Механика

УДК 539.3

doi: 10.31429/vestnik-15-3-19-24

О СРАВНЕНИИ ТРЕЩИН ГРИФФИТСА–ИРВИНА И НОВОГО ТИПА ТРЕЩИН

Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Хрипков Д. А.

ON THE COMPARISON OF GRIFFITHS-IRWIN CRACKS WITH THE NEW TYPE OF CRACKS

O. M. Babeshko[1], O. V. Evdokimova[2], V. A. Babeshko[1,2], D. A. Khripkov[1]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. Based on the analysis of the causes of the occurrence of starting earthquakes and hidden defects, the existence of a new type of cracks, previously not described in terms of its strength properties, was revealed. In the plane problems of the theory of elasticity the Griffiths-Irwin cracks are characterized by smooth boundaries. The new type of cracks has a piecewise smooth boundary, and their shape, which is a crack in the form of a straight line segment, has been known for a long time. These cracks are less strong, since they allow a singular concentration of stresses in the medium. A way of the appearance of cracks of the new type, with which starting earthquakes are associated, is demonstrated. It is shown that with the correct choice of function spaces when solving boundary problems for the new type of cracks, they actually complement the Griffiths-Irwin cracks and make a definite contribution to the theory of strength and fracture of materials.

Keywords: block element, cracks, topology, boundary problems methods, exterior forms, block structures, coverings.

Введение

При исследовании граничных задач, описывающих поведение скрытых дефектов в материалах с покрытиями, а также геофизических процессов в зоне разломов литосферных плит (рис. 1) [1,2], было выявлено возникновение сингулярных концентраций контактных напряжениях при сближении плит, что приводит к стартовым землетрясениям. То же относится и к скрытым дефектам. В этих граничных задачах изучалось напряженно-деформированное состояние блочной структуры, состоящей из трех блоков: двух двумерных, моделируемых полубесконечными пластинами Кирхгофа, которые без трения лежали на третьем, моделируемым трехмерным упругим слоем. Внешнее воздействие осуществлялось вертикальными и горизонтальными усилиями, действующими на плиты, включающими и их вес [1]. При расширении постановок граничных задач, с целью охвата всех типов граничных условий, диктуемых различными типами внешний воздействий на блочные структуры, вновь было обнаружено устойчивое возникновение сингулярных концентраций напряжений в зонах контактов блочных элементом, теперь уже и в касательных составляющих векторов контактных напряжений [2]. Это обстоятельство дало повод

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: vestnik@kubsu.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2018 г. (проект 9.8753.2017/8.9), ЮНЦ РАН на 2018 г. (проект 00-18-04) № госрегистрации 01201354241, программ президиума РАН П-16 (проект 00-18-21) и П-52 (проект 00-18-29) и при поддержке грантов РФФИ (проекты 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

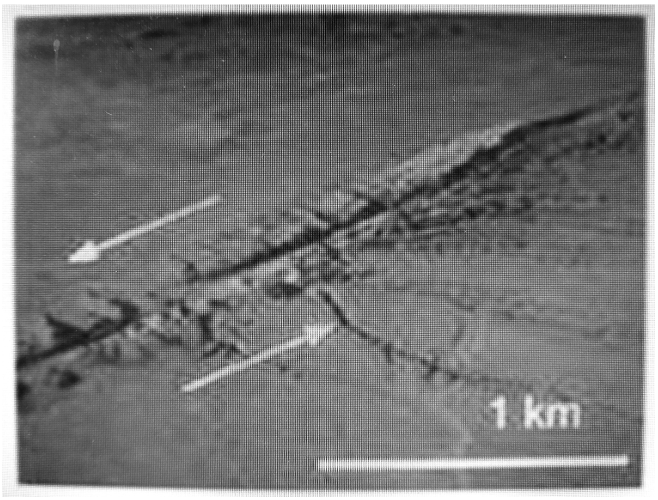

Рис. 1

для поиска единой причины, приводящей к описанным явлениям.

Возникало предположение, что причина состоит в специфике взаимодействия двумерного объекта — покрытия в форме пластины Кирхгофа, с трехмерным основанием. Однако рассмотрение задачи для трехмерных покрытий, заменивших двумерные на трехмерном основании [3], показало, что и в этом случае возникает сингулярная составляющая в контактных напряжениях в зоне взаимодействия сблизившихся, но не слипшихся блочных элементов. Объяснение этому феномену, приводящему к однотипным проявлениям свойств контактных напряжений, независимо от характера нагружения полностью сблизившихся, но не слипшихся блочных элементов, может быть дано, если предположить существование в зоне сблизившихся блочных элементов нового типа трещины.

Новизна обсуждаемой трещины состоит в механически оправданных новых прочностных свойствах полости-трещине в виде прямолинейного отрезка, которые ранее не были обнаружены. Этого не удавалось сделать в связи с отсутствием теории блочных структур и метода блочного элемента.

Оба типа трещин, Гриффитса–Ирвина с гладкой границей [4, 5] (рис. 2) и нового типа (рис. 3), можно построить с помощью приема, применявшегося Гриффитсем при построении своего типа трещин путем виртуального деформирования полости в форме эллипса до сближения противоположных полуэллипсов [4, 6], либо, что то же самое, используя гомеоморфизмы областей, содержащих полости, границы которых сближаются.

Более точно, речь идет о рассмотрении уже исследовавшихся трещин, имеющих в плоской задаче вид полости в упругой среде, полученной в результате извлечения прямолинейного отрезка. Эти трещины детально исследовались методом интеграла Сохоцкого в энергетических пространствах в работах [6, 7]. Было показано, что при приближении к вершинам трещин напряжения зависят от расстояния δ в виде $\delta^{-1/2}$.

Обозначение названия «трещины нового типа» продиктовано необходимостью дистанцироваться от изучавшегося типа трещин той же геометрии, в связи с тем, что последние исследуются в неэнергетических пространствах медленно растущих обобщенных функций, диктуемых спецификой корректно поставленных механических задач. Заметим, что построение неэнергетических собственных функций в области, имеющей полость с угловой точкой, детально исследовано Н.Ф. Морозовым в фундаментальной монографии [6]. В настоящей работе привлечение этих пространств продиктовано требованием корректной механической постановкой соответствующих граничных задач.

Новые трещины получаются как предел последовательности полостей с негладкой границей, например, прямоугольных, при сближении боковых сторон (рис. 3), для которых исследование осуществляется в энергетических пространствах, но предельное решение его покидает. Это означает формирование из полостей с негладкой границей уже полостей-трещин в виде прямолинейного отрезка, способных разрушить среду или изменить ее рео-

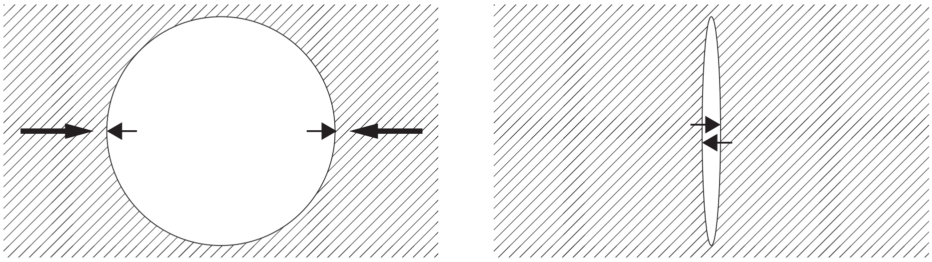

Рис. 2

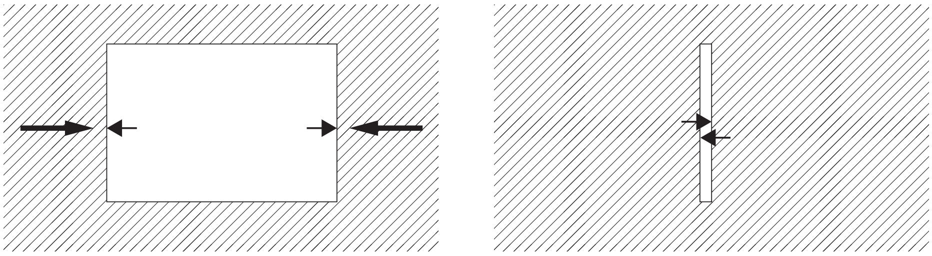

Рис. 3

логию в некоторой упругой зоне, содержащей неэнергетическую составляющую.

1. О трещинах Гриффитса–Ирвина и трещинах нового типа

Исследованиям граничных задач, связанных с изучением критериев разрушения трещин Гриффитса- Ирвина, посвящено большое число работ [5–14].

Для обоснования утверждения о существовании нового типа трещин произведем сравнение трещин Гриффитса–Ирвина, теория которых впервые была сформулирована в 1920 г. [4] Гриффитсем и затем совершенствована Ирвином [15], и трещины нового типа, вид которых известен, но которые не были всесторонне исследованы. Сопоставим свойства этих трещин, обратив особое внимание на способы их формирования. Возможность осуществить сопоставление дает монография [6], в которой выполнен глубокий математический анализ как подходов к построению моделей трещин Гриффитса–Ирвина, так и разных критериев прочности, базирующихся на них. Изучены также случаи линейных и нелинейных материалов. Заметим, что в монографии [5] высказано мнение, что далеко не для всех типов материалов удается подобрать критерии разрушения, которые позволяли бы надежно прогнозировать их разрушение. По мнению авторов в решении этой проблемы смогут содействовать знания свойств трещин нового типа, которые пока детально не изучены. Трещины Гриффитса–Ирвина в этом отношении можно считать исследованными всесторонне. Их классификация диктуется типами нагружения берегов трещин, представленными на рис. 4 [5]. В то же время, сравнивая представленные на рисунке изображения, можно сказать, что геометрически во всех трех случаях изображена одна и та же полость в сплошной среде. Тип нагружения ее берегов различен, и именно типом нагружения берегов различают трещины Гриффитса–Ирвина. Согласно названиям, принятым в [5], на рис. 4 представлены слева направо следующие трещины: трещина нормального разрыва, трещина поперечного сдвига, трещина продольного сдвига. Важно отметить, что контролируемые напряжения, возникающие при воздействиях на берега трещин, оцениваются в сплошной среде непосредственно вблизи вершины трещины в сечении, параллельном плоскостям берегов трещины. Компоненты векторов напряжений для трещин, изображенных на рис. 4, приведены в [5,6]. Приведем лишь по одной компоненте напряжений в вершине трещины, отвечающей направлению воздействия на берега трещины, и по одной формуле, описывающей закругления в вершинах трещин для случаев (рис. 4)

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$y=0, \quad x<0, \quad v=\frac{2-2\nu}{\mu}K_I\sqrt{\frac{r}{2\pi}};$$

$$\sigma_x=\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$y=0, \quad x<0, \quad u=\frac{2-2\nu}{\mu}K_{II}\sqrt{\frac{r}{2\pi}};$$

$$\tau_{yz}=\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$y=0, \quad x<0, \quad w=\frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}.$$

Трещины нового типа формируются в результате сближения боковых сторон прямоугольника. В том случае, когда расстояние между сторонами отлично от нуля, контактные напряжения, возникающие от воздействия на вертикальные берега полости, определяются в результате решения системы интегральных уравнений типа Винера–Хопфа [1,2].

Контактные напряжения под блочными элементами имеют степенную особенность. В случае отсутствия расстояния между трещинами, контактные напряжения приобретают сингулярную особенность [1,2].

Наличие сингулярности является свидетельством разрушения блоков в зоне контакта берегов трещины или основания или перехода среды в пластическое состояние. Эта составляющая исчезает, если параметры граничной задачи, включая и параметры внешних воздействий, таковы, что коэффициент при сингулярной особенности в контактных напряжениях равен нулю. Известно, что механическая система с большей возможностью разрушения менее устойчива, нежели с меньшей, и стремится к последней. Поэтому, при наличии сингулярной особенности в контактных напряжениях, трещина нового типа неустойчива, что приводит к разрушению зоны ее вершины, таким образом, либо разрушается вся среда, либо при разрушении происходит ее трансформация в трещину без нулевого угла, то есть в трещину Гриффитса–Ирвина. В том же случае, если у трещины нового типа сингулярная составляющая отсутствует, трещина нового типа остается устойчивой, до тех пор, пока параметры среды или внешнего воздействия не приведут к возникновению сингулярной составляющей в вершине трещины нового типа.

Трещины нового типа хорошо известны в строительстве. Имеется термин «играющий фундамент», когда он треснул, в результате приобретения трещины нового типа. В сейсмологии трещины нового типа побуждают возникновение стартовых землетрясений. Такие же процессы разрушения имеют место в материалах с треснувшими покрытиями, когда свойства материалов и внешние воздействия формируют в контактных напряжениях сингулярные особенности. В качестве примера приведем простейший вариант формирования трещины нового типа, основываясь на результатах работы [3], где рассматривалась антиплоская граничная задача для блочной структуры. Возьмем три блочных элемента, состоящих из полупространства с симметрично расположенными на нем прямоугольными неограниченными клиньям [3].

Для простоты рассмотрим в каждом из них граничную задачу для уравнения Гельмгольца [3]. Построенное там решение с сохранением всех принятых там обозначений описывается формулами

$$u_\lambda(x_2,x_3)=\mathbf{F}_2^{-1}(x_2,x_3)\frac{\omega_\lambda(\alpha_2,\alpha_3)}{(\alpha_2^2+\alpha_3^2-p_\lambda^2)},$$

$$\begin{gathered}\omega_\lambda=\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}}\right)e^{i(\alpha_2 b_1)}\times\\ \times\left\langle F_{1\lambda}(\alpha_3)-F_{1\lambda}(\alpha_{3\lambda+})\frac{\alpha_3}{\alpha_{3\lambda+}}\right\rangle+\\ +\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_{3\lambda_+}}-1\right)\left\langle F_{2\lambda}(\alpha_2)-\right.\\ \left.-F_{2\lambda}(\alpha_{2\lambda-})e^{-i(\alpha_{2\lambda-}b_1)}e^{i(\alpha_2 b_1)}\frac{\alpha_2}{\alpha_{2\lambda-}}\right\rangle,\end{gathered}$$

$$u_r(x_2,x_3)=\mathbf{F}_2^{-1}(x_2,x_3)\frac{\omega_r(\alpha_2,\alpha_3)}{(\alpha_2^2+\alpha_3^2-p_r^2)},$$

$$\begin{gathered}\omega_r=\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{2r+}}-1\right]e^{i(\alpha_2 b_2)}\times\\ \times\langle F_{1r}(\alpha_3)-F_{1r}(\alpha_{3r+})\rangle+\\ +\left[\frac{\alpha_3}{\alpha_{3r+}}-1\right]\left\langle F_{2r}(\alpha_2)-\right.\\ \left.-F_{2r}(\alpha_{2r+})e^{i(\alpha_2 b_2)}e^{i(\alpha_{2r+}b_2)}\frac{\alpha_2}{\alpha_{2+}}\right\rangle,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}u_h(x_2,x_3)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\frac{F_{2h}(\alpha_2)}{(\alpha_2^2+\alpha_3^2-p_h^2)\alpha_{3h-}}\times\\ \times(\alpha_{3h-}-\alpha_3)e^{-i(\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3)}\,\mathrm{d}\alpha_2\,\mathrm{d}\alpha_3.\end{gathered}$$

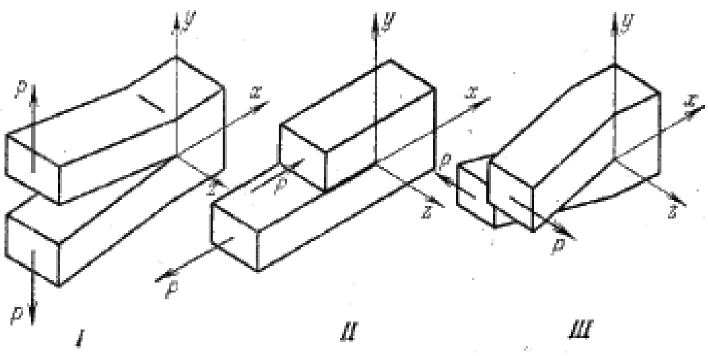

Рис. 4

Положим во всех этих формулах

$$p_h = p_\lambda = p_r.$$

Это означает, что все три блока представлены однотипным материалом, содержащим трещину нового типа. Тогда в результате сближения клиньев до встречи будет сформирована трещина нового типа. Контактные напряжения в случае не до конца сблизившихся клиновидных блоков описываются вблизи краев обеспечивающими конечность энергии формулами вида

$$u_\lambda(x_2, x_3) = \sigma_{1\lambda}(x_2, x_3)(-x_2 - \theta)^{-1/2},$$

$$x_2 < -\theta,$$

$$u_r(x_2, x_3) = \sigma_{1r}(x_2, x_3)(x_2 - \theta)^{-1/2},$$

$$x_2 > \theta.$$

Здесь $\sigma_{1b}(x_2, x_3)$ $(b = \lambda, r)$ — непрерывные по обеим координатам функции при достаточно гладких f_{bn}, $b = \lambda, r$ [3].

При сблизившихся клиновидных блоках концентрация контактных напряжений в зоне сближения приобретает в общем случае сингулярную особенность вида

$$u_\lambda(x_2, x_3) \to \sigma_{2\lambda}(x_2, x_3)x_2^{-1},$$

$$u_r(x_2, x_3) \to \sigma_{2r}(x_2, x_3)x_2^{-1}.$$

Решение оказывается не энергетическим. В частном случае специальной нагрузки на вертикальных границах клиновидных блоков эта особенность может отсутствовать и решение окажется энергетическим. Этим трещины нового типа существенно отличаются от трещин Гриффитса–Ирвина.

Вывод

Таким образом, с использованием упакованных блочных элементов показано как геометрически, так и аналитически существование нового типа трещин, дополняющих трещины Гриффитса–Ирвина.

Расширение класса функций, в котором исследуется трещина-полость, до медленно растущих обобщенных функций позволило выявить особенности напряженно-деформированного состояния трещин нового типа и с их помощью построить механическую модель подготовки широкого спектра стартовых землетрясений. Говоря о том, что этот тип трещин дополняет трещины — Гриффитса–Ирвина, достаточно привести пример трехблочной структуры с блоками разных свойств, на границах сопряжения которых трещины Гриффитса–Ирвина не всегда можно построить, что доступно для трещин нового типа.

Таким образом, трещины-полости в форме прямолинейного отрезка разделяются на трещины энергетического типа и трещины неэнергетического типа. Последние, в отличие от первых, обеспечивают механически корректную постановку.

Литература

1. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229. Iss. 5. P. 2163–2175. DOI: 10.1007/s00707-017-2092-0
2. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mechanica. 2018. DOI: 10.1007/s00707-018-2255-7
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О влиянии пространственной модели

литосферных плит на стартовое землетрясение // ДАН. 2018. Т. 480. № 2. С. 158–163.
4. *Griffith A.A., Eng M.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A. 1921. Vol. 221. P. 163–197. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006
5. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
7. *Sneddon I.* The distributions of stresses in the neighborhood of a cracks in the elastic solid // Proc. Roy. Soc., ser. A. 1946. Vol. 187. DOI: DOI: 10.1098/rspa.1946.0077
8. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
9. *Kirugulige M.S., Tippur H.V.* Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy // Exp. Mech. 2006. Vol. 46. Iss. 2. P. 269–281.
10. *Rangarajan R., Chiaramonte M.M., Hunsweck M.J., Shen Y., Lew A.J.* Simulating curvilinear crack propagation in two dimensions with universal meshes // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2015. Vol. 102. Iss. 3–4. P. 632–670.
11. *Huang Y., Gao H.* Intersonic crack propagation - Part II: Suddenly stopping crack // J. Appl. Mech. 2002. Vol. 69. P. 76–80.
12. *Morini L., Piccolroaz A.* Boundary integral formulation for interfacial cracks in thermodiffusive bimaterials // Proc. R. Soc. A. 2015. Vol. 471. P. 20150284.
13. *Krueger R.* Virtual crack closure technique: history, approach, and applications // Appl. Mech. Rev. 2004. Vol. 57. P. 109–143.
14. *Oneida E.K., van der Meulen M.C.H., Ingraffea A.R.* Methods for Calculating G, GI and GII to Simulate Crack Growth in 2D, Multiple-Material Structures // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 140. P. 106–126.
15. *Irwin G.* Fracture dynamics // Fracture of metals, ASM, Cleveland, 1948. In: Flügge S. (ed.) Encyclopedia of Physics, Vol. IV. Springer, German, 1958. P. 551–590.

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 5, pp. 2163–2175. DOI: 10.1007/s00707-017-2092-0
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018. DOI: 10.1007/s00707-018-2255-7
3. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. On the influence of the spatial model of lithospheric plates on the starting earthquake. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Russian Academy of Sciences], 2018, vol. 480, no. 2, pp. 158–163. (In Russian)
4. Griffith, A.A., Eng, M. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, 1921, vol. 221, pp. 163–197. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006
5. Cherepanov, G.P. Mechanics of brittle fracture. Nauka, Moscow, 1974. (In Russian)
6. Morozov, N.F. Mathematical problems of crack theory. Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)
7. Sneddon, I. The distributions of stresses in the neighborhood of a cracks in the elastic solid. *Proc. Roy. Soc., ser. A*, 1946, vol. 187. DOI: 10.1098/rspa.1946.0077
8. Aleksandrov, V.M., Smetanin, B.I., Sobol, B.V. Thin stress concentrators in elastic bodies. Nauka, Moscow, 1993. (In Russian)
9. Kirugulige, M.S., Tippur, H.V. Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy. *Exp. Mech.*, 2006, vol. 46, iss. 2, pp. 269–281.
10. Rangarajan, R., Chiaramonte, M.M., Hunsweck, M.J., Shen, Y., Lew, A.J. Simulating curvilinear crack propagation in two dimensions with universal meshes. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2015, vol. 102, iss. 3–4, pp. 632–670.
11. Huang, Y., Gao, H. Intersonic crack propagation - Part II: Suddenly stopping crack. *J. Appl. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 76–80.
12. Morini, L., Piccolroaz, A. Boundary integral formulation for interfacial cracks in thermodiffusive bimaterials. *Proc. R. Soc. A.*, 2015, vol. 471, P. 20150284.
13. Krueger, R. Virtual crack closure technique: history, approach, and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, vol. 57, pp. 109–143.
14. Oneida, E.K., van der Meulen, M.C.H., Ingraffea, A.R. Methods for Calculating G, GI and GII to Simulate Crack Growth in 2D, Multiple-Material Structures. *Eng. Fract. Mech.*, 2015, vol. 140, pp. 106–126.
15. Irwin, G. Fracture dynamics. In: Flügge S. (ed.) *Encyclopedia of Physics*, vol. IV, Springer, German, 1958, pp. 551–590.

Статья поступила 11 августа 2018 г.