ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2018. Т. 15. № 2. С. 30–38

Механика

УДК 539.3

doi: 10.31429/vestnik-15-2-30-38

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТИПОВ РАЗЛОМОВ НА СТАРТОВЫЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Горшкова Е. М., Плужник А. В., Зарецкий А. Г., Евдокимов В. С.

ASSESSMENT OF DIFFERENT FAULTS TYPES' IMPACT ON STARTING EARTHQUAKES

O. M. Babeshko[1], O. V. Evdokimova[2], V. A. Babeshko[1], E. M. Gorshkova[1], A. V. Pluzhnik[1], A. G. Zaretskiy[1], V. S. Evdokimov[2]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. The analysis of starting earthquakes preparation models by different types of stresses affecting the edges of the tectonic plates is implemented. The common characteristics of the mathematical models are analyzed. The fact of the uniformity of the factors affecting the nature of the cases causing earthquakes and the common characteristics leading to destruction of a ground and tectonic plates themselves is drawn out. It is become clear that strong starting earthquakes begin because of stresses on all the contacting components in the area where tectonic plates come together on a deformable ground of high concentrations that are characterized by singular functions. The comparison of the obtained results with the Griffiths-Irvin fractures theory leads to the conclusion that tectonic plates' edges come together form a new type of fractures. They were not described before and lead the surroundings to destruction more drastically than the Griffiths-Irvin fractures. The concentration of stresses in some sections is studied for this.

Keywords: block element, factorization, topology, integral and differential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems, singular peculiarity.

1. Следуя [1–6], воспользуемся построениями, выполненными в этих работах. Считаем, что покрытия представляют полуплоскости с параллельными границами, удаленные друг от друга на расстояние 2θ и находятся на некотором линейно деформируемом основании. Литосферные плиты моделируются пластинами Кирхгофа. Считаем, что пространство между разнотипными плитами является пустым, а на торцах плит действуют внешние

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Горшкова Елена Михайловна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru.

Плужник Андрей Валерьевич, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

Зарецкий Александр Георгиевич, студент Кубанского государственного университета; e-mail: sam_one@mail.ru.

Евдокимов Владимир Сергеевич, студент Кубанского государственного университета, лаборант Южного научного центра РАН; e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2018 г., проекты (9.8753.2017/8.9), (01201354241), программ президиума РАН I-16, (00-18-21), I-52 проект (00-18-29), и при поддержке грантов РФФИ (16-41-230214), (16-41-230218), (16-48-230216), (17-08-00323), (18-08-00465), (18-01-00384), (18-05-80008).

силы, направленные по правилу внешних векторов, в локальной системе координат $x_1x_2x_3$ с началом в плоскости x_1x_2, совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью ox_3, направленной вверх по нормали к пластине, осью ox_1, направленной по касательной к границе разлома, осью ox_2 — по нормали к его границе.

Область, занятая левой плитой, обозначается индексом λ и описывается соотношениями $|x_1| \leqslant \infty$, $x_2 \leqslant -\theta$, а правой — индексом r и соответствует координатам $|x_1| \leqslant \infty$, $\theta \leqslant x_2$. Будем исходить из того, что литосферные плиты движутся крайне медленно, поэтому граничную задачу можно рассматривать в статическом варианте.

Уравнение Кирхгофа для фрагментов покрытия занимающих области Ω_b, $b = \lambda, r$ с границими $\partial\Omega_b$, при вертикальных статических воздействиях напряжением t_{3b} сверху и g_{3b} снизу имеет вид [1–3]

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)u_{3b} +$$
$$+ \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv$$
$$\equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F_2}u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F_2}g_{3b},$$
$$T_{3b} = \mathbf{F_2}t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$
$$M_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right),$$
$$D_{b1} = \frac{D_b}{\mathrm{H}^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{\mathrm{H}^3},$$

$$Q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) =$$
$$= f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{\mathrm{H}\partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$
$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1-\nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1-\nu_b^2)12\mathrm{H}^4}{E_b h_b^3},$$
$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu},$$

M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат x_1ox_2; h_b — толщины пластин, H — размерный параметр подложки, например, толщина слоя.

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся плиты, имеет вид

$$u_{3m}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1}\sum_{n=1}^{2}\iint_{\Omega_n} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\times$$
$$\times\, g_{3n}(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,$$
$$x_1, x_2 \in \Omega_m, \; m = \lambda, r, \theta,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty; \; x_2 \leqslant -\theta),$$
$$\Omega_r(|x_1| \leqslant \infty; \; \theta \leqslant x_2),$$
$$\Omega_\theta(|x_1| \leqslant \infty; \; -\theta \leqslant x_2 \leqslant \theta),$$
$$n = \lambda, r.$$

Обозначения заимствованы из [1–3]. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Для исследования граничной задачи, поставленной для блочной структуры, применением метода блочного элемента необходимо осуществить алгоритм, состоящий из трех шагов: внешней алгебры, внешнего анализа, фактор-топологии.

Внешняя алгебра позволяет свести граничную задачу для дифференциальных уравнений к функциональным уравнениям. Для этого граничная задача погружается в топологическую структуру, вводятся топологические пространства в области задания аргументов и пространстве, в котором ищется решение. Если в задаче одна неизвестная величина, то есть граничная задача скалярная, то функциональное уравнение имеет коэффициент в виде функции, если неизвестных несколько, граничная задача будет векторной, а коэффициентом будет матрица-функция. Следующим шагом является внешний анализ. Он включает выполнение факторизации коэффициента функционального уравнения, вычисление формы-вычета Лере и решение получающихся псевдодифференциальных уравнений граничной задачи.

Решения псевдодифференциальных уравнений затем вносятся во внешние формы функционального уравнения и обращение последних путем алгебраического деления на коэффициент функционального уравнения дает решение граничной задачи для отдельного блочного элемента.

Если граничная задача поставлена для блочной структуры, состоящей из нескольких блочных элементов, то вначале решается граничная задача в каждом блочном элементе с введением новых неизвестных на границах, после чего описанным выше алгоритмом из двух шагов строятся решения для каждого блочного элемента. Нна границах могут появиться неизвестные произвольные граничные функции. После этого осуществляется шаг фактор-топологии, то есть склеивание блочных элементов и нахождение неизвестных, введенных при разбиении блочной структуры на отдельные блочные элементы. Для этого определяются диктуемые поставленной граничной задачей отношения эквивалентности для топологических пространств каждого блока, а затем применяются операции гомеоморфизмов топологических пространств с учетом отношений эквивалентности. Граничная задача считается полностью решенной, когда найдены все неизвестные. Следуя описанному алгоритму, для введенной выше скалярной граничной задачи функциональные уравнения можно представить в виде [1]

$$R_b(-i\alpha_1,-i\alpha_2)U_{3b}\equiv(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2U_{3b}= \\ =-\int\limits_{\partial\Omega_b}\omega_b-\varepsilon_{53b}S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2), \quad (1)$$

$$S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)(t_{3b}-g_{3b}), \quad b=\lambda,r.$$

Здесь ω_b — участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\left[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_2^3}-i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_2^2}-\alpha_2^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}+\right. \\ \left.+i\alpha_2^3u_{3b}+2\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^2\partial x_2}-2i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}\right]\mathrm{d}x_1+ \\ +\left[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^3}-i\alpha_1\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}-\alpha_1^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}+i\alpha_1^3u_{3b}\right]\mathrm{d}x_2\Bigg\},$$

$$b=\lambda,r.$$

Вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи с учетом принятых обозначений можем представить для пластин, $b=\lambda,r$, в виде

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{i\alpha_{2-}D_{\lambda1}^{-1}M_\lambda-D_{\lambda2}^{-1}Q_\lambda- \\ -(\alpha_{2-}^2+\nu_\lambda\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\varepsilon_{53\lambda}S_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2-})\Bigg\rangle=0, \quad (2)$$

$$\alpha_{2-}=-i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \xi_1^\lambda\in\partial\Omega_\lambda,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{iD_{\lambda1}^{-1}M_\lambda-2\alpha_{2-}\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+ \\ +i\left[3\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\varepsilon_{53\lambda}S'_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2-})\Bigg\rangle=0,$$

$$\xi_1^\lambda\in\partial\Omega_\lambda, \\ \partial\Omega_\lambda=\{-\infty\leqslant x_1\leqslant\infty,\ x_2=-\theta\}.$$

Соответственно для правой пластины

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{i\alpha_{2+}D_{r1}^{-1}M_r-D_{r2}^{-1}Q_r- \\ -(\alpha_{2+}^2+\nu_r\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\varepsilon_{53r}S_{3r}(\alpha_1,\alpha_{2+})\Bigg\rangle=0, \quad (3)$$

$$\alpha_{2+}=i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \xi_1^r\in\partial\Omega_r,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{iD_{r1}^{-1}M_r-2\alpha_{2+}\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2}+ \\ +i\left[3\alpha_{2+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}\,\mathrm{d}x_1+ \\ +\varepsilon_{53r}S'_{3r}(\alpha_1,\alpha_{2+})\Bigg\rangle=0,$$

$$\xi_1^r \in \partial\Omega_r,$$

$$\partial\Omega_r = \{-\infty \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ x_2 = \theta\}.$$

Их решение изложено в [1] и анализируется ниже.

2. Рассматривается векторный случай статической задачи, связанный с горизонтальным движение полубесконечных литосферных плит с прямолинейными границами, параллельными друг другу, в двух состояниях [4]. В первом случае дистанция между торцами плит отлична от нуля, равна $2\theta > 0$, во втором случае — она отсутствует,$2\theta = 0$, хотя плиты не взаимодействуют. Предполагается, что горизонтальные воздействия на плиты, которые, как известно, крайне медленно движутся, настолько велики, что вертикальными составляющими контактных напряжений можно пренебречь.

Статическая граничная задача для векторного варианта горизонтальных воздействий на плиты, моделируемые пластинами Кирхгофа, лежащими на деформируемом основании, ранее рассматривалась в [4]. Примем оси координат x_1ox_2 расположенными в плоскости пластин, а ось x_3 — имеющей направление по внешней нормали к основанию. Уравнения граничных задач для пластин имеют форму

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b - \varepsilon_{5b}\mathbf{g}_b = \varepsilon_{5b}\mathbf{t}_b, \qquad (4)$$

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_b =$$
$$= \left\|\begin{matrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1b} & \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)u_{2b} \\ \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)u_{1b} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)u_{2b} \end{matrix}\right\|.$$

Рассматривается каждая пластина как многообразие с краем, причем $\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}\}$ — вектор перемещения точек пластин по касательной и нормали к торцам пластин лежит в их срединных плоскостях.

Преобразование Фурье дифференциальной части системы (4) имеет вид

$$-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b =$$
$$= \left\|\begin{matrix} \left(\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2\right)U_{1b} & \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b} \\ \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b} & \left(\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2\right)U_{2b} \end{matrix}\right\|,$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}_2\mathbf{g}, \quad b = 1{,}2, \ldots, B,$$

$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1-\nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1+\nu_b),$$

$$\varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b},$$

$$g_{1b} = \mu_{0b}\left(\frac{du_{1b}}{dx_3} + \frac{du_{3b}}{dx_1}\right),$$

$$g_{2b} = \mu_{0b}\left(\frac{du_{2b}}{dx_3} + \frac{du_{3b}}{dx_2}\right),$$

$$\mu_{0b} = \frac{\mu_b}{\mathrm{H}}, \quad x_3 = 0, \quad \mathbf{g} = \{g_{1b}, g_{2b}\}.$$

Приняты следующие обозначения: μ_b — модуль сдвига, ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, $\mathbf{g}$, $\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}\}$ — векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных воздействий соответственно, действующих по касательной к границе основания, как и перемещения, в областях Ω_b, где $b = \lambda$ для левой плиты и $b = r$ — для правой. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Описанные в [4] граничные условия здесь сохраняются. На границах пластин в случае жесткого защемления краев выполняются условия $u_1 = 0$, $u_2 = 0$. Выражения для нормальной N_{x_2} и касательной $T_{x_1x_2}$ составляющих напряжений к срединной плоскости на торцах пластин даются соответственно соотношениями

$$T_{x_1x_2} = \varepsilon_7\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

$$N_{x_2} = \varepsilon_8\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right),$$

$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1+\nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1-\nu^2)H}.$$

Для деформируемого основания, описываемого граничной задачей (4), применимы различные модели, приводящие к соотношениям

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)\times$$
$$\times\,\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\langle\alpha, \mathbf{x}\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2, \quad (5)$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta,$$

$$\langle\alpha, \mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant -\theta),$$

$$\Omega_r(|x_1| \leqslant \infty;\ \theta \leqslant x_2),$$

$$\Omega_\theta(|x_1| \leqslant \infty;\ -\theta \leqslant x_2 \leqslant \theta),$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m,n = 1,2,$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to \infty,$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu},$$

$$\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{g},$$

$\mathbf{g}$ — вектор касательных напряжений под пластинами на границе основания.

Свойства матриц-функций $K_{ks}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ в статическом случае описаны в [4] для слоистой среды.

Рассматривая плиты и основание как блочную структуру, состоящую из трех деформируемых блоков, применим для ее исследования метод блочного элемента, для чего воспользуемся описанным выше алгоритмом. Этот метод, как описано в [4], предполагает в качестве первого шага погружение средствами внешней алгебры граничной задачи в топологическую структуру. Применяя описанный подход, функциональное уравнение граничной задачи для этого случая, представленное для каждой пластины, превращается в матричное и имеет вид

$$-\mathbf{R}_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})\mathbf{U}_b = \\ = \int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(\alpha_{1b}, \alpha_{2b})(\mathbf{g}_b + \mathbf{t}_b),$$

$$\mathbf{U}_b = \{U_{1b}, U_{2b}\}.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор внешних форм, имеющий представление

$$\boldsymbol{\omega}_b = \{\omega_{1b}, \omega_{2b}\},$$

$$\omega_{1b} = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times \\ \times\left\{-\left(\varepsilon_{1b}\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_2} + \varepsilon_{2b}\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1b}\alpha_{2b}u_{1b}\right)\mathrm{d}x_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1} - i\alpha_{1b}u_{1b} - i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{2b}\right)\mathrm{d}x_2\right\},$$

$$\omega_{2b} = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times \\ \times\left\{-\left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2b}}{\partial x_2} - i\alpha_{2b}u_{2b}\right)\mathrm{d}x_1 + \right. \\ \left. + \left(\varepsilon_{1b}\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_1} - i\varepsilon_{1b}\alpha_{1b}u_{2b} - i\varepsilon_{2b}\alpha_{2b}u_{1b}\right)\mathrm{d}x_2\right\},$$

$b = \lambda$ для левой пластины и $b = r$ — для правой.

Для построения псевдодифференциальных уравнений осуществляется дифференциальная факторизация матрицы-функции $-\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$. Ради краткости индексы локальных систем координат опущены.

3. Рассматривается граничная задача о жестком сцеплении литосферных плит, моделируемых пластинами Кирхгофа, с основанием, представляющим трехмерную деформируемую слоистую среду [5]. Исследуется возможность возникновения стартового землетрясения в такой блочной структуре.

Считаем, что литосферные плиты представляют собой полубесконечные пластины Кирхгофа в форме полуплоскостей, границы которых параллельны и находятся на дистанции 2θ, $\theta \geqslant 0$, причем каждая обладает индивидуальными механическими свойствами. Примем оси координат x_1ox_2 лежащими в плоскости пластин, а ось x_3 — направленной по внешней нормали к подложке. Рассмотрим случай статических воздействий на поверхность пластин, жестко сцепленных с основанием. Граничная задача формулируется в следующем виде:

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)\,\mathbf{u}_b - \mathbf{s}_b(x_1, x_2) = 0, \quad b = \lambda, r.$$

Здесь каждая пластина рассматривается как многообразие с краем, где $\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}$ — вектор перемещения точек пластин по горизонтальным u_{1b}, u_{2b} и вертикальным u_{3b} направлениям срединной поверхности, а $b = \lambda$ для левой плиты и $b = r$ — для правой. Имеют место обозначения

$$\mathbf{s}_b(x_1, x_2) = \begin{Vmatrix} \xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{Vmatrix},$$

$$\xi_{11} = -\varepsilon_{5b}s_{1b}(x_1, x_2), \quad \xi_{22} = -\varepsilon_{5b}s_{2b}(x_1, x_2),$$

$$\xi_{33} = \varepsilon_{53b}s_{3b}(x_1, x_2),$$

$$s_{nb}(x_1, x_2) = (t_{nb} + g_{nb}),$$

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)\,\mathbf{u}_b = \begin{Vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{Vmatrix},$$

$$\psi_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1b},$$

$$\psi_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{1b}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)u_{2b},$$

$$\psi_{12} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) u_{2b},$$

$$\psi_{21} = \left(\varepsilon_{2b}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) u_{1b},$$

$$\psi_{33} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right) u_{3b}.$$

Применив к граничной задаче алгоритм внешней алгебры, функциональные уравнения граничной задачи для пластин можно представить в виде

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{U}_b = -\begin{Vmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & 0\\ \rho_{21} & \rho_{22} & 0\\ 0 & 0 & \rho_{33}\end{Vmatrix},$$

$$\rho_{11} = (\alpha_1^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_2^2)U_{1b}, \quad \rho_{22} = (\alpha_2^2 + \varepsilon_{1b}\alpha_1^2)U_{2b},$$

$$\rho_{12} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{2b}, \quad \rho_{21} = \varepsilon_{2b}\alpha_1\alpha_2 U_{1b},$$

$$\rho_{33} = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F}\mathbf{g}_b \quad \mathbf{T}_b = \mathbf{F}\mathbf{t}_b,$$

$$\mathbf{u}_b = \{u_{1b}, u_{2b}, u_{3b}\}, \quad \mathbf{g}_b = \{g_{1b}, g_{2b}, g_{3b}\},$$

$$\mathbf{t}_b = \{t_{1b}, t_{2b}, t_{3b}\}.$$

Здесь нормальные напряжения t_{3b} действует на плиту сверху и g_{3b} — снизу.

Аналогично напряжения g_{1b}, g_{2b} и t_{1b}, t_{2b} действуют в касательной плоскости, причем g_{2b} и t_{2b} — в направлениях нормалей к торцам литосферных плит.

Имеют место следующие обозначения, принятые в [5]:

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{u}_b, \quad \mathbf{G}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{g}_b, \quad \mathbf{T}_b = \mathbf{F_2}\mathbf{t}_b,$$

$$b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{\mathrm{H}^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{\mathrm{H}^3},$$

$$Q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2-\nu_b)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right),$$

$$3b, \quad \frac{\partial u_{3b}}{\mathrm{H}\partial x_2},$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1-\nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1-\nu_b^2)12\mathrm{H}^4}{E_b h_b^3},$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}$$

$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1-\nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1+\nu_b),$$

$$\varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b},$$

$$g_{1b} = \mu_{0b}\left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}\right),$$

$$g_{2b} = \mu_{0b}\left(\frac{\partial u_{2b}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}\right),$$

$$\mu_{0b} = \frac{\mu_b}{\mathrm{H}}, \quad x_3 = 0, \quad \mathbf{g} = \{g_{1b}, g_{2b}\}.$$

Приняты следующие обозначения: μ_b — модуль сдвига,ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, $\mathbf{g}_b$, $\mathbf{t}_b$ — векторы контактных напряжений и внешних горизонтальных, g_{1b}, g_{2b}, t_{1b}, t_{2b} и вертикальных, g_{3b}, t_{3b} воздействий соответственно, действующих по касательной к границе основания и по нормали к ней в областях Ω_b. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Описанные в [5] граничные условия здесь сохраняются. Выражения для нормальной N_{x_2} и касательной $T_{x_1x_2}$ составляющих напряжений к срединной плоскости на торцах пластин даются соответственно соотношениями

$$T_{x_1x_2} = \varepsilon_7\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

$$N_{x_2} = \varepsilon_8\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right),$$

$$\varepsilon_7 = \frac{E}{2(1+\nu)H}, \quad \varepsilon_8 = \frac{E}{(1-\nu^2)H}.$$

Для деформируемого основания, описываемого граничной задачей, применимы различные модели, для которых справедливы соотношения

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)\times$$

$$\times\, \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\langle\alpha, \mathbf{x}\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2,$$

$$x \in \Omega_\lambda, \quad x \in \Omega_r, \quad x \in \Omega_\theta,$$

$$\langle\alpha, \mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant -\theta),$$

$$\Omega_r(|x_1| \leqslant \infty;\ \theta \leqslant x_2),$$

$$\Omega_\theta(|x_1| \leqslant \infty;\ -\theta \leqslant x_2 \leqslant \theta),$$

$$\mathbf{K} = \|K_{mn}\|, \quad m, n = 1{,}2{,}3,$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)=O(A^{-1}),\quad A=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\to\infty,$$

$$\varepsilon_6^{-1}=\frac{(1-\nu)H}{\mu},\quad \mathbf{G}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{g},$$

$\mathbf{g}$ — вектор касательных и нормальных напряжений под плитами на границе основания. Некоторые типы матриц-функций $\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)$ оснований, называемые символом системы интегральных уравнений, приведены в [5].

В соответствии с алгоритмом граничные задачи для каждого блока структуры погружаются в топологическое пространство, индуцированное трехмерным евклидовым пространством, после чего применением формулы Стокса в топологическом пространстве сведены к функциональным уравнениям. Приведем представления функциональных уравнений, отвечающих перечисленным операторам граничной задачи. Функциональные уравнения скалярного оператора имеют вид [5]

$$R_{3b}(-i\alpha_1,-i\alpha_2)U_{3b}\equiv(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2U_{3b}=$$
$$=-\int\limits_{\partial\Omega_b}\omega_{3b}+S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2)=\varepsilon_{53b}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)(t_{3b}+g_{3b}),$$
$$b=\lambda,r.$$

Здесь ω_{3b} — участвующие в представлении внешние формы, имеющие для левой (λ) и правой (r) литосферной плиты выражение

$$\omega_\lambda=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times$$
$$\times\left\{-\left[\frac{\partial^3u_{3\lambda}}{\partial x_2^3}-i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3\lambda}}{\partial x_2^2}-\alpha_2^2\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+\right.\right.$$
$$\left.+i\alpha_2^3u_{3\lambda}+2\frac{\partial^3u_{3\lambda}}{\partial x_1^2\partial x_2}-2i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3\lambda}}{\partial x_1^2}\right]\mathrm{d}x_1+$$
$$\left.+\left[\frac{\partial^3u_{3\lambda}}{\partial x_1^3}-i\alpha_1\frac{\partial^2u_{3\lambda}}{\partial x_1^2}-\alpha_1^2\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_1}+i\alpha_1^3u_{3\lambda}\right]\mathrm{d}x_2\right\},$$

$$\omega_r=-e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times$$
$$\times\left\{-\left[\frac{\partial^3u_{3r}}{\partial x_2^3}-i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3r}}{\partial x_2^2}-\alpha_2^2\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2}+\right.\right.$$
$$\left.+i\alpha_2^3u_{3r}+2\frac{\partial^3u_{3r}}{\partial x_1^2\partial x_2}-2i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3r}}{\partial x_1^2}\right]\mathrm{d}x_1+$$
$$\left.+\left[\frac{\partial^3u_{3r}}{\partial x_1^3}-i\alpha_1\frac{\partial^2u_{3r}}{\partial x_1^2}-\alpha_1^2\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_1}+i\alpha_1^3u_{3r}\right]\mathrm{d}x_2\right\}.$$

Функциональные уравнения граничной задачи для векторного случая, представленные для каждой плиты, являются матричными и имеют вид

$$\mathbf{R}_{12b}(-i\alpha_{1b},-i\alpha_{2b})\mathbf{U}_{12b}=$$
$$=-\int\limits_{\partial\Omega_b}\boldsymbol{\omega}_{12b}+\mathbf{S}_{12b}(\alpha_{1b},\alpha_{2b}),$$

$$\boldsymbol{\omega}_{12b}=\{\omega_{1b},\omega_{2b}\},$$
$$\mathbf{S}_{12b}(\alpha_{1b},\alpha_{2b})=-\varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(\alpha_{1b},\alpha_{2b})(\mathbf{g}_b+\mathbf{t}_b),$$
$$b=\lambda,r,$$
$$\mathbf{S}_{12b}(\alpha_{1b},\alpha_{2b})=\{S_{1b},S_{2b}\},$$

$$\mathbf{R}_{12b}(-i\alpha_{1b},-i\alpha_{2b})=$$
$$-\left\|\begin{matrix}(\alpha_{1b}^2+\varepsilon_{1b}\alpha_{2b}^2) & \varepsilon_{2b}\alpha_{1b}\alpha_{2b}\\ \varepsilon_{2b}\alpha_{1b}\alpha_{2b} & (\alpha_{2b}^2+\varepsilon_{1b}\alpha_{1b}^2)\end{matrix}\right\|.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор внешних форм, имеющих представление

$$\omega_{1\lambda}=-e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times$$
$$\times\left\{-\left(\varepsilon_{1\lambda}\frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial x_2}+\varepsilon_{2\lambda}\frac{\partial u_{2\lambda}}{\partial x_1}-i\varepsilon_{1\lambda}\alpha_2u_{1\lambda}\right)\mathrm{d}x_1+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial x_1}-i\alpha_1u_{1\lambda}-i\varepsilon_{2\lambda}\alpha_2u_{2\lambda}\right)\mathrm{d}x_2\right\},$$

$$\omega_{2\lambda}=-e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times$$
$$\times\left\{-\left(\varepsilon_{2\lambda}\frac{\partial u_{1\lambda}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{2\lambda}}{\partial x_2}-i\alpha_2u_{2\lambda}\right)\mathrm{d}x_1+\right.$$
$$\left.+\left(\varepsilon_{1\lambda}\frac{\partial u_{2\lambda}}{\partial x_1}-i\varepsilon_{1\lambda}\alpha_1u_{2\lambda}-i\varepsilon_{2\lambda}\alpha_2u_{1\lambda}\right)\mathrm{d}x_2\right\}$$

$$\omega_{1r}=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times$$
$$\times\left\{-\left(\varepsilon_{1r}\frac{\partial u_{1r}}{\partial x_2}+\varepsilon_{2r}\frac{\partial u_{2r}}{\partial x_1}-i\varepsilon_{1r}\alpha_2u_{1r}\right)\mathrm{d}x_1+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_{1r}}{\partial x_1}-i\alpha_1u_{1r}-i\varepsilon_{2r}\alpha_2u_{2r}\right)\mathrm{d}x_2\right\},$$

$$\omega_{2r}=e^{i\langle\alpha,x\rangle}\times$$
$$\times\left\{-\left(\varepsilon_{2r}\frac{\partial u_{1r}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{2r}}{\partial x_2}-i\alpha_2u_{2r}\right)\mathrm{d}x_1+\right.$$
$$\left.+\left(\varepsilon_{1r}\frac{\partial u_{2r}}{\partial x_1}-i\varepsilon_{1r}\alpha_1u_{2r}-i\varepsilon_{2r}\alpha_2u_{1r}\right)\mathrm{d}x_2\right\}.$$

Дальнейшее применение внешнего анализа, построение псевдодифференциальных уравнений, их решение для каждого из блоков рассматриваемых граничных задач, приводит к следующей совокупности результатов.

Если торцы литосферных плит удалены, во всех трех рассмотренных случаях концентрация контактных напряжений у границ литосферных плит описывается функцией $x^{-0,5}$.

Если расстояние между торцами литосферных плит отсутствует, во всех трех рассмотренных случаях максимум концентрации контактных напряжений у границ литосферных плит у каждой компоненты векторов касательных напряжений описывается сингулярной функцией x^{-1}.

Заметим, что различные аспекты применения топологических методов изложены в работах [7–15]. Однако, применительно к граничным задачам сейсмологии с широким охватом постановок задач делаются впервые.

Вывод

Таким образом, установлено, что при произвольном нагружении торцов разломов и дневной поверхности литосферных плит напряжениями, при наличии расстояний между торцами, контактные напряжений имеют у границы концентрации напряжений, описываемые функциями из энергетического пространства. Когда расстояние между торцами литосферных плит отсутствует, возникает у каждой компоненты векторов касательных напряжений в зоне сближения концентрация напряжений, описываемая сингулярной функцией, то есть возможно стартовое землетрясение. С учетом сказанного, можно говорить о типах разломов, увязывая их геометрию с продолжением разломов в область контактов литосферных плит с основанием. В этом случае типы разломов характеризуются как числом предвестников, так и характером разрушений, которые они могут вызвать при землетрясении. В связи с вышеперечисленным имеет смысл ввести для классификации понятие полного типа разлома. Например, первый полный тип — в области контакта отсутствует трение, второй полный тип — в области контакт присутствуют лишь касательные напряжения, третий полный тип — в области контакта имеет место полное сцепление литосферных плит с основанием.

Литература

1. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229. Iss. 5. P. 2163–2175. DOI: 10.1007/s00707-017-2092-0
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О свойствах стартовых землетрясений // ДАН. 2016. Т. 467. № 5. С. 530–533.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стартовых землетрясениях при горизонтальных воздействиях // ДАН. 2017. Т. 474. № 4. С. 427–431.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Зарецкая М.В, Горшкова Е.М., Мухин А.С., Гладской И.Б.* О стартовых землетрясениях при жестком сцеплении литосферных плит с основанием // ДАН. 2018. Т. 478. № 4. С. 406–412.
6. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* The theory of the starting earthquake // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 1. Ч. 2. С. 37–80.
7. *Hassani B., Hinton E.* A review of homogenization and topology optimization I - homogenization theory for media with periodic structure // Computers and Structure. 1998. Vol. 69. P. 707–717.
8. *Xin Z.Q., Wu C.J.* Topology Optimization of the Caudal Fin of the Three-Dimensional Self-Propelled Swimming Fish // Adv. Appl. Math. Mech. 2014. Vol. 6. Iss. 6. P. 732–763.
9. *Bendsoe M.P., Sigmund O.* Topology Optimization – Theory, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2003.
10. *Bonvall T., Petersson J.* Topology optimization of fluids in stokes flow // Int. J.for Numerical Methods in Fluids. Vol. 42. P. 77–107.
11. *El-Sabbage A., Baz A.* Topology optimization of unconstrained damping treatments for plates // Engineering. Optimization, 2013. Vol. 49. P. 1153–1168.
12. *Zheng W., Lei Y., Li S. et. al.* Topology optimization of passive constrained layer damping with partial coverage on plate // J. Shock and Vibration. 2013. Vol. 20. P. 199–211.
13. *Van der Veen G., Langelaar M., van Keulen F.* Integrated topology and controller optimization of motion systems in the frequency domain // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2014. Vol. 51. P. 673–685.
14. *Dahl J.J., Jensen S., Sigmund O.* Topology

optimization for transient wave propagation problems in one dimension // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2008. Vol. 36. P. 585–595.

15. *Blasques J.P., Stolpe M.* Multy-material topology optimization of laminated composite beam cross sections // Composite Structures. 2012. Vol. 94. No. 11. P. 3278–3289.

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5, pp. 2163–2175. DOI: 10.1007/s00707-017-2092-0
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. The Problem of Physical and Mechanical Precursors of Earthquake: Place, Time, Intensity. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 2, pp. 92–97.
3. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Properties of "Started" Earthquake. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 4, pp. 188–191.
4. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Starting Earthquake under Horisontal Action. *Doklady Physics*, 2017, vol. 62, no. 6, pp. 302–305.
5. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Zaretskaya, M.V., Gorshkova, E.M., Mukhin, A.S., Gladskoi, I.B. Origin of Starting Earthquakes under Complete Coupling of Lithosphere Plates and a Base. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 70–75. DOI: 10.1134/S1028335818020015
6. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. The Theory of the Starting Earthquake. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 1, pt. 2, pp. 37–80.
7. Hassani, B., Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization I - homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structure*, 1998, vol. 69, pp. 707–717.
8. Xin, Z.Q., Wu, C.J. Topology Optimization of the Caudal Fin of the Three-Dimensional Self-Propelled Swimming Fish. *Adv. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 6, iss. 6, pp. 732–763.
9. Bendsoe, M.P., Sigmund, O. Topology Optimization – Theory, Methods and Applications. Springer, Berlin, 2003.
10. Bonvall, T., Petersson, J. Topology optimization of fluids in stokes flow. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 42, pp. 77–107.
11. El-Sabbage, A., Baz, A. Topology optimization of unconstrained damping treatments for plates. *Engineering. Optimization*, 2013, vol. 49, pp. 1153–1168.
12. Zheng, W., Lei, Y., Li, S. et. al. Topology optimization of passive constrained layer damping with partial coverage on plate. *J. Shock and Vibration*, 2013, vol. 20, pp. 199–211.
13. Van der Veen, G., Langelaar, M., van Keulen, F. Integrated topology and controller optimization of motion systems in the frequency domain. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, vol. 51, pp. 673–685.
14. Dahl, J.J., Jensen, S. and Sigmund, O. Topology optimization for transient wave propagation problems in one dimension. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, vol. 36, pp. 585–595.
15. Blasques, J.P., Stolpe, M. Multu-material topology optimization of laminated composite beam cross sections. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, no. 11, pp. 3278–3289.

Статья поступила 20 июня 2018 г.