

Ф И З И К А

УДК 551.583+519.6

doi: 10.31429/vestnik-15-2-55-62

ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ ОТКРЫТЫХ ВОДОТОКОВ И ВОДОЕМОВ

Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Виноградова Т. А.

NUMERICAL MODELS FOR THE CALCULATION OF HYDROPHYSICAL PROCESSES IN THE OPEN CHANNELS AND WATER BODY SYSTEMS

A. F. Voevodin¹, V. S. Nikiforovskaya¹, T. A. Vinogradova²

¹ Lavrentjev Institute of hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

² Institute of Earth Sciences, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
e-mail: lapteva@sscc.ru

Abstract. The present work is devoted to carry out numerical modeling for the combine mathematical model testing. In this model a possible junction of different dimension mathematical models is foreseen. It is researched the possibility of this model using for the hydro-physical (thermal, water-salt) description unsteady processes in the water bodies under the influence of nature factors and different actions of the water management.

The research used the programs involving in the structure of mathematical model complex developed in HI SB RAS and based on one dimensional shallow water equations (Saint-Venant equations) and mean for solution of water resources efficient management problems.

The represent numerical results (a sea-water intrusion into fresh water the Ob-Taz outfall sections, formation of thermally-stratified unsteady flows at standing water body) are showed the possibility for using of the complex mathematical model, as well as its efficacy and economy for the study of hydro-physical processes in the open channels and water bodies systems contained the waterways with very different morphology and geometrical sizes.

Keywords: mathematical models, real objects, calculate modeling, density stratification.

Введение

В последние десятилетия наблюдается усиленное воздействие антропогенного фактора на природные водные объекты, все увеличивающаяся масштабность такого вмешательства: строительство гидроэлектростанций, водоснабжение населенных пунктов, особенно орошение пахотных земель и забор (отвод) воды на промышленные, народнохозяйственные нужды. Это приводит к резкому ухудшению экологической ситуации в речном бассейне, к нарастанию риска возникновения ряда гидрологических, геоморфологических явлений (порой необратимых), которые создают серьезную угрозу проживанию человека.

Основной целью настоящей работы является проведение численного моделирования

для исследования эффективности использования комплексной модели описания процессов формирования гидрофизических и экологических режимов в реальных водных объектах. Этим она отличается от [1, 2], в первой из которых исследовано формирование в объектах гидравлических режимов в реальных условиях; во второй — гидравлических и температурных режимов для тестовых условий. Таким образом, данная работа фактически является продолжением упомянутых выше исследований.

Тестируемая комплексная модель, разработанная в Институте гидродинамики СО РАН (ИГиЛ СО РАН), при необходимости может использовать в своей работе разные по постановкам математические модели (одномерные, двумерные продольно-вертикальные и

Воеводин Анатолий Федорович, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН; e-mail: voevodin@hydro.nsc.ru.

Никифоровская Валентина Сергеевна, канд. техн. наук, старший научный сотрудник института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН; e-mail: lapteva@sscc.ru.

Виноградова Татьяна Александровна, канд. геогр. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры гидрологии суши Санкт-Петербургского государственного университета; e-mail: vinograd1950@mail.ru.

их комбинации). Водный объект может представлять собой водохозяйственную систему, включающую в себя в общем случае сильно различающиеся друг от друга по морфометрическим и гидравлическим характеристикам объекты (отдельные водотоки, водоемы, озера, их взаимосвязанные системы (например, озерно-речная система с притоками/водозаборами и др.)). С помощью использования комплексной модели при численном моделировании может быть предусмотрено некоторое многообразие состава водного объекта, а также выбор соответствующих математических моделей, наиболее адекватно описывающих исследуемый физический процесс.

В моделях предусмотрены разные возможности учета воздействия на водный объект различных физических или каких-либо других внешних факторов. Гибкость использования комплекса программ обеспечивается предусмотренным набором соответствующих взаимосвязей (условий сопряжения) между отдельными частями исследуемого водного объекта.

1. Описание моделей

Основными факторами, определяющими формирование в водных объектах гидрофизических процессов, являются скорости течения воды, ее температура, метеоусловия, а также концентрация субстанций, поступающих в водные объекты, сбросов вместе со сточными водами промышленных, бытовых предприятий и сельскохозяйственных комплексов. Примером может служить тепловое загрязнение водной среды прудов-охладителей АЭС. В устьевых областях северных рек — это возможное водно-солевое загрязнение водной среды в результате проникновения соленых морских вод в устьевые области северных рек при определенных в этих регионах метеоусловиях и др.

Численное моделирование гидрофизических процессов в водных объектах проводилось с помощью комплексной модели, используя предусмотренную в ней возможность соединения одномерных и двумерных математических моделей в любой последовательности и любом сочетании [1, 3].

1. Одномерные (1D) модели гидрофизических процессов в водотоках и их системах.

В комплексной модели гидрофизических процессов для описания гидродинамических процессов используется осредненная по попе-

речному сечению одномерная система обобщенных уравнений Сен-Венана с предусмотренным в ней учетом воздействия на водный объект климатологических факторов (ветер, атмосферное давление) [2, 4]:

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vQ) + g\omega \frac{\partial z}{\partial x} = \\ = -g\omega \frac{Q^2}{K^2} - \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} + \xi BW_l |W|, \end{aligned}$$

— изменение плотности воды [2]:

$$\rho(x, t) = f(T, S).$$

Температура $T(x, t)$ и соленость $S(x, t)$ определяются из уравнений баланса консервативной примеси и тепла (уравнения продольной дисперсии)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\omega T) + \frac{\partial}{\partial x}(QT) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega E \frac{\partial T}{\partial x} \right) - K_T B(T - T_e) + T_q, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega S) + \frac{\partial}{\partial x}(QS) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega E \frac{\partial S}{\partial x} \right) + S_q,$$

где t — время; x — координата, отсчитываемая вдоль оси русла; $Z(x, t)$ — уровень свободной поверхности; $Q(x, t)$ — расход воды; $q(x, t)$ — распределенный по длине русла боковой приток; $B(h, x)$, $\omega(h, x)$, $K(h, x)$ — соответственно ширина свободной поверхности, площадь поперечного сечения и модуль расхода при глубине h ; g — ускорение силы тяжести; $p_a(x, t)$ — атмосферное давление; $W_l(x, t)$ — компонента скорости ветра вдоль оси русла; $|W(x, t)|$ — модуль скорости ветра; $\rho(x, t)$ — плотность воды; ξ — коэффициент ветрового напряжения. $T_q(x, t)$, $S_q(x, t)$ — притоки тепла и соли, поступающие вместе с боковым притоком $q(x, t)$; k_T — коэффициент теплообмена; T_0 — так называемая равновесная температура окружающей среды; $E(h, x)$ — коэффициент продольной дисперсии. Для его вычисления использовалась формула Харлемана [2, 4] $E = 20,2 \cdot \sqrt{g} \cdot |v| \cdot R/C$, где R — гидравлический радиус, C — коэффициент Шези.

Искомыми являются следующие функции: расход $Q(x, t)$, уровни воды $Z(x, t)$, а также плотность воды $\rho(x, t)$, ее температура $T(x, t)$

и концентрация содержащихся в водном потоке примесей (субстанций) $S(x, t)$.

Контроль работы комплексной модели в рамках одномерного представления происходящих в водном объекте физических процессов были использованы универсальные программы DTERM и DSOLT. Реализованная в программе DTERM математическая модель переноса тепла используется для исследования теплового загрязнения водных объектов. В программе DSOLT — математическая модель переноса тепла и субстанции (соли) для исследования экологического состояния водной среды с (и без) учета изменения ее плотности.

Эти программы являются составными частями разработанного в Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН комплекса программ DSIGMA, который после всесторонней апробации и успешной адаптации к условиям реальных объектов был принят в Государственный Фонд Алгоритмов и Программ (ГосФАП СССР) [5, 6].

2. Двумерная (продольно-вертикальная) модель (2D) температурно-стратифицированных течений в глубоких водоемах вытянутой формы.

Основой этой модели являются двумерные уравнения, полученные путем осреднения по ширине русла или водотока трехмерных уравнений гидродинамики и предположения о гидростатическом законе давления [2, 7],

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\varsigma + \frac{1}{\rho_0} \int_{z_d}^{\varsigma} \rho dz \right) + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} \left(b \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{k}{b} \tau,$$

$$\frac{\partial (bu)}{\partial x} + \frac{\partial (bw)}{\partial z} = 0,$$

где

$$k = \sum_1^2 \left[1 + \left(\frac{\partial b_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial b_i}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\tau = \frac{\lambda}{8} |u| u; \quad \rho = \rho(T, S).$$

Здесь t — время; x, z — продольная (горизонтальная) и вертикальная декартовы координаты; $u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$ — горизонтальная и

вертикальная составляющие скорости соответственно; $\zeta(x, t)$ — уровень свободной поверхности; $b(x, z)$ — ширина русла; $\rho(T, S)$ — плотность жидкости; ρ_0 — характерное значение плотности; ν_t — коэффициент, равный сумме молекулярной и турбулентной вязкостей; τ — сопротивление трения (касательное напряжение) на боковых поверхностях; λ — коэффициент трения.

Уравнение переноса тепла и солёности получены путем осреднения соответствующих трехмерных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \\ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} \left(b K_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(Q_T - \frac{k}{b} q_n \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} \left(b K_S \frac{\partial S}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

где $T(x, z, t)$, $S(x, z, t)$ — температура и солёность жидкости; K_T, K_S — коэффициенты турбулентной теплопроводности и диффузии; $\rho_0 c_0$ — произведение средней плотности и коэффициента теплоемкости; q_n — поток тепла через боковую поверхность; Q_T — количество тепла, поступающее от источника, или объемный приток тепла.

Для вычисления плотности используется уравнение состояния: $\rho = \rho(T, S)$. Согласно этой модели неизвестными функциями являются: распределение расходов и уровней воды во времени и пространстве (уравнения неразрывности и движения записаны в переменных уровень–расход), поля вертикальных и горизонтальных скоростей, а также поля распределения (по пространству и времени) температур и солёности воды и зависящих от них полей плотности.

Математическая модель разработана для исследования гидротермических процессов и процессов массопереноса в слабопроточных стратифицированных по плотности узких глубоких водоемах.

3. Комплексная двумерно-одномерная (одномерно-двумерная) математическая модель для исследования гидротермических процессов в водных объектах.

Эта математическая модель разработана на базе приведенных одномерной и двумерной (продольно-вертикальной) моделей и представляет собой их комбинацию в любом сочетании при любой последовательности [1, 3]. Комплексная модель используется

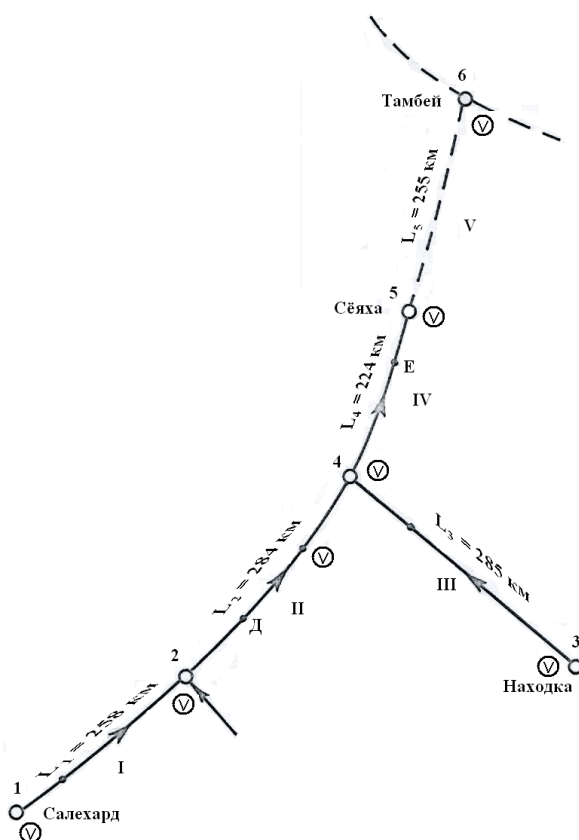


Рис. 1. Расчетная схема Обь-Тазовской устьевой области

для исследования гидрофизических процессов в водных объектах, в состав которых могут входить разные по геометрическим размерам (масштабам) русла и водоемы с соответствующими им морфометрическими и гидравлическими характеристиками.

2. Формулировка начальных и граничных условий сопряжения

С математической точки зрения решение рассматриваемых задач сводится к решению начально-краевых задач для эволюционных квазилинейных уравнений в областях сложной структуры (одномерно-двумерный комплекс), включающих в общем случае одномерные и двумерные области (в любой последовательности) со свободной границей. Для однозначного определения искомых параметров течения необходимо задание начальных и граничных условий, а также условий сопряжения элементов системы. Более подробное описание приведено в [7, 8].

Численный метод разработан на основе неявных абсолютно устойчивых разностных

схем и методов расщепления по физическим процессам. Разработанные алгоритмы решения систем разностных уравнений эффективно учитывают структуру матрицы системы разностных уравнений, что обеспечивает экономичность методов в случае задач большой размерности, что очень важно при решении сложных систем. Использование неявных разностных схем обеспечивает возможность проведения расчетов рассматриваемых процессов с крупными шагами по времени [8], что очень важно при численном моделировании гидродинамических процессов большой продолжительности по времени (например, паводки, половодья, круглогодичный цикл и др.).

3. Результаты расчетов

Пример 1. Проникновение морских вод в Обско-Тазовскую устьевую область [9, 10].

Численные расчеты распространения соленого клина в Обско-Тазовской устьевой области проводились по комплексной модели с использованием двух разных режимов ее работы.

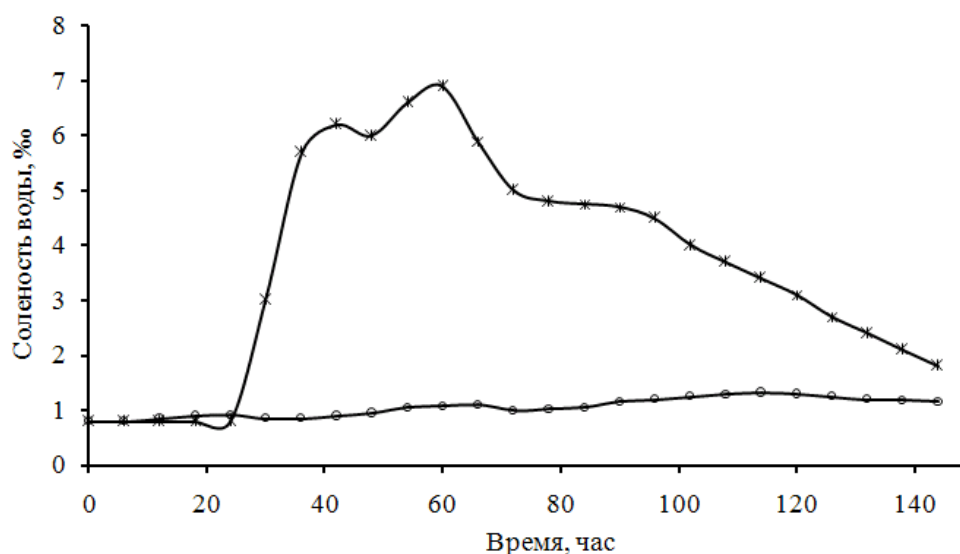


Рис. 2. Распределение соли во времени в точке Е: вариант 1 — линией с крестиками, вариант 2 — с кружочками

Режим 1. Постановка одномерная (1D). При ней область расчета протяженностью 1306 км, представленная топологической схемой типа «тройник»: от Салехарда и п. Находка до п. Тамбей — морской границы устьевой области, была разбита на 5 расчетных участков различной длины рис. 1.

В качестве граничных условий были заданы: в п. Тамбей — изменение во времени уровня воды, переменной температурой (с -1 до 1°C) и солёностью, изменяющейся в диапазоне от 20 до 30 ‰, соответствующие типовому ветровому нагону; в пунктах Салехард и Находка — постоянные во времени расходы пресной воды соответственно 29 600 и 4930 $\text{м}^3/\text{с}$, каждый из них характеризуется соответственной постоянной температурой 15,7 и $8.9 = \text{const}$. При расчетах был учтен сосредоточенный приток пресной воды р. Надым (расход 494 $\text{м}^3/\text{с}$, температурой 12°C). С начальными условиями, полученными в результате расчета установившегося режима, наступившего на 20 сутки расчета на установление, выполненного при постоянном уровне моря (0,10 м) в п. Тамбей, были проведены два варианта расчетов: с учетом (вариант 1) и без учета (вариант 2) метеорологических факторов (ветер, атмосферное давление) и изменения плотности. Расчеты проводились с постоянным шагом по времени 2 часа, длительность каждого расчета составляла 6 суток. На рис. 2 представлено изменение соле-

ности воды во времени для обоих вариантов, обозначенных линией с крестиками (вариант 1) и линией с кружочками (вариант 2) в пункте Е, расположенном в соответствии с принятой расчетной схемой в 55 км выше п. Се-Яха и в 310 км от п. Тамбей (рис. 1). В пункте D (п. Ямсальский бар) во всех расчетах вода оставалась пресной.

Режим 2. Комбинированная постановка — (1D+2D). При ней из рассматриваемой расчетной области протяженностью 1306 км, на 826-ом километровом участке системы «тройник» от п. Салехарда до слияния рек Оби с Тазом использовалась одномерная математическая модель, от слияния рек до п. Тамбей (480 км) — двумерная (рис. 1). Аналогично режиму 1 были проведены численные расчеты с единственным отличием — назначение в двумерной области расчетной сетки с 30-ю интервалами по горизонтали и 10-ю — по вертикали. Расчеты выполнялись с теми же параметрами счета и граничными условиями. Начальные условия соответствовали установившемуся режиму, полученному аналогичным режиму 1 образом.

На рис. 3 представлены результаты положения клина соленой воды в Обской губе в различные моменты времени, выполненного с учетом воздействия ветра и барометрического давления (вариант 1), удовлетворительно согласуются с результатом расчета аналогичного режима 1. Согласно результатам в обоих

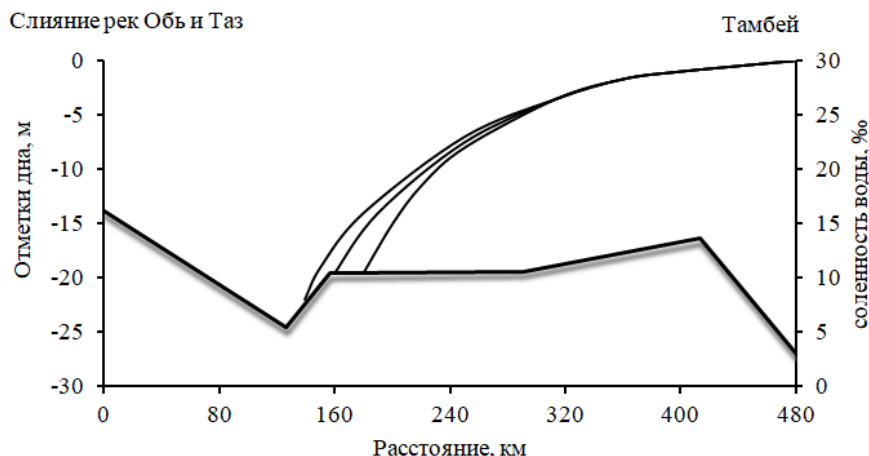


Рис. 3. Положение границы соленого клина в Обской губе в разные моменты времени: в начальный момент, в третьи и шестые сутки

режимах предельным вторжением морских вод в пресные можно считать район пункта Е, в котором солоноватость воды не превышает 6 ‰. Во всех расчетах режимов 1 и 2 как с учетом, так и без учета ветра и барометрического давления в пункте Д (Ямсальский бар) вода оставалась пресной.

В качестве контроля по одномерной программе DSOLT были продублированы расчеты вариантов 1, 2, выполненные по комплексной программе в режиме 1. Полученные результаты подтвердили рассчитанную по комплексной модели дальность распространения морской воды по Обской губе. В пункте Е солёность воды составляла порядка 4–5 ‰, в пункте Д вода оставалась прежней.

Пример 2. Расчет термически-стратифицированного течения в непроточном водоеме [7].

В качестве исходных данных была использована информация, соответствующая предполагаемой морфометрии Аральского моря периода времени, когда оно еще представляло собой непроточный водоем вытянутой формы: его длина 500 км, при отметке воды $z = 33,0$ м имеет площадь зеркала и объем наполнения, равные соответственно $\Omega = 22,75$ тыс. км² и $W = 141$ км³.

При численных расчетах водоем был представлен в виде водного объекта, составленного из двух расчетных участков по 250 км. Восточный участок — мелководный (глубина до 9 м, ширина до 110 км, объем наполнения 58 км³) и западный — глубоководный

(глубиной до 45 м, шириной до 45 км, объемом наполнения 83 км³). Температура воды составляла 0°C, солёность 78 ‰. В течение длительного времени ($t = 1,5$ года) в его мелководную часть поступает сток речной воды.

Гипотетический гидрограф (ежемесячный расход воды), поступающий в восточную часть водоема (восточный участок), изменение температуры воды, температуры атмосферного воздуха и солёности воды во времени приведены в [7].

Численные расчеты круглогодичного цикла были проведены по комбинированной программе, использующей при расчете на участках объекта разное сочетание разноразмерных математических моделей. А именно, в режимах (1D+1D) и (2D+2D) на обоих участках были использованы модели одноименной размерности. В режиме (1D+2D) — разноименной: на мелководном участке использовалась одномерная модель, тогда как на глубоководном — двумерная. На рис. 4 и 5 представлены распределения температуры по длине расчетных участков для различных (наиболее интересных) сезонов года, рассчитанные по комбинированной модели в режиме (2D+2D). Изменение концентрации солёности (примеси) было незначительным. Результаты контрольных расчетов круглогодичного температурного режима, проведенных по одномерной программе DTERM, согласуются с результатами, полученными по комбинированной программе.

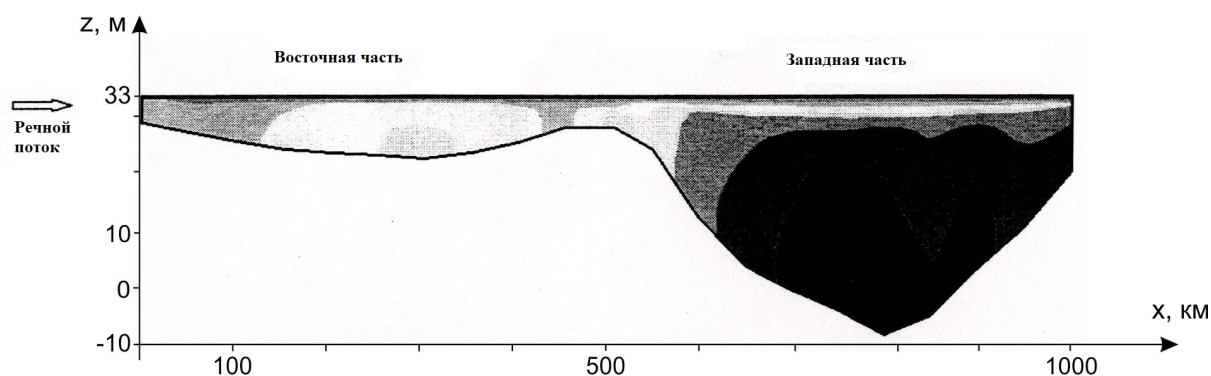


Рис. 4. Распределение температуры по длине расчетных участков в весенний период времени по комбинированной программе (режим 2D+2D)

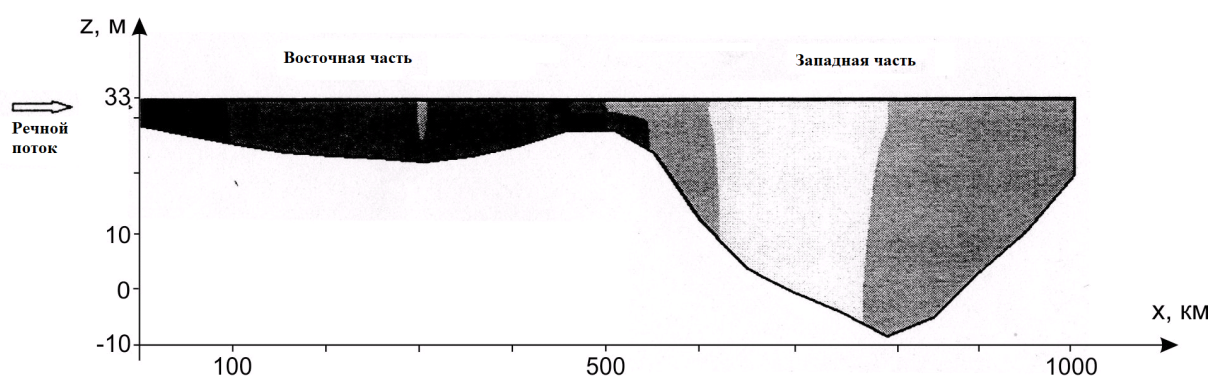


Рис. 5. Распределение температуры по длине расчетных участков в осенний период времени по комбинированной программе (режим 2D+2D)

Выводы

В работе проведено тестирование комбинированной математической модели. Результаты тестирования удовлетворительно согласуются с результатами аналогичных исследований, проведенных с использованием отдельных одномерных и двумерных (продольно-вертикальных) математических моделей в автономном режиме [7]. Полученные результаты подтверждают возможность использования комбинированной модели для эффективного решения широкого круга задач прикладной гидродинамики.

Литература

1. Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С. Комплексная математическая модель для исследования волновых процессов в проточных системах открытых русел и водоемов // *Метеорология и гидрология*. 2012. №4. С. 64–74.
2. Никифоровская В.С. Численное моделирование тепломассопереноса в водных объектах // *Метеорология и гидрология*. 2013. №4. С. 79–88.
3. Воеводин А.Ф., Виноградова Т.А., Никифоровская В.С. Численные модели для расчёта гидрофизических процессов в водных объектах Сибири и Крайнего Севера // *Труды V Всероссийской конференции «Ледовые и термические процессы на водных объектах России»*. Владимир, 11–14 октября 2016 г. М.: Изд-во РГАУ-МСХА. 2016. С. 71–76.
4. Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С., Овчарова А.С. Численные методы решения задачи о неустановившемся движении воды на устьевых участках рек // *Труды АНИИ*. Санкт-Петербург: Гидрометеиздат. 1983. Т. 378. С. 23–34.
5. Комплекс гидравлических моделей для решения проблем рационального использования водных ресурсов / Рекламный проспект. Внешторгиздат, 1989. Изд. № 6120 МВ.
6. Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С., Данилова З.В. Комплекс программ DSIGMA для расчета неустановившихся течений воды в разветвленных системах открытых русел с учетом ее качества // *Алгоритмы и программы*

- мы. 1989. № 02. Рег. номер № 50880000681.
7. Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С. Численное моделирование температурно-стратифицированных течений в системах глубоких водоемов // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. №5. С. 29–38.
 8. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993. 230 с.
 9. Виноградова Т.А. Закономерности распространения волны половодья в Обско-Тазовской устьевой области. Автореф. ... канд. диссертации. ГГИ. Л., 1988.
 10. Квон В.И., Квон Д.В., Семчук А.Н., Никифоровская В.С. Численное моделирование приливно-отливных колебаний и солеспереноса в устьевой области реки Оби // Сб. науч. трудов «Экологический анализ региона (теория, методы, практика)». Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2000. С. 195–203.
 - 11–14 October 2016. RGAU-MSHA, Moscow, 2016, pp. 71–76. (In Russian)
 4. Voevodin, A.F., Nikiforovskaya, V.S., Ovcharova, A.S. Numerical methods for solving the problem of unsteady water movement at river mouths. *Proc. of AANII*. Vol. 378. Gidromeoizdat, St. Petersburg, 1983, pp. 23–34. (In Russian)
 5. *Complex of hydraulic models for solving problems of rational use of water resources. Advertising booklet*. Vneshtorgizdat, 1989. (In Russian)
 6. Voevodin, A.F., Nikiforovskaya, V.S., Danilova, Z.V. A set of DSIGMA programs for the calculation of unsteady water currents in branched open channel systems, taking into account its quality. *Algoritmy i programmy* [Algorithms and programs]. 1989. no. 2. Reg. no. 50880000681. (In Russian)
 7. Vasil'ev, O.F., Voevodin, A.F., Nikiforovskaya, V.S. Numerical modeling of temperature-stratified flows in deep water reservoirs. *Vichislitelnye Tecnologii* [Computational technologies], 2005, vol. 10, no. 5, pp. 29–38. (In Russian)
 8. Voevodin, A.F., Shygrin, S.M. *Methods for solving one-dimensional evolution systems*. Nauka, Novosibirsk, 1993. (In Russian)
 9. Vinogradova, T.A. *Regularities of the flood wave propagation in the Ob-Tazovskaya estuary region*. Abstract of Cand. Diss. GGI Pub., Leningrad, 1988. (In Russian)
 10. Kvon, V.I., Kvon, D.V., Semchykov, A.N., Nikiforovskaya, V.S. Numerical simulation of tidal oscillations and salt transfer in the estuary of the Ob River. *Proc. of science conf. "Ecological analysis of the region (theory, methods, practice)"*, SO RAN, Novosibirsk, 2000, pp. 195–203. (In Russian)

References

1. Voevodin, A.F., Nikiforovskaya, V.S. Complex mathematical model for the investigation of wave processes in flowing systems of open channels and reservoirs. *Meteorologiya i gidrologiya* [Hydrology and meteorology], 2012, no. 4, pp. 64–74. (In Russian)
2. Nikiforovskaya, V.S. Numerical modeling of heat and mass transfer in water bodies. *Meteorologiya i gidrologiya* [Hydrology and meteorology], 2013, no. 4, pp. 79–88. (In Russian)
3. Voevodin, A.F., Vinogradova, T.A., Nikiforovskaya, V.S. Numerical models for the calculation of hydrophysical processes in water objects of Siberia and the Far North. *Proc. of the Vth All-Russian Con. "Ice and Thermal Processes at Water Objects of Russia"*, Vladimir,