Механика

УДК 539.422.3
doi: 10.31429/vestnik-15-2-19-23

О РАЗВИТИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В БЛОЧНО СТРУКТУРИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Лозовой В. В., Зарецкий А. Г.

ON THE DEVELOPMENT OF APPROXIMATE METHODS FOR RESEARCHING PROCESSES IN A BLOCK STRUCTURED MEDIUM

O. M. Babeshko[1], M. V. Zaretskaya[1], V. V. Lozovoy[2], A. G. Zaretskiy[1]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Centre of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: zarmv@mail.ru

Abstract. We need to consider the model of the medium as close as possible to the natural one, to apply a mathematical apparatus that adequately and reliably describes the processes and phenomena occurring in the studied medium of a complex structure in the process of creating modern systems for monitoring the geophysical medium, regulating the quality of the environment. Such a possibility is provided by methods having a topological basis, in particular, a differential factorization method. However, with strict adherence to the algorithm, the numerical evaluation of the parameters under study requires considerable time. Therefore, it is necessary to identify those moments where it is possible to proceed to an approximate solution without compromising the accuracy of the result obtained. A method is proposed for constructing approximate solutions of systems of integral equations arising in the investigation of boundary problems of the mechanics of a solid deformed body and the mechanics of continuous media by a differential factorization method for media of complex structure. The justification of the proposed conclusions for the problems posed both in Cartesian and curvilinear coordinate systems is fulfilled. As an example, the application of approximate methods in problems of assessing the quality of the aquatic environment or the atmosphere is considered. The results can be used for express forecast of the ecological state of the environment, in systems of integrated geoecological monitoring.

Keywords: medium, complex internal structure, factorization approach, pseudodifferential equation, approximate method

Современные методы регулирования качества среды, геоэкологического мониторинга, рационального природопользования предполагают широкое использование средств математического и имитационного моделирования.

В работах [1–4] были предложены новые эффективные численно-аналитические методы исследования процессов, моделируемых смешанными граничными задачами. Они базируются на теории блочных структур и факторизационном подходе. Решение задач методом блочного элемента или дифференциальным методом факторизации позволяет свести исследуемую граничную задачу к системам интегральных уравнений [5]. Проведенные расчеты как для модельных задач, так и для реальных условий показали [6,7], что при строгом следовании алгоритму дифференциального метода факторизации для блочных структур численная оценка исследуемых параметров требует значительных временных затрат. Однако экспресс-прогноз или необходимость принятия управленческих решений при нештатных ситуациях предполагает, что оценка осуществляется оперативно, а именно, в течение нескольких минут после внесения исходных данных. Поэтому в алгоритме диф-

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru.

Лозовой Виктор Викторович, канд физ.-мат. наук, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru.

Зарецкий Александр Георгиевич, студент Кубанского государственного университета; e-mail: sam_one@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №16-08-00191_а), РФФИ и администрации Краснодарского края (гранты №16-41-230154).

ференциального метода факторизации необходимо выявить этапы, где можно перейти к приближенному решению без ущерба точности полученного результата.

1. Процессы в земной коре могут описываться динамическими связанными задачами, в которых учитывается взаимодействие механических, тепловых, электромагнитных полей в деформируемых средах — моделями изотропной и анизотропной теории термоэлектроупругости, частными случаями которых являются модели для термоупругих анизотропных и изотропных сред, модели для электроупругих и пироэлектрических тел без пьезоэффекта. В системах экспресс-прогноза используются уравнения теории упругости для изотропного тела или основные уравнения для анизотропных сред, дополненные начальными и граничными условиями.

Для решения поставленной задачи применяется теория блочных структур и дифференциальный метод факторизации или метод блочного элемента [2, 4, 8].

При построении приближенных решений систем интегральных уравнений, возникающих при исследовании граничных задач механики деформируемого твердого тела и механики сплошных сред, учитываются свойства псевдодифференциальных уравнений, получаемых в ходе реализации алгоритма дифференциального метода факторизации, и свойства ядер интегральных уравнений, в частности, их асимптотические свойства.

Воспользуемся результатами работы [1] и выпишем системы псевдодифференциальных уравнений для блочной структуры механики деформируемого твердого тела, которые получаются при применении теории блочных структур и дифференциального метода факторизации в декартовой системе координат:

$$\mathbf{M}^{\nu}(\alpha_i^{\nu})\mathbf{U}^{\nu}(\alpha_i^{\nu}) - \mathbf{D}^{\nu}(\alpha_i^{\nu})\mathbf{T}^{\nu}(\alpha_i^{\nu}) + \sum_{\tau=1,\tau\neq\nu}^{T}[\mathbf{M}^{\tau}(\alpha_i^{\nu})\mathbf{U}^{\tau}(\alpha_i^{\nu}) - \mathbf{D}^{\tau}(\alpha_i^{\nu})\mathbf{T}^{\tau}(\alpha_i^{\nu})] = 0. \quad (1)$$

В (1) введены обозначения:

$$\mathrm{M}^{\nu}(\alpha_i^{\nu}) = \mathrm{M}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}));$$
$$\mathbf{U}^{\nu}(\alpha_i^{\nu}) = \mathbf{U}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}));$$
$$\mathbf{D}^{\nu}(\alpha_i^{\nu}) = \mathbf{D}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}));$$
$$\mathbf{T}^{\nu}(\alpha_i^{\nu}) = \mathbf{T}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}));$$
$$\mathrm{M}^{\tau}(\alpha_i^{\nu}) = \mathbf{M}^{\tau}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}));$$
$$\mathbf{U}^{\tau}(\alpha_i^{\nu}) = \mathbf{U}^{\tau}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}));$$
$$\mathbf{D}^{\tau}(\alpha_i^{\nu}) = \mathbf{D}^{\tau}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}));$$
$$\mathbf{T}^{\tau}(\alpha_i^{\nu}) = \mathbf{T}^{\tau}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu}, \alpha_{3r-}^{\nu}(\alpha_1^{\nu}, \alpha_2^{\nu})).$$

Остальные обозначения определены в работе [1].

Построенные в общем виде псевдодифференциальные уравнения позволяют рассматривать задачи механики деформируемого твердого тела различного типа. Если на границах заданы перемещения $\mathbf{u}_0^{\nu}$, получим систему интегральных уравнений для области относительно напряжений $\mathbf{t}_0^{\nu}$, которая в векторном виде запишется в форме

$$(\mathbf{M}^{\nu})^{-1}\mathbf{D}^{\nu}\mathbf{T}^{\nu} + \sum_{\tau=1,\ \tau\neq\nu}^{T}(\mathbf{M}^{\nu})^{-1}\mathbf{D}^{\tau}\mathbf{T}^{\tau} = \mathbf{U}_0^{\nu} + \sum_{\tau=1,\ \tau\neq\nu}^{T}(\mathbf{M}^{\nu})^{-1}\mathbf{M}^{\tau}\mathbf{U}_0^{\nu}.$$

Введя обозначения

$$\mathbf{K}^{\nu}(\alpha_1^{\nu},\ \alpha_2^{\nu}) = (\mathbf{M}^{\nu})^{-1}\mathbf{D}^{\nu},$$
$$\mathbf{K}^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\ \alpha_2^{\nu}) = (\mathbf{M}^{\nu})^{-1}\mathbf{D}^{\tau},$$
$$\mathbf{Q}^{\nu\tau}(\alpha_1^{\nu},\ \alpha_2^{\nu}) = (\mathbf{M}^{\nu})^{-1}\mathbf{M}^{\tau}$$

и применив двойное обратное преобразование Фурье, систему можно привести к виду

$$\iint_{\partial\Omega_\nu}\mathbf{k}^{\nu}(x_1^{\nu}-\xi_1^{\nu}, x_2^{\nu}-\xi_2^{\nu})\times \mathbf{t}_c^{\nu}(\xi_1^{\nu}, \xi_2^{\nu})\,\mathrm{d}\xi_1^{\nu}\,\mathrm{d}\xi_2^{\nu} + \sum_{\tau=1,\ \tau\neq\nu}^{T}\iint_{\partial\Omega_\tau}\mathbf{k}^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\ \xi_1^{\tau},\ x_2^{\nu},\ \xi_2^{\tau})\times \mathbf{t}^{\tau}(\xi_1^{\tau},\ \xi_2^{\tau})\,\mathrm{d}\xi_1^{\tau}\,\mathrm{d}\xi_2^{\tau} = \mathbf{u}^{\nu}(x_1^{\nu},\ x_2^{\nu}) + \sum_{\tau=1,\ \tau\neq\nu}^{T}\iint_{\partial\Omega_\tau}\mathbf{q}^{\nu\tau}(x_1^{\nu},\ \xi_1^{\tau},\ x_2^{\nu},\ \xi_2^{\tau})\times \mathbf{u}^{\tau}(\xi_1^{\tau},\ \xi_2^{\tau})\,\mathrm{d}\xi_1^{\tau}\,\mathrm{d}\xi_2^{\tau}. \quad (2)$$

В полученных системах интегральных уравнений (2) первые слева операторы — главные — являются операторами свертки, они соответствуют граничной задаче для полупространства. Последующие операторы являются подчиненными для ограниченных носителей. Полученный результат открывает широкие возможности для быстрого получения псевдодифференциальных уравнений ранее исследованных задач, если были построены решения для полупространства [1–3].

Обращая главные операторы, получаем интегральные уравнения второго рода с непрерывными операторами, которые можно решать методом дискретизации

$$\mathbf{t}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T} (\mathbf{K}^\nu)^{-1}\mathbf{K}^{\nu\tau}\mathbf{t}^\tau = \\ = (\mathbf{K}^\nu)^{-1}\mathbf{u}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T} (\mathbf{K}^\nu)^{-1}\mathbf{Q}.$$

Для построения приближенного решения следует принять во внимание, что операторы $\mathbf{K}^{\nu\tau}$ имеют экспоненциальные составляющие, убывающие тем сильнее, чем больше разность $|\nu - \tau|$. Поэтому для приближенных целей можно, отбросив суммы, принять $\mathbf{t}^\nu{=}(\mathbf{K}^\nu)^{-1}\mathbf{u}^\nu$. Аналогичные результаты можно получить для перемещения $\mathbf{u}_0^\nu$, если на границах заданы векторы напряжений $\mathbf{t}_0^\nu$, $\mathbf{u}^\nu{=}(\mathbf{N}^\nu)^{-1}\mathbf{t}^\nu$. Представленные выше выводы будут справедливы и для задач, поставленных в криволинейных системах координат, в частности, цилиндрической или сферической [9]. Решения граничной задачи, найденные в пространстве медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$, состоят из классической компоненты и обобщенной составляющей. Если исходные граничные задачи сформулированы для достаточно гладких граничных условий, классическая компонента совпадает с этим решением. Обобщенная компонента появляется только в результате дифференцирования по нормали к границе кусочно-гладкого носителя.

2. Возможность развития и применения приближенных методов и реализация экспресс-прогноза становится все более актуальной для оценки загрязнения территорий и водных ресурсов, прогнозирования уровней загрязнения среды, а также принятия управленческих решений по природоохранной деятельности.

Количественная сторона изменения содержания субстанции (СБ) в среде во времени и пространстве описывается уравнением переноса, дополненным граничными условиями и условиями сопряжения на границе контакта блоков. В общем случае граничные условия переводят задачу в класс смешанных с линиями раздела граничных условий. Применяя дифференциальный метод факторизации, получаем систему интегральных уравнений для блоков в форме слоев [6]

$$\sum_{n=1}^{M} \iint\limits_{\Sigma_n} k_m(x-\xi_1, y-\xi_2) q_n(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 = \\ = \bar{f}_m(x,y), \quad (3)$$

$$k_m(x,y) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} \mathbf{K}_m(\alpha_1,\alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

где $x, y \in \Sigma_m$; $m = 1,2,\ldots,M$ — число областей на подстилающей поверхности.

Решение системы интегральных уравнений (3) зависит от числа m и формы областей на подстилающем основании.

Если $m = 1$, область является плоскостью, система интегральных уравнений вырождается в одно уравнение свертки на всей плоскости, решаемое методом интегральных преобразований.

Если $m = 2$ и области Σ_m занимают полуплоскости, система сводится к функциональному уравнению Винера–Хопфа и решается в замкнутом виде.

Например, если источник субстанции описывается функцией вида

$$f_m(x,y) = A_m \exp(i\eta_m x), \\ m = 1, \quad x > 0, \quad m = 2, \quad x < 0, \\ \operatorname{Im}\eta_1 \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\eta_2 \leqslant 0,$$

решение имеет вид

$$q_m(x) = \mathbf{V^{-1}}(x) \frac{1}{K_1^+(\alpha_1)K_2^-(\alpha_1)} \sum_{m=1}^{2} \frac{G_m}{\alpha_1 + \eta_m},$$

$$G_1 = \frac{iA_1 K_2^-(-\eta_1)}{K_1^-(-\eta_1)}, \quad G_2 = -\frac{iA_2 K_1^+(-\eta_2)}{K_1^+(-\eta_2)}.$$

Здесь $K_1^+(\alpha_1)$, $K_2^-(\alpha_1)$ — результаты факторизации соответствующих функций относительно вещественной оси.

Если $m \geqslant 2$ и области не являются полуплоскостями, для исследования интегральных уравнений нужно применять метод факторизации, предварительно перейдя к новым неизвестным, а именно, представив систему в виде

$$\mathbf{V^{-1}} \sum_{n=2}^{M} K_1^{-1} K_m F_n^- = \mathbf{V}^{-1} F_m - \\ - \mathbf{V^{-1}} K_1^{-1} K_m F_1, \ \mathbf{x} \in \Sigma_m, \ m = 2,\ldots,M.$$

Функции $\sum\limits_{n=2}^{M} \mathbf{V^{-1}} F_n^-$ являются неизвестным продолжением правой части первого уравнения в системе (3) вне области Σ_1 во всей плоскости;

$$f_n^- = \mathbf{V^{-1}} F_n^- = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin \Sigma_n, \\ \neq 0, & \mathbf{x} \in \Sigma_n. \end{cases}$$

Для областей сложной конфигурации дальнейшее исследование этой системы требует применения методов геометрии многообразий.

Получение приближенного решения для систем интегральных уравнений вида (3) обосновано в работе [10]. Рассматриваемые системы интегральных уравнений обладают специфическими свойствами локальности их ядер, экспоненциально затухающих при увеличении аргументов. Это обстоятельство позволяет строить приближенные решения интегральных уравнений специальным методом, развитым для решения смешанных задач теории упругости.

Особенность метода состоит в том, что построенное решение имеет две составляющие. Первая описывает его поведение во внутренних точках области и называется вырожденной. Вторая составляющая, наиболее значительная у границы области и убывающая по мере удаления от границы области вглубь, называется погранслойной. Построение вырожденной составляющей осуществляется решением уравнения свертки в соответствующей области, для построения погранслойной составляющей применяется метод спрямления границ.

Принимая во внимание, что мероморфные функции $K_m(\alpha)$ имеют лишь комплексные нули и полюса, можно выписать приближенное, вырожденное, решение задачи, которое определяется из системы (3) и имеет вид

$$q_m(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^{M} K_n^{-1} F_n + \\ + O\left(\exp(\xi\,|\mathbf{x} - \tau|)\right), \ \mathbf{x} \in \Sigma_m, \ \tau \in \partial\Sigma_m. \quad (4)$$

Здесь ξ — минимальное значение модуля мнимой части ближайшего к вещественной оси нулевого множества функций $K_m(\alpha)$.

Функции (4) приближенно описывают решение во внутренних точках областей Σ_m.

В том случае, если области Σ_m и Σ_n граничат по гладкой кривой, то в полосе, содержащей указанную кривую, решение может быть представлено в виде

$$q_p(x) = \mathbf{V^{-1}}(x) \Bigg\{ \frac{F_n^+}{K_{n1}} + \frac{F_m^-}{K_m} - \\ - \frac{1}{K_n^+(\alpha_1) K_m^-(\alpha_1)} \times \\ \times \left[\left(\frac{K_m^- F_n^+}{K_n^-} \right)^- + \left(\frac{K_n^+ F_m^-}{K_m^+} \right)^+ \right] \Bigg\},$$

$$p = n, \quad x > 0, \quad p = m, \quad x < 0.$$

Здесь ось x с началом на границе, нормальна к ней и переходит из области Σ_m в область Σ_n.

Проведенные тестовые расчеты показали, что вырожденная составляющая решения существенно превосходит погранслойную, на 2–3 порядка, вклад погранслойной составляющей несущественный и при проведении расчетов можно ограничиться вычислением только вырожденной составляющей.

Приведенные алгоритмы решения граничных задач переноса для блочных структур, основанные на дифференциальном методе факторизации, оказались чрезвычайно эффективными. Во-первых, размерность диффузионных задач минимальна, поскольку ищется одна скалярная функция. Во-вторых, при данном подходе многие промежуточные матричные представления могут быть получены в явном виде, в том числе обратные к ним. Ядра интегральных представлений для задач переноса, полученных дифференциальным методом факторизации, как правило, быстрее убывают на бесконечности. Это дает возможность реализовать решение плоских и пространственных задач с заданными стационарными, периодическими и нестационарными источниками для сотен и тысяч различных слоев и позволяет рассматривать многослойную блочную среду практически как непрерывную.

Полученные решения могут применяться в системах сейсмического и комплексного геоэкологического мониторинга для оценки риска наступления экзогенных и эндогенных природных геологических процессов, которые в обязательном порядке содержат математические модули оценки напряженности исследуемого участка земной коры.

Литература

1. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Zaretskaya M.V., Pavlova A.V.* The

differential factorization method for a block structure // Doklady Physics. 2009. Vol. 54. No. 1. С. 25–28.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Мухин А.С., Лозовой В.В., Федоренко А.Г.* О приложениях теории блочных структур в науках о земле, сейсмологии, строительстве, материаловедении // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. №4. С. 27–34.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Гориква Е.М., Зарецкая М.В., Мухин А.С., Павлова А.В.* О конвергентных свойствах блочных элементов // ДАН. 2015. Т. 465. №3. С. 298.
4. *Вабешко В.А., Зарецкая М.В., Рядчиков И.В.* К вопросу моделирования процессов переноса в экологии, сейсмологии и их приложения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. №3. С. 20–25.
5. *Зарецкая М.В.* Математические модели деструктивных процессов в структурно-неоднородной геофизической среде // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2014. №2. С. 25–30.
6. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Капустин М.С., Шестопалов В.Л.* Дифференциальный метод факторизации в задачах геоэкологии // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. №1. С. 5–11.
7. *Зарецкая М.В.* Развитие методов исследования процессов переноса в структурно-неоднородных средах // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2014. №5. С. 54–58.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об особенностях метода блочного элемента в нестационарных задачах // ДАН. 2011. Т. 438. №4. С. 470–474.
9. *Зарецкая М.В., Бабешко О.М., Зарецкий А.Г., Лозовой В.В.* О разнотипных блочных элементах в задачах геоэкологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотруднич-ва. 2017. №2. С.36–41.
10. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Zaretskaya M.V., Pavlova A.V. The differential factorization method for a block structure. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, iss. 1, pp. 25–28.
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Zareckaja M.V., Pavlova A.V., Muhin A.S., Lozovoj V.V., Fedorenko A.G. On applications of the theory of block structures in the sciences of the earth, seismology, construction, materials science. *Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2008, no. 4, pp. 27–34. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Gorshkova E.M., Zareckaya M.V., Muhin A.S., Pavlova A.V. Convergence properties of block elements. *Doklady akademii nauk* [Rep. of Russ. Acad. of Science], 2015, vol. 465, no. 3, pp. 298–301. (In Russian)
4. Babeshko V.A., Zareckaya M.V., Ryadchikov I.V. To the problem of modeling transport processes in ecology, seismology and their applications. *Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2008, no. 3, pp. 20–25. (In Russian)
5. Zareckaja M.V. Mathematical models of destructive processes in a structurally heterogeneous geophysical medium. *Zashhita okruzhajushhej sredy v neftegazovom komplekse* [Environmental protection in the oil and gas sector], 2014, no. 2, pp. 25–30. (In Russian)
6. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Zareckaja M.V., Kapustin M.S., Shestopalov V.L. Differential factorization method in problems of geoecology. *Computational continuum mechanics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 5–11. (In Russian)
7. Zareckaja M.V. Development of methods for studying transport processes in structurally inhomogeneous media. *Zashhita okruzhajushhej sredy v neftegazovom komplekse* [Environmental protection in the oil and gas sector], 2014, no. 5, pp. 54–58. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the singularities of the block element method in nonstationary problems. *Doklady akademii nauk* [Rep. of Russian Academy of Science], 2011, vol. 438, no. 4, pp. 470–474. (In Russian)
9. Zareckaja M.V., Babeshko O.M., Zareckij A.G., Lozovoj V.V. On heterogeneous block elements in the problems of geoecology. *Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 2, pp. 36–41. (In Russian)
10. Babeshko V.A. *Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of the theory of elasticity.* Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)

Статья поступила 20 марта 2018 г.