Механика

УДК 534.16

doi: 10.31429/vestnik-15-2-39-46

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Ватульян А. О., Явруян О. В.

INVERSE PROBLEMS OF CRACK'S THEORY RESEARCH WITH ASYMPTOTIC APPROACH USING

A. O. Vatulyan[1], O. V. Yavruyan[2]

[1] Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
[2] Vladikavkaz Science Center, Russian Academy of Science, Vladikavkaz, South Osetiya-Alaniya, Russia
e-mail: yavruyan@mail.ru

Abstract. The effective approach for inverse problems of cracks identification in the layer is proposed. The scheme is based on asymptotic analysis of the problem, taking into account the small relative size of the defect. The crack identification is realized from the acoustic data - displacement fields wich on the part of upper bound measured. Asymptotic analysis of displacement fields in the layer and on the boundary is carried out. In the case of a crack, that allows parametrization by a finite number of parameters, for example, a straight-line crack, the identification problem is solved, the transcendental equations are obtained in regard to the corresponding defect's characteristics in the frequency sensing mode. The proposed approach is tested for a model inverse problem of a vertical crack, located on the boundary between two semi-layers. The steady-state oscillations for anti-plane deformations are considered. The expressions for displacement fields calculation for each of the semi-layers are recieved, asymptotic estimates of these expressions are obtained. The inverse problem of crack identification by amplitude characteristics of running waves is resolved. Transcendental expressions for crack's parameters identification are presented. The results of numerical experiments of characteristics' reconstruction are represented. The proposed approach effectiveness is conducted.

Keywords: crack, layer, identification, asymptotic approach, oscillations, acoustic sensing.

Современное состояние объектов ответственного назначения предъявляет высокие требования к безопасности и долговечности их эксплуатации. Наблюдается постоянное усиление показателей, характеризующих надежность работы объектов, что напрямую связано с модернизацией приборов неразрушающего контроля качества, а также стимулирует развитие математических схем оценки технического состояния объектов без применения разрушающих операций и методик обработки данных, полученных с их использованием [1].

Среди методов неразрушающего контроля особое место занимают акустические методы зондирования, являющиеся одним из самых эффективных (недорогих и информативных) способов получения дополнительной информации об исследуемом объекте [2]. При этом ведущее положение занимает ультразвуковой контроль, работающий на основе способности ультразвуковых волн отражаться от границы раздела двух сред, обладающих разными акустическими свойствами. На выходе ультразвуковая волна «несет» в себе информацию об имеющихся отклонениях в исследуемой среде, к которым относятся дефекты различного характера.

К настоящему моменту довольно подробно изучены задачи идентификации дефектов для конечных тел.

Как правило, основным и самым эффективным методом исследования подобных задач является метод конечных элементов (МКЭ) с последующим сведением к решению оптимизационных задач применительно к функционалам невязок, характеризующих норму невязки между измеренными данными

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

Явруян Оксана Вячеславовна, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Южного математического института Владикавказского научного центра РАН; e-mail: yavruyan@mail.ru

и аналитическими. Стоит отметить, что подключаемый математический аппарат эволюционных алгоритмов, например, искусственных нейронных сетей, позволяет выдвинуть практические рекомендации по способам расположения самих датчиков съема данных [3].

Для тел, содержащих бесконечно удаленную точку, метод КЭ неприменим. Самым эффективным подходом к решению таких задач является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Различные комбинации данного подхода использованы в работах [4–7], где получены граничные интегральные уравнения для полупространства с трещиной, неоднородного слоя с трещиной, расположенной на границе областей, а также многослойных композитов и слоистых функционально-градиентных фоновых кристаллов с расслоениями.

Основная задача неразрушающего контроля связана с определением чувствительности ряда механических полей к изменению параметров дефекта. Существенно упрощается задача идентификации внутренних дефектов, если имеется некоторая априорная информация о малости относительных размеров дефектов, микротрещин, которые по своей природе являются наиболее опасными ввиду сложности их выявления с использованием стандартных приборов технической диагностики. При наличии такой информации становится возможным применение асимптотических методов исследования обратных геометрических задач, позволяющих получить явные математические зависимости геометрических параметров идентификации от входных данных. Стоит отметить, что при использовании асимптотических методов исследования первостепенными становятся задачи определения их диапазонов применимости, а также выявление зависимости точности решения от погрешности задания входной информации.

Асимптотические методы были применены ранее в работе [8], где рассмотрена статическая задача теории упругости для идентификации плоской трещины малого относительного размера. Идентификация осуществляется по данным трех испытаний на одноосное растяжение в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Получены формулы, определяющие геометрические параметры дефекта через инвариантные интегралы, которые являются точными в случае безграничного упругого тела и приближенными для ограниченного тела, если априори допускается, что относительные размеры трещины малы.

Асимтотиеские методы были использованы ранее в работах [9] для случая ортотропной полосы с прямолинейной трещиной, учет вязкости для этой задачи осуществлен в работе [10], для полосы, ослабленной полостью, — в работе [11].

В данной работе предлагается асимптотический метод исследования обратных геометрических задач идентификации трещин в слоистых средах, которые находятся под действием динамической нагрузки в режиме установившихся колебаний. В качестве примера рассмотрена задача идентификации вертикальной трещины на границе раздела двух сред. Осуществлен асимптотический анализ полей смещений, получены выражения для определения параметров трещины. Определен рабочий диапазон применимости асимптотического подхода.

1. Схема исследования задач идентификации трещин с использованием асимптотического подхода

Схема исследования обратной геометрической задачи идентификации трещиновидного дефекта в слоистых средах сводится к последовательному решению прямой и обратной задач. На первом этапе решается прямая задача, строятся интегральные представления полей смещений в слое. Далее осуществляется асимптотический анализ полученных выражений из условия малости относительного размера дефекта и решается обратная задача об определении параметров дефекта.

При исследовании многопараметрической задачи о колебаниях упругого слоя толщины h с трещиной характерной длины l выделяются три безразмерных параметра: $\varepsilon_1 = l/h$, $\varepsilon_2 = \omega h/c$ (c — характерная скорость волн в среде) и $\varepsilon_3 = \omega l/c = \varepsilon_1\varepsilon_2$ (ω — частота колебаний). Решение задачи идентификации осуществляется в области изменения параметров $\varepsilon_1 \ll 1, \varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_*$, ($\varepsilon_*$ — критическая частота), что соответствует случаю трещин малых относительных размеров и частотам колебаний, при которых в слое имеется хоты бы одна бегущая волна.

Рассмотрим задачу о колебаниях упругого слоя толщины h, ослабленного внутренней трещиной. Слой занимает область S в пространстве R_3 и ограничен плоскостями S_1 и S_2, которые соответствуют нижней ($x_3 = 0$) и верхней ($x_3 = h$) границам слоя. Оси декартовой системы координат Ox_1 и Ox_2 направлены по нижней грани слоя, ось Ox_3 направлена перпендикулярно вверх. На части $S_{20} \subset S_2$ верхней границы слоя действует источник внешний нагрузки, возбуждающий установившиеся колебания в слое $p_j(x,t) = p_j(x)e^{-i\omega t}$ с частотой ω.

Трещина моделируется в виде математического разреза с берегами $S_0^{\pm}$. Рассматривается постановка, в которой берега трещины в процессе колебания не взаимодействуют и свободны от напряжений, при этом компоненты вектора перемещений на берегах трещины, согласно теории дислокаций, можно заменить действием фиктивных массовых сил f_i, которые выражаются через скачки полей смещений на берегах трещины, так называемыми, компонентами функции раскрытия трещины χ_i, $i = 1,2,3$. В рассматриваемых задачах будем полагать, что другие массовые силы отсутствуют.

После отделения временного множителя, компоненты вектора перемещений можно представить в виде $u_j(x,t) = u_j(x)e^{-i\omega t}$, тогда рассматриваемая задача будет описываться краевой задачей

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0, \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}, \quad f_i = -[c_{ijkl}n_k^+\chi_l\delta(\zeta)]_{,j}\,,$$

$$u_i|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{i3}|_{S_{20}} = p_i, \quad \sigma_{i3}|_{S_2\setminus S_{20}} = 0, \qquad (1.2)$$

$$\sigma_{ij}n_j^{\pm}\Big|_{S_0^{\pm}} = 0, \quad i,j = 1,2,3, \qquad (1.3)$$

где ρ — плотность среды, считается постоянной, C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных материала, удовлетворяющие обычным соотношениям симметрии и положительной определенности, $n_j^{\pm}$ — компоненты единичных векторов нормали к берегам трещины $S_0^{\pm}$, $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака с носителем на трещине.

Прямая задача сводится к построению волнового поля в слое при известных конфигурации и местоположении трещины, а также при заданной возбуждающей нагрузке.

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых используется принцип предельного поглощения [12].

Обратная задача идентификации трещины в упругом слое состоит в определении поверхности S_0^+ по измеренной на части верхней границы слоя S_{21} компонентам полей смещений в режиме частотного или позиционного зондирования

Используя формулы Сомильяны и представления функций Грина [9], интегральные соотношения для полей смещений в слое получены в виде

$$u_m(\xi) = u_m^{\text{эт}}(\xi) + \int\limits_{S_0^+} \sigma_{kl}^{(m)}(x,\xi)\chi_l n_k^+\,\mathrm{d}S_x, \quad \xi \in S, \qquad (1.4)$$

где

$$u_m^{\text{эт}}(\xi) = \int\limits_S \sigma_{ij}n_j U_i^{(m)}(x,\xi)\,\mathrm{d}S_x - \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_j u_i\,\mathrm{d}S_x.$$

В представлении (1.4) эталонное поле $u_m^{\text{эт}}(\xi)$ представляет собой поле смещений в слое без дефекта, вызванное действием заданной нагрузки; интегральное слагаемое определяет вклад трещины в общее поле перемещений; $U_i^{(m)}(x,\xi)$, $\sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)$ — фундаментальные и сингулярные решения для соответствующей среды, определяемые на основе представлений для функций Грина и закона Гука, удовлетворяющие однородным условиям на границах слоя.

Для определения скачков полей смещений χ_i осуществляется предельный переход в выражении (1.4), устремив точку $\xi \in S$ на границу области, по которой идет интегрирование S_0^+, удовлетворяя граничным условиям (1.3). В результате получаем систему граничных интегральных уравнений (ГИУ) относительно компонент функций раскрытия

$$\int\limits_{S_0^+} K_{ji}(x,y)\chi_i(x)\,\mathrm{d}l_x = F_j(y), \qquad (1.5)$$

$$y \in S_0^+, \quad i,j = 1,2,3.$$

Главные части ядер интегральных операторов $K_{ji}(x,y)$, так же как и в упругом случае, являются гиперсингулярными, а соответствующие интегралы понимаются в смысле конечного значения по Адамару.

В случае трещин, допускающих параметризацию конечным числом параметров θ_i, $i = 1, \ldots, N$,

$$x_j = q_j(t, \theta_i), \quad y_j = q_j(\tau, \theta_i), \quad t, \tau \in [-1{,}1],$$

$$q_1(t), q_3(t) \in C^1[-1{,}1], \quad \sqrt{q_1'^2(t) + q_3'^2(t)} \neq 0,$$

одним из которых является характерная длина трещины l, например, $\theta_1 = l$, асимптотический анализ интегральных уравнений (1.5) при $l \to 0$ приводит к системе интегральных уравнений с постоянной правой частью

$$\int_{-1}^{1} \frac{G_{ji}(\theta_m, \omega)}{(t-\tau)^2} \chi_j^*(t)\,\mathrm{d}t = F_i^*(\theta_m, \omega), \qquad (1.6)$$

$$\tau \in [-1, 1], \quad i, j = 1, 2, 3, \quad m = 2, \ldots, N,$$
$$\chi_j^*(t) = l^{-1}\chi_j(t), F_i^*(\theta_m, \omega) = \lim_{l_0 \to 0} F_i(\tau, \omega).$$

Система интегральных уравнений (1.6) имеет решения в классе ограниченных функций вида

$$\chi_j(t) = \sqrt{1-t^2}\, W_{0j}(\theta_m), \qquad (1.7)$$
$$j = 1, 2, 3, \quad m = 2, \ldots, N,$$

Функция $W_{0j}(\theta_m)$ определяется геометрическими параметрами трещины и материальными константами исследуемой среды [9], поэтому в работе не представлена в явном виде.

Тогда компоненты полей смещений на верхней границе в дальней зоне представимы в форме

$$u_j(x_1, h) = u_j^s(x_1, h) + \\ + l_0^2 \sum_{n=1}^{N} A_{jn}(\theta_m) e^{i\beta_n x_1} + O(e^{-\varepsilon x_1}), \qquad (1.8)$$
$$j = 1, 2, 3, \quad m = 2, \ldots, N$$

Следует отметить, что амплитуды бегущих волн $A_{jn}(\theta_m)$ в (1.8) оказываются пропорциональны квадрату длины трещины, что дает возможность получить трансцендентные уравнения для определения каждой характеристики дефекта. Для этого оказывается достаточным задать в качестве дополнительной информации амплитудные значения бегущих волн на поверхности слоя в режиме частотного зондирования. Например, в случае прямолинейной трещины в ортотропном слое для идентификации четырех параметров, однозначно характеризующих дефект, достаточно измерить амплитудные значения полей смещений на двух частотах, при которых в слое имеются две бегущие волны [9].

2. Модельная задача для составного слоя с трещиной

Применим рассмотренную асимптотическую схему исследования для составного изотропного слоя толщины h с вертикальной прямолинейной трещиной S_{cr} длины l ($l_0 = l/2$), расположенной на границе раздела двух полуслоев на расстоянии d_0 от нижней границы в режиме установившихся антиплоских колебаний.

Упругие характеристики (плотность и модуль сдвига) первого полуслоя, соответствующего $x_1 < 0$, обозначены через ρ_1, μ_1, второго полуслоя, $x_1 > 0$ — ρ_2, μ_2. Нижняя грань слоя жестко защемлена. Будем считать, что на границе $x_1 = 0$ имеет место идеальный контакт всюду кроме области $S_{cr} = \{x_1 = 0, d_0 - l_0 \leqslant x_3 \leqslant d_0 + l_0\}$, где имеет место отсутствие напряжений.

После отделения временного множителя, краевая задача, описывающая установившиеся антиплоские колебания составного слоя, относительно ненулевой компоненты вектора смещения $u_2^{(j)} = u^{(j)}(x_1, x_3)$ имеет вид

$$u_{,11}^{(j)} + u_{,33}^{(j)} + k_{2j}^2 u^j = 0, \quad (j = 1, 2)$$

при $x_3 = 0$,

$$u^{(j)}(x_1{,}0) = 0, \qquad (2.1)$$

при $x_3 = h$,

$$u_{,3}^{(1)}(x_1, h) = -p, \quad x_1 \in [c, d]\,,$$

$$u_{,3}^{(1)}(x_1, h) = 0, \quad x_1 \notin [c, d]\,,$$

$$u_{,3}^{(2)} = 0, \quad \forall x_1,$$

при $x_1 = 0$,

$$u^{(1)} = u^{(2)},$$
$$\mu_1 u_{,1}^{(1)} = \mu_2 u_{,1}^{(2)}, \quad x_3 \notin S_{cr}, \qquad (2.2)$$
$$u_{,1}^{(1)} = u_{,1}^{(2)} = 0, \quad x_3 \in S_{cr}.$$

Величины, имеющие индексы 1 и 2, относятся к первому и второму полуслоям соответственно, k_{21}, k_{22} — волновые числа поперечных волн,

$$k_{21}^2 = \frac{\rho_1 \omega^2}{\mu_1}, \quad k_{22}^2 = \frac{\rho_2 \omega^2}{\mu_2}.$$

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [12].

Обратная задача идентификации трещины сводится к определению двух параметров, характеризующих вертикальное положение трещины, в режиме позиционного или частотного зондирования по полям смещений, измеренным на верхней границе одной из частей составного слоя

$$\begin{gathered} u(x_1,\omega_0)|_{S_{21}} = g_2(x_1,\omega_0),\\ S_{21} = \{x_1 \in [a,b], x_3 = h\} \end{gathered} \tag{2.3}$$

или

$$\begin{gathered} u(h,\omega)|_{\Omega} = f_2(h,\omega),\\ \Omega = \{\omega \in [\omega_1,\omega_2]\}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Следуя стандартной схеме исследования обратных задач, на первом этапе строится решение прямой задачи. В результате несложных математических действий получены представления полей смещений в каждом из полуслоев, которые представлены в виде рядов Фурье

$$\begin{gathered} u^{(1)}(x_1,x_3) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\alpha_n^{(1)}x_1} A_n^{(1)}\sin(\beta_n x_3) - \\ - \frac{F_1(x_1,x_3)}{h}, \\ u^{(2)}(x_1,x_3) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\alpha_n^{(2)}x_1} A_n^{(2)}\sin(\beta_n x_3), \end{gathered} \tag{2.5}$$

где

$$A_n^{(1)} = \int_0^h \frac{\left[u_{,1}^{(1)} i + u^{(1)}\right]}{\alpha_n^{(1)}} \sin(\beta_n\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

$$A_n^{(2)} = \int_0^h \frac{\left[u_{,1}^{(2)} i + u^{(2)}\right]}{\alpha_n^{(1)}} \sin(\beta_n\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

$$F_1(x_1,x_3) = = ip\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-i\alpha_n|d_0-l_0-x_1|} - e^{-i\alpha_n|d_0+l_0-x_1|}}{\beta_n},$$

$$\beta_n = \frac{\pi}{h}\left(\frac{1}{2}+n\right), \quad \alpha_n^{(j)} = \sqrt{k_{2j}^2 - \beta_n^2},$$

$$n = 1,2,\dots.$$

Функция раскрытия трещины определяется выражением

$$\chi(x_3) = \lim_{x_1\to+0} u^{(1)}(x_1,x_3) - \lim_{x_1\to-0} u^{(2)}(x_1,x_3).$$

Введем безразмерные величины

$$\frac{\pi}{h}\xi = \eta, \quad \frac{\pi}{h}x_3 = y,$$

$$\frac{\pi}{h}(d_0 - l_0) = \theta_1, \quad \frac{\pi}{h}(d_0 + l_0) = \theta_2,$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \theta, \quad \gamma_n = \frac{1}{2} + n$$

$$\chi(\xi) = \chi\left(\frac{h}{\pi}\eta\right) = p(\eta), \quad \frac{\pi}{h}k_{2j} = k_j,$$

$$\alpha_n^{(j)} = \frac{\pi}{h} i\mu_n^{(j)}, \quad \mu_n^{(j)} = \sqrt{\gamma_n^2 - k_j^2}.$$

Условия отсутствия напряжений на трещине (2.2) и выражения (2.5), позволяют сформулировать интегральные уравнения первого рода относительно неизвестной функции раскрытия трещины

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} p(\eta)K_1(\eta,y)d\eta = F_1(y), \tag{2.6}$$

$$K_1(\eta,y) = \frac{ih}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n^{(2)}}{1+\theta\cdot\frac{\mu_n^{(2)}}{\mu_n^{(1)}}}\sin(\gamma_n\eta)\sin(\gamma_n y),$$

$$\theta = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$F_1(y) = = p\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mu_n^{(2)}}{\gamma_n}\frac{e^{-\mu_n^{(1)}|\theta_1|} - e^{-\mu_n^{(1)}|\theta_2|}}{1+\theta\frac{\mu_n^{(2)}}{\mu_n^{(1)}}}\sin(\gamma_n y),$$

$$y,\ \eta \in S_{cr}.$$

Ядро интегрального уравнения имеет неявно выраженную гиперсингулярную особенность. Для выделения главной части ядра необходимо применить формулы суммирования тригонометрических рядов. В результате получаем представление ядра $K_1(\eta,y)$ в виде суммы регулярной и гиперсингулярной частей

$$K_1(\eta,y) = K_1^{\mathrm{syng}}(\eta,y) + K_1^{\mathrm{reg}}(\eta,y),$$

$$K_1^{\mathrm{syng}}(\eta,y) = -\frac{ih}{8\pi(1+\theta)}\frac{\cos(\frac{\eta-y}{2})}{\sin^2\frac{\eta-y}{2}},$$

$$K_1^{\text{reg}}(\eta, y) = i\frac{h}{\pi}\left[\frac{1}{8(1+\theta)}\frac{\cos(\frac{\eta+y}{2})}{\sin^2\frac{\eta+y}{2}} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mu_n^{(2)}}{1+\theta\frac{\mu_n^{(2)}}{\mu_n^{(1)}}} - \frac{\gamma_n}{1+\theta}\right)\sin(\gamma_n\eta)\sin(\gamma_n y)\right].$$

Введем следующую параметризацию для прямолинейной вертикальной трещины:

$$\eta = d_0 + l_0 t, \quad y = d_0 + l_0\tau, \quad t,\, \tau \in [-1, 1].$$

Осуществим асимптотический анализ интегрального уравнения (2.6) в предположении малости линейного размера дефекта, при $l_0 \to 0$, с учетом асимптотической оценки ядра

$$K_1^{\text{syng}}(t, \tau) \sim \frac{C}{l_0(t-\tau)^2},$$
$$C = \text{const}, \quad K_1^{\text{reg}}(t, \eta) \to 0.$$

В результате имеем интегральное уравнение с постоянной правой частью

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{p(t)}{(t-\tau)^2}\,\mathrm{d}t = F, \quad t,\, \tau \in [-1{,}1], \qquad (2.7)$$

$$F = -2\pi p(1+\theta)h^{-1} i\, l_0 \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\mu_n^{(2)}}{\gamma_n}\frac{e^{-\mu_n^{(1)}|\theta_1|} - e^{-\mu_n^{(1)}|\theta_2|}}{(1+\theta\frac{\mu_n^{(2)}}{\mu_n^{(1)}})}\sin(\gamma_n d_0).$$

В классе функций $C^{(1)}[-1,\, 1]$ интегральное уравнение (2.7) имеет следующее решение

$$p(t) = W_0\sqrt{1-t^2}, \quad W_0 = \frac{F}{\pi}. \qquad (2.8)$$

Таким образом, с учетом малости относительного размера трещины удается получить аналитическое выражение для функции раскрытия трещины.

На основе (2.8) и (2.5) можем построить выражение для волнового поля всюду в слое, в частности, при решении обратной задачи интерес представляет выражение поля смещения на верхней границе слоя, например, справа от трещины оно будет иметь следующий вид

$$u^{(2)}(x_1, h) =$$
$$= u^{\text{эт}} + \left(\sum_{n=0}^{N} + \sum_{N+1}^{\infty}\right) e^{i\alpha_n^{(2)}x_1} A_n^*, \quad (2.9)$$

$$u^{\text{эт}} = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\alpha_n^{(2)}x_1} C_n^{(1)}\sin(\beta_n h),$$

$$C_n^{(1)} = ip(-1)^n\frac{(e^{i\alpha_n^{(1)}|d_0-l_0|} - e^{i\alpha_n^{(1)}|d_0+l_0|})}{\beta_n},$$

$$A_n^* = -\frac{l_0^2\overline{F}}{4\pi i\left(1+\theta\frac{\alpha_n^{(2)}}{\alpha_n^{(1)}}\right)}\sin(\beta_n d_0)\sin(\beta_n h),$$

где число N определяет количество бегущих волн во втором полуслое. Отметим, что амплитуды распространяющихся волн пропорциональны квадрату полудлины трещины.

Решение обратной задачи восстановления параметров трещины строится на основе решения прямой задачи (2.9) и дополнительной информации.

Допустим, что в качестве дополнительной информации заданы амплитудные значения поля перемещения на верхней границе слоя при частотном зондировании. Для однозначной идентификации рассмотрим две частоты k_1 и k_2, на каждой из которых имеются по две бегущие волны и заданы $A_0^*(k_1)$, $A_1^*(k_1)$ — амплитуды первой и второй волн на частоте k_1, а также $A_0^*(k_2)$, $A_1^*(k_2)$ — на частоте k_2. На основании выражения для амплитуд (2.9) задача идентификации трещины сводится к поэтапному определению ее параметров.

Для определения d_0 ($d_0 > 0, d_0 < h$) рассматриваем отношение амплитуд первой и второй волн

$$\mu_1 + i\mu_2 = -\frac{A_0^{(*)}(k_1)}{A_1^{(*)}(k_1)}.$$

Получаем трансцендентное уравнение, численное решение которого не представляется сложным и определяет значение идентифицируемого параметра d_0

$$\left(1+\theta\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}}\right)\sin(\gamma_0 d_0)\sin(\beta_0 h) +$$
$$+ \mu_1\left(1+\theta\frac{\alpha_0^{(2)}}{\alpha_0^{(1)}}\right)\sin(\gamma_1 d_0)\sin(\beta_1 h) = 0. \qquad (2.10)$$

Таблица 1. Результаты восстановления параметров вертикальной трещины

Точные значения	Приближенное значение	Погрешность(%)
$l = 0{,}001, \quad d_0 = 0{,}2215$	$l^{\text{пр}} = 0{,}001, \quad d_0^{\text{пр}} = 0{,}2215$	$\varepsilon_l = 0{,}171$, $\varepsilon_{d_0} = 0{,}01$
$l = 0{,}001, \quad d_0 = 0{,}5$	$l^{\text{пр}} = 0{,}001, \quad d_0^{\text{пр}} = 0{,}5$	$\varepsilon_l = 0{,}172$, $\varepsilon_{d_0} = 0{,}005$
$l = 0{,}001, \quad d_0 = 0{,}8$	$l^{\text{пр}} = 0{,}001, \quad d_0^{\text{пр}} = 0{,}8$	$\varepsilon_l = 0{,}172$, $\varepsilon_{d_0} = 0{,}003$
$l = 0{,}021, \quad d_0 = 0{,}2215$	$l^{\text{пр}} = 0{,}0216, \quad d_0^{\text{пр}} = 0{,}2212$	$\varepsilon_l = 2{,}831$, $\varepsilon_{d_0} = 0{,}124$
$l = 0{,}1, \quad d_0 = 0{,}2215$	$l^{\text{пр}} = 0{,}1078, \quad d_0^{\text{пр}} = 0{,}2245$	$\varepsilon_l = 7{,}843$, $\varepsilon_{d_0} = 1{,}355$
$l = 0{,}021, \quad d_0 = 0{,}8$	$l^{\text{пр}} = 0{,}0216, \quad d_0^{\text{пр}} = 0{,}7995$	$\varepsilon_l = 2{,}85$, $\varepsilon_{d_0} = 0{,}06$
$l = 0{,}1, \quad d_0 = 0{,}8$	$l^{\text{пр}} = 0{,}1082, \quad d_0^{\text{пр}} = 0{,}7984$	$\varepsilon_l = 8{,}168$, $\varepsilon_{d_0} = 0{,}199$

На следующем этапе, с учетом найденного из (2.10) параметра d_0, определяем длину трещины l_0 как среднее арифметическое значение из выражений

$$
\begin{gathered}
l_{00} = \sqrt{\frac{4A_0^{(*)}\pi(1+\theta\frac{\alpha_0^{(2)}}{\alpha_0^{(1)}})}{\overline{F}i\sin(\gamma_0 d_0)\sin(\beta_0 h)}},\\
l_{01} = \sqrt{\frac{4A_1^{(*)}\pi(1+\theta\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}})}{\overline{F}i\sin(\gamma_1 d_0)\sin(\beta_1 h)}},\\
\gamma_0 = \frac{1}{2}, \quad \beta_0 = \frac{\pi}{2h}, \quad \gamma_0 = \frac{3}{2}, \quad \beta_0 = \frac{3\pi}{2h}.
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Следуя изложенной схеме, был проведен вычислительный эксперимент, результаты которого приведены в табл. 1. Был рассмотрен слой толщины $h = 1$, состоящий из следующих материалов: алюминий ($x_1 < 0$) и медь ($x_1 > 0$). Относительная погрешность вычислений определялась по формуле $\varepsilon_l = \dfrac{|l - l^{\text{пр}}|}{l} 100$ %. Вычислительный эксперимент проводился при частотном зондировании на частотах, для которых в каждом полуслое имеется по 2 бегущие волны, $k_1 = 5, k_2 = 6{,}91$, источник колебания расположен в левом полуслое на расстоянии h от границы раздела, приемник — в правом (подобное расположение не имеет принципиального значения).

Были рассмотрены трещины различной относительной длины и заглубления. Так, для трещин, составляющих менее $0{,}02h$, погрешность восстановления длины дефекта не превышает 3 %. Параметр, характеризующий заглубление трещины, даже для трещин, длина которых, составляет $0{,}1h$, определяется с высокой точностью (с погрешностью менее 1 %). При этом стоит отметить, что для практических целей, в случае микродефектов, более актуальной представляется задача определения именно параметра, характеризующего местоположение дефекта.

Таким образом, следую предложенной схеме асимптотического анализа задачи, удается получить явные выражения или трансцендентные уравнения для определения параметров трещины, не прибегая к оптимизационным методам, требующим многократного решения прямой задачи. Асимптотический подход позволяет с точностью 1–5 % восстанавливать параметры трещины, зная всего лишь амплитудные значения двух бегущих волн.

Результаты численных экспериментов подтверждают эффективность предлагаемого асимптотического подхода для решения обратной задачи идентификации параметров прямолинейной трещины, расположенной на границе раздела сред в рамках установленного диапазона применимости.

Литература

1. *Герасимов В.Г., Покровский А.Д., Сухоруков В.В.* Неразрушающий контроль. М.: Высшая школа, 1992. 424 с.
2. *Ермолов И.Н., Алешин Н.П., Потапов А.И.* Неразрушающий контроль. Акустические методы контроля. М.: Физмалит, 1991. 283 с.
3. *Краснощеков А.А., Соболь Б.В., Соловьев А.Н., Черпаков А.В.* Идентификация трещиноподобных дефектов в упругих элементах конструкций на основе эволюционных алгоритмов // Дефектоскопия. 2011. №6. С. 67–75.
4. *Fomenko S.I., Golub M.V., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S.* In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. Iss. 13. P. 7444–7456.
5. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Eremin A.A.* Guided wave based nondestructive testing and

evaluation of effective elastic moduli of layered composite materials // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23. P. 56–60.

6. *Соловьев А.Н., Соболь Б.В., Красноцеков А.А.* Идентификация и исследование критического состояния поперечной трещины в полосе с накладкой на основе искусственных нейронных сетей // Дефектоскопия. 2014. №8. С. 23–35.
7. *Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A.* Hypersingular shape sensitivity boundary integral equation for crack identification under harmonic elastodynamic excitation // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2007. Vol. 196. P. 2596–2618.
8. *Shifrin E.I.* Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // Mechanical Systems and Signal Processing. 2016. Vol. 70–71. P. 613–624.
9. *Ватульян А.О., Явруян О.В.* Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ.2006. №4. С. 714–724.
10. *Ватульян А.О., Азарова П. А.* Об асимптотическом анализе задачи о реконструкции трещины в вязкоупругом слое // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №3. С. 21–29.
11. *Ватульян А.О. Беляк О. А.* К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. 2006. №10. С. 33-39.
12. *Ворович И.И., Бабешко В.В.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1989. 320 с.

References

1. Gerasimov, V.G., Pokrovskii, A.D., Sukhorukov, V.V. *Non-destructive testing.* Visshaya shkola, Moscow, 1992. 424 p. (In Russian)
2. Ermolov, I.N., Aleshin, N.P., Potapov, A.I. *Non-Destructive testing. Acoustic control methods.* Fizmatlit, Moscow, 1991. 283 p.
3. Krasnoshchekov, A.A., Sobol, B.V., Soloviev, A.N., Scoops, A.V. Identification of defects crack-like defects in elastic structural elements on the basis of evolutionary algorithms. *Defectoscopy*, 2011, no. 6, pp. 67–75. (In Russian)
4. Fomenko, S.I., Golub, M.V., Bui, T.Q., Zhang, Ch., Wang, Y.-S. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, iss, 13, pp. 7444–7456.
5. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Eremin, A.A. Guided wave based nondestructive testing and evaluation of effective elastic moduli of layered composite materials. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 23, pp. 56–60.
6. Soloviev, A.N., Sobol, B.V., Krasnoshchekov, A.A. Identification and investigation of the critical state of a transverse crack in a band with an overlay based on artificial neural networks. *Defectoscopy*, 2014, no. 8, pp. 23–35. (In Russian)
7. Ciarletta, M., Iovane, G., Sumbatyan, M.A. Hypersingular shape sensitivity boundary integral equation for crack identification under harmonic elastodynamic excitation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2007, vol. 196, pp. 2596–2618. (In Russian)
8. Shifrin, E.I. Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, vol. 70–71, pp. 613–624.
9. Vatulyan, A.O., Yavruyan, O.V. Asymptotic approach to the problems of identification of cracks. *Applied mathematics and mechanics*, 2006, vol. 70, no. 4, pp. 714–724. (In Russian)
10. Vatulyan, A.O., Azarova P.A. On the asymptotic analysis of the problem of reconstruction of cracks in the viscoelastic layer. *Ecological bulletin of the research centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2011, no. 3, pp. 21–29. (In Russian)
11. Vatulyan, A.O. Belyak, O.A. The reconstruction of small cavities in an elastic layer. *Defectoscopy*, 2006, no. 10, pp. 33–39. (In Russian)
12. Vorovich, I.I., Babeshko, V.V. *Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains.* Nauka, Mooscow, 1989. (In Russian)

Статья поступила 23 апреля 2018 г.