rub_serg@mail.ru.

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Родионов Павел Рольданович, студент магистратуры кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и Администрации Краснодарского края 16-41-230175 p_a.

моделям наряду с развитием вычислительной техники.

В данной работе рассматриваются клеточные автоматы на триангуляционных сетках, которые в отличие от КА, построенных на прямоугольных сетках, позволяют моделировать трехмерные КА процессы на криволинейных поверхностях.

1. Моделирование процессов диффузии с помощью клеточных автоматов на триангуляционных сетках

На основе дискретных моделей, использующих булеву алгебру, в настоящее время разрабатывается большое количество моделей различных процессов и систем, область применения которых продолжает расширяться. Используемые подходы, рассматривающие системы одинаковых конечных автоматов, определяемых координатами клеток, множеством состояний и локальным оператором, задающим функционирование КА, позволяют с помощью простых функций перехода одного конечного автомата представить сложные процессы [9–13]. Дискретное моделирование может применяться в качестве альтернативы (при моделировании сложных нелинейных процессов), когда использование математических моделей, основанных на дифференциальных уравнениях, затруднительно, или дополнения к хорошо зарекомендовавшим себя моделям и традиционно применяемым численным методам.

Ранее авторами были реализованы двумерные и пространственные КА-модели рассеяния и трансформации субстанций [11,12], а также течения жидкости при наличии препятствий и переносимых потоком примесей [13]. В данной работе КА-алгоритм диффузии реализован с использованием триангуляционных сеток.

При разработке клеточно-автоматных моделей прямоугольные сетки получили наибольшее распространение. Но построение моделей процессов миграции субстанций в приповерхностном слое почвы, диффузии вещества в биологических тканях и пр. требует порой учета формы поверхности. В таких случаях применение триангуляционных сеток, позволяющих строить системы непересекающихся треугольников с вершинами в опорных точках поверхности, является более предпочтительным. Альтернатива в виде триангуляционных сеток имеет существенные преимущества, так как алгоритмы разбиения на

треугольники имеют меньшую вычислительную сложность, нежели при использовании других полигонов.

Рассмотрение КА-моделей на различных триангуляционных сетках позволяет имитировать сложные диффузионные и агрегационные процессы, моделируемые совместной работой множества простых вычислителей, на криволинейных поверхностях в трехмерном пространстве [1].

Рассмотрим простейший клеточный автомат, реализованный на сетке из треугольников, покрывающей произвольную поверхность. Каждому треугольнику из триангуляции соответствует простой вычислитель (конечный автомат), принимающий значение 0 (примесь в клетке отсутствует) или 1 (клетка содержит частицу примеси). В качестве реализуемой на триангуляционной сетке КА-модели диффузии выбрана модель «наивной» диффузии [2], которая интерпретирует процесс как хаотичное перемещение частиц, приводящее в итоге к выравниванию концентрации примеси во введенном клеточном пространстве.

Рассматриваемая область пространства представляется клеточным массивом Ω с множеством имен $M = \{m_i : i = 1, \dots, N\}$. При этом задан алфавит состояний: $A = \{0,1\}$ — булев алфавит. Каждой клетке ставится в соответствие пара (a, m) , где $a \in A$, $m \in M$, именуемая в дальнейшем состоянием клетки и обозначаемая также $a(m)$. В клеточном пространстве конечных размеров $\Omega = \{a(m), m : m \in M\}$ определены подмножества, называемые шаблоном соседства для клетки (a, m) , включающие близлежащие клетки. При использовании триангуляционных сеток клетки считаются соседями (a, m_0) в случае, если треугольники, соответствующие этим клеткам, имеют с нею общую сторону (рис. 1) [9]. Каждый треугольник сетки может иметь не более трех соседей, при этом число соседей может быть меньше трех (для граничных клеток).

На множестве клеточных имен введены так называемые именующие функции $f(m) : M \rightarrow M$, определяющие для любой клетки (a, m_0) одну из ее ближайших соседей: $m_j = f_j(m_0)$, $j = \overline{1,3}$. Тогда шаблон соседства можно задать в виде конечного множества именующих функций: $T = \{m_0, f_1(m_0), f_2(m_0), f_3(m_0)\}$. Нумерация клеток в шаблоне, определенном с помощью именующих функций, может быть любой. При этом принято считать, что $f_0(m_0) = m_0$.

Рис. 1. Вид шаблона соседства клетки (a, m_0)

При моделировании наивной диффузии режим функционирования КА асинхронный, т.е. за глобальную итерацию КА $\Omega(t) \rightarrow \Omega(t+1)$ правило перехода будет последовательно применено в случайном порядке для каждого элемента клеточного массива. Правило перехода формулируется следующим образом: клетка меняется своим значением с одной и соседствующими ячейками, при этом вероятность обмена обратно пропорциональна площади соседа.

2. Результаты программной реализации

Для проведения вычислительных экспериментов создано приложение с использованием средств программирования 3D графики — OpenGL, реализующее КА модель наивной диффузии на различных триангуляционных сетках.

В начальный момент времени иницируется условный источник примеси, для этого некоторое количество соседствующих клеток получает состояние «1». Поскольку функционирование КА происходит в асинхронном режиме, на каждой глобальной итерации случайным образом формируется порядок из всех клеток, в котором будет осуществляться их переход в новое состояние.

В качестве одного из примеров рассмотрена эволюция КА, моделирующего процесс диффузии на равномерной плоской триангуляционной сетке. Смена последовательных состояний КА осуществляется путем случайного равновероятного выбора соседнего элемента, с которым клетка будет обмениваться своим состоянием. Тестирование работы клеточного автомата проводилось для булева алфавита, результаты работы КА за 100, 200 и 300 итераций показаны на рис. 2.

Рис. 2 иллюстрирует равномерное распространение частиц во все стороны, как и в случае использования прямоугольной сетки. В работе [9] проведено сравнение работы двумерных КА, реализующих наивную диффузию, на прямоугольных и триангуляционных сетках и сформулированы правила функци-

онирования клеточного автомата для произвольной сетки. В настоящей работе для криволинейных областей применен тот же подход.

В программе предусмотрен переход от булевых значений к непрерывным функциям распределения примеси, производимый посредством осреднения значений состояний клеток автомата по задаваемой пользователем окрестности.

Существуют различные алгоритмы осреднения, один из них — алгоритм осреднения по окружности. Из центра каждого треугольника проводится окружность заданного радиуса, осуществляется подсчет попавших в круг ячеек N (ячейка, в которой расположен центр окружности, считается попавшей в круг) и среди них ячеек, имеющих состояние «1» — N_1 . Среднюю концентрацию в таком случае можно определить по формуле

$$\phi = \frac{N_1}{N}.$$

Вычислительная сложность такого алгоритма $O(n^2)$ [9], где n — количество треугольников сетки, определяет основной недостаток описанного подхода. Другой, менее требовательный к вычислительным ресурсам, подход — осреднение по ближайшим соседствующим ячейкам. В таком случае подсчет клеток с состоянием «1» производится среди заданного числа соседей по формуле

$$\phi = \frac{N_1}{N_2 + 1},$$

где $N_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Вычислительная сложность этого алгоритма составляет $O(n)$ [9], но картина получается менее наглядной, так как концентрация принимает лишь одно из семи значений $\phi \in \{0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1\}$. Результаты работы алгоритма в зависимости от числа тактов работы клеточного автомата представлены на рис. 3. Результаты осреднения будут более наглядными, если распространить алгоритм с первого на j -й уровень соседства, $j \geq 2$.

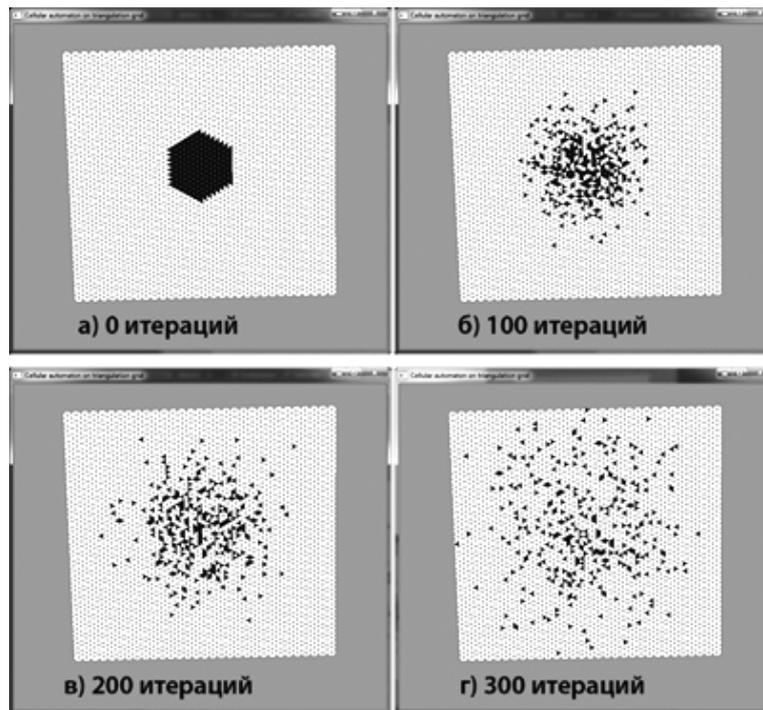


Рис. 2. Результат моделирования диффузии на плоскости

Предлагаемый алгоритм программной реализации КА-диффузии позволяет легко иллюстрировать процесс на любой поверхности. Рис. 4 демонстрирует результаты реализации клеточно-автоматной диффузии на сфере. На рис. 5 приведены результаты распределения значений концентрации вещества, полученные путем осреднения по соседству 1-го уровня для диффузии на сферической поверхности.

Описанный подход может служить основой для моделирования различных явлений, не ограничиваясь диффузионными процессами. Результаты вычислительного моделирования показывают, что реализованные клеточные автоматы не уступают качественно КА на прямоугольных сетках и при этом позволяют моделировать процессы на поверхностях сложной геометрии. Так, результат работы КА наивной диффузии на произвольной незамкнутой поверхности приведен на рис. 6. В начальный момент времени концентрация вещества (значение клетки «1») была задана на небольшом участке поверхности, рисунок соответствует 1000 итераций работы автомата.

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены клеточные автоматы на триангуляционных сет-

ках, позволяющие моделировать трехмерные процессы на криволинейных поверхностях в терминах клеточных автоматов. Кроме того, реализован переход от булевых значений к непрерывным функциям, описывающим поле концентрации примеси, производимый путем осреднения по ближайшим соседствующим клеткам.

В настоящее время нет единого подхода для построения клеточно-автоматных моделей на основе заданных параметров процесса и зачастую приходится ограничиваться качественным сходством результатов работы дискретных моделей с моделируемым явлением.

Приведенные примеры реализации КА диффузии на различных поверхностях показывают, что они естественно интерпретируют физический процесс на сложной поверхности.

Описанный подход может быть обобщен для построения клеточных автоматов на различных криволинейных поверхностях с ярко выраженной нелинейностью с использованием произвольной триангуляционной сетки. Полученные результаты могут быть применены для построения более сложных композиционных КА, включающих интерпретацию нескольких явлений, в которых одним из правил перехода будет диффузия.

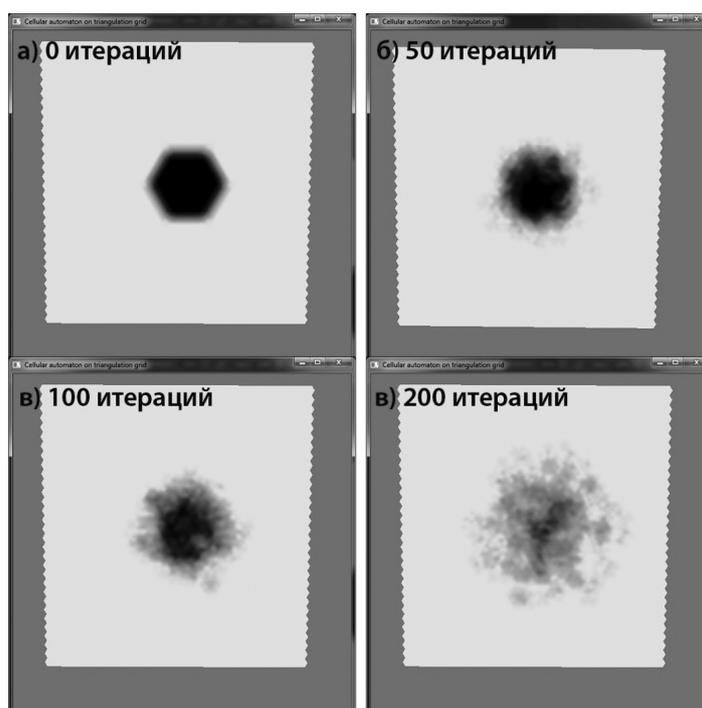


Рис. 3. Результат осреднения по ближайшим соседям

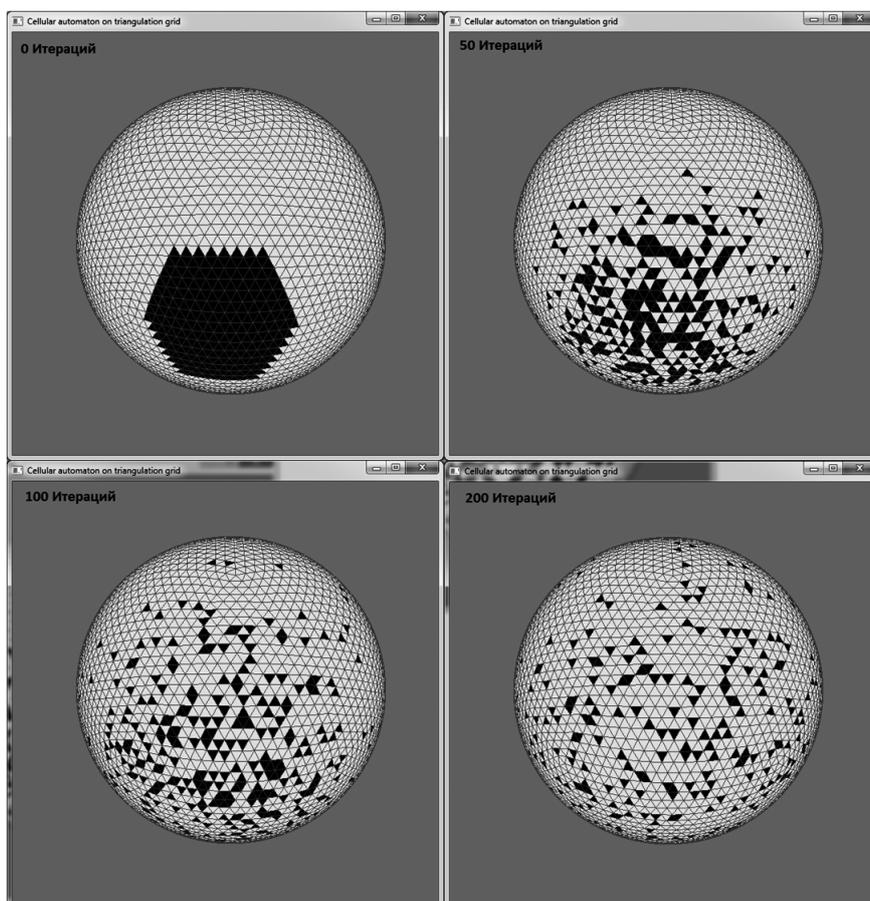


Рис. 4. Результаты реализации КА диффузии на сферической поверхности

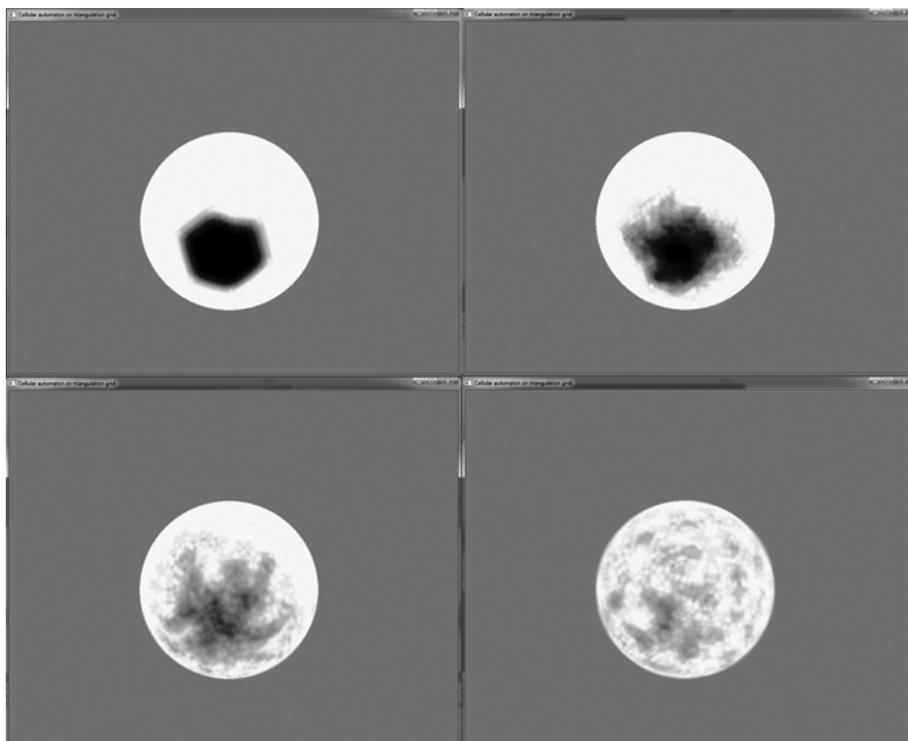


Рис. 5. Результаты осреднения по ближайшим соседям для КА диффузии на сферической поверхности

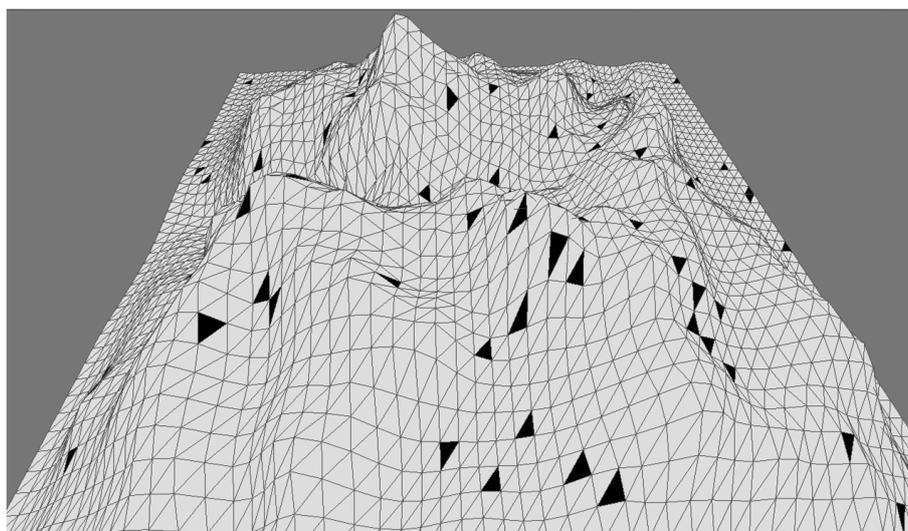


Рис. 6. Результат реализации наивной КА-диффузии на произвольной криволинейной поверхности

Литература

1. Фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971. 384 с.
2. Toffoli T. Cellular Automata as an Alternative to rather than approximation of Differential Equations in Modeling Physics // *Physica D*. 1984. Vol. 10. pp. 117–127.
3. Toffoli T., Margolus N. Cellular automata machines. USA: MIT Press, 1987. 279 p.
4. Bandman O. Comparative study of cellular automata diffusion models // *Lecture Notes in Computer Science*. 1999. Vol. 1662. P. 395–399.
5. Weimar J. Cellular automata for reaction-diffusion systems // *Parallel Computing*. 1997. Vol. 23. No. 11. P. 1699–1715.
6. Boccaro N. Reaction-Diffusion complex systems. Berlin: Springer, 2004. 397 p.
7. Bandman O. Parallel Simulation of Asynchronous Cellular Automata Evolution // *Proc. of 7th International Conference on Cellular Automata, for Research and Industry (ACRI 2006)*. 2016. Vol. 4173 of LNCS. Springer. pp. 41–47.
8. Bandman O.L. A method for construction of cellular automata simulating pattern formation processes // *Theoretical background of applied discrete mathematics*. 2010. No. 4. pp. 91–99.
9. Евсеев А.А., Нечаева О.И. Клеточно-автоматное моделирование диффузионных процессов на триангуляционных сетках // *Прикладная дискретная математика*. 2009. № 4. С. 72–83.
10. Бандман О.Л. Клеточно-автоматное моделирование пространственной динамики. Новосибирск: СО РАН, 2000. 113 с.
11. Рубцов С.Е., Павлова А.В., Сунозов А.А. К клеточно-автоматному моделированию процесса диффузии и взаимодействия субстанций // *Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе*. 2014. № 2. С. 30–34.
12. Рубцов С.Е., Павлова А.В., Савенков С.И. О клеточно-автоматных моделях конвекционно-диффузионных процессов примесей // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2016. № 2. С. 62–68.
13. Рубцов С.Е., Павлова А.В. О клеточно-автоматных моделях процесса течения жидкости при наличии препятствий и примеси // *Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе*. 2016. № 6. С. 39–44.

References

1. von Neumann, J. *The theory of self-reproducing automatas*. Mir, Moscow, 1971. (In Russian)
2. Toffoli, T. Cellular automata as an alternative to rather than approximation of differential equations in modeling physics. *Physica D.*, 1984, vol. 10, pp. 117–127.
3. Toffoli, T., Margolus, N. *Cellular automata machines*. MIT Press, USA, 1987.
4. Bandman O. Comparative study of cellular automata diffusion models. *Lecture Notes in Computer Science*, 1999, vol. 1662, pp. 395–399.
5. Weimar, J. Cellular automata for reaction-diffusion systems. *Parallel Computing*, 1997, vol. 23, no. 11, pp. 1699–1715.
6. Boccaro N. *Reaction-diffusion complex systems*. Springer, Berlin, 2004.
7. Bandman O. Parallel simulation of asynchronous cellular automata evolution. *Proc. of 7th Int. Conf. on Cellular Automata, for Research and Industry (ACRI 2006)*, 2016, vol. 4173 of LNCS. Springer. pp. 41–47.
8. Bandman O.L. A method for construction of cellular automata simulating pattern formation processes. *Theoretical background of applied discrete mathematics*, 2010, no. 4, pp. 91–99.
9. Evseev A.A., Nechaeva O.I. Cellular automata modeling of diffusion processes on a triangulation grids. *Prikladnaya diskretnaya matematika [Applied Discrete Mathematics]*. 2009. no. 4, pp. 72–83. (In Russian)
10. Bandman O.L. Cellular automata modeling of spatial dynamics. Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 2000. (In Russian)
11. Rubtsov S.E., Pavlova A.V., Sunozov A.A. To cellular-automatic modeling of the process of diffusion and substances interaction. *Zashhita okruzhajushhej sredy v neftegazovom komplekse [Environmental protection in the oil and gas sector]*, 2014, no. 2, pp. 30–34. (In Russian)
12. Rubtsov S.E., Pavlova A.V., Savenkov S.I. About cellular-automatic models of convection-diffusion processes of substances. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 4, pp. 62–68. (In Russian)
13. Rubtsov S.E., Pavlova A.V. Cellular automata models of the fluid flow process in the presence of obstacles and impurities. *Zashhita okruzhajushhej sredy v neftegazovom komplekse [Environmental protection in the oil and gas sector]*, 2016, no. 6, pp. 39–44. (In Russian)